

Теорема Гаусса¹⁾, которую мы докажем и обсудим в настоящей главе, устанавливает связь между электрическими зарядами и электрическим полем. Она представляет собой более общую и более изящную формулировку закона Кулона.

В принципе напряженность электрического поля, создаваемого данным распределением зарядов, всегда можно вычислить с помощью закона Кулона. Полное электрическое поле в любой точке является векторной суммой (интегралом) вкладов всех зарядов [см. уравнения (22.5) и (22.6)]. Однако, за исключением самых простых случаев, вычислить эту сумму или интеграл крайне сложно; если получить аналитическое решение не удастся (как в примерах разд. 22.7), можно воспользоваться компьютером.

В ряде случаев напряженность электрического поля, создаваемого данным распределением зарядов, удастся рассчитать гораздо проще и изящнее, пользуясь теоремой Гаусса (как мы увидим в разд. 23.3). Основная ценность теоремы Гаусса состоит в том, что она позволяет глубже понять природу электростатического поля и устанавливает более общую связь между зарядами и полем (по этой причине настоящая глава может показаться до некоторой степени формальной).

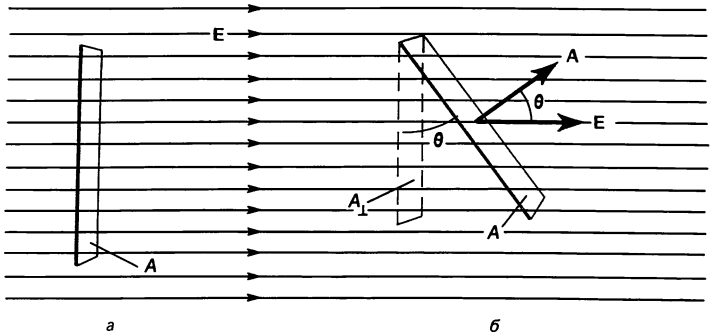
Прежде чем переходить собственно к теореме Гаусса, необходимо ввести понятие *потока*.

23.1. Поток напряженности электрического поля

Рассмотрим площадку A , которую пронизывают силовые линии однородного электрического поля напряженностью \mathbf{E} (рис. 23.1). Площадка может иметь форму прямоугольника (как на рисунке), круга или любую другую. Если напряженность электрического поля перпендикулярна площадке (рис. 23.1, a), то **поток напряженности** Φ_E через

¹⁾ Эту теорему М. В. Остроградский (1801–1862) доказал в 1828 г. применительно к теории теплоты; К. Гаусс (1777–1855) получил соответствующий результат для электрического поля и опубликовал его в 1839 г. – *Прим. перев.*

Рис. 23.1 Однородное электрическое поле E (изображенное параллельными силовыми линиями) проходит через поверхность площадки A , перпендикулярную силовым линиям (a) и не перпендикулярную силовым линиям (b). Штриховыми линиями изображена проекция A_{\perp} площади A на плоскость, перпендикулярную силовым линиям E .



нее определяется как

$$\Phi_E = EA.$$

Если площадка A не перпендикулярна E , а составляет с E некоторый угол θ (рис. 23.1, б), то ее будет пронизывать меньше силовых линий. В этом случае поток напряженности через площадку будет определяться формулой

$$\Phi_E = EA_{\perp} = EA \cos \theta \quad [\text{поле } E \text{ однородно}], \quad (23.1a)$$

где A_{\perp} — проекция площадки A на плоскость, перпендикулярную E . Площадку A можно представить вектором A , направленным перпендикулярно ее поверхности, а по величине пропорциональным площади (рис. 23.1, б). Тогда θ — угол между E и A , и поток напряженности можно записать в виде произведения двух векторов:

$$\Phi_E = E \cdot A \quad [\text{поле } E \text{ однородно}], \quad (23.1б)$$

В силу принятого нами определения поток напряженности допускает наглядное толкование, основанное на понятии силовых линий. Как мы видели в разд. 22.8, число силовых линий N , проходящих через единичную площадку, перпендикулярную направлению поля (A_{\perp}), пропорционально напряженности электрического поля: $E \sim N/A_{\perp}$. Следовательно,

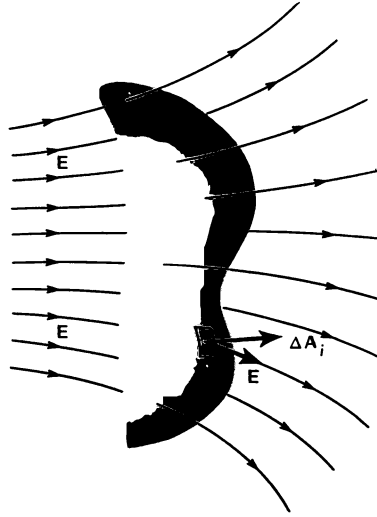
$$N \sim EA_{\perp} = \Phi_E,$$

т. е. поток напряженности поля через площадку пропорционален числу силовых линий, пересекающих ее поверхность.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда электрическое поле E неоднородно, а поверхность не плоская (рис. 23.2). Разобьем эту поверхность на n элементов, площади которых обозначим $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$. Разбиение должно быть таким, чтобы можно было считать 1) каждый элемент ΔA_i плоским и 2) электрическое поле в пределах элемента однородным. Тогда поток напряженности через всю поверхность будет суммой

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^n E_i \cdot \Delta A_i,$$

Рис. 23.2. Определение потока напряженности через искривленную поверхность; ΔA_i – векторный элемент поверхности.



где E_i – напряженность поля, отвечающая элементу ΔA_i . В пределе $\Delta A_i \rightarrow 0$ сумма переходит в интеграл по всей поверхности, и равенство становится точным:

$$\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}. \quad (23,2)$$

Во многих случаях (и, в частности, в случае теоремы Гаусса) мы имеем дело с потоком через замкнутую поверхность, т.е. через поверхность, ограничивающую замкнутый объем, подобно шару или футбольному мячу (рис. 23.3). В таком случае результирующий поток через поверхность записывают в виде

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad [\text{через замкнутую поверхность}], \quad (23.3)$$

где знак \oint означает, что интеграл берется по замкнутой поверхности.

До сих пор мы не учитывали существование неоднозначности в выборе направления вектора \mathbf{A} ; например, на рис. 23.1 вектор \mathbf{A} может быть направлен как вправо

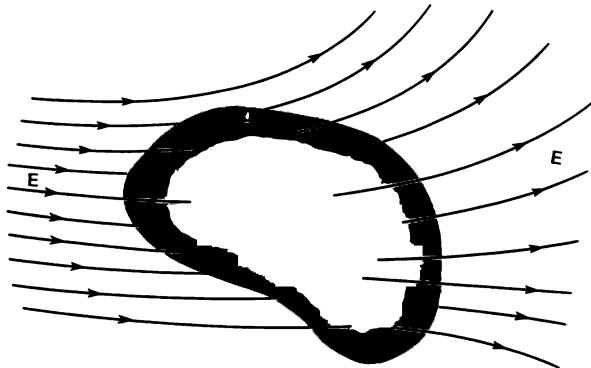
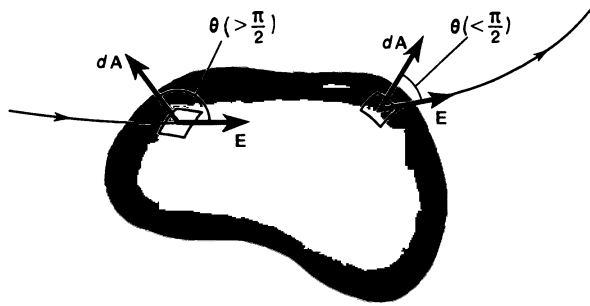


Рис. 23.3. Поток напряженности через замкнутую поверхность.

Рис. 23.4. Вектор dA элемента замкнутой поверхности принято направлять нормально к поверхности наружу.



вверх, так и влево вниз – в любом случае он все равно будет перпендикулярен поверхности. В случае замкнутой поверхности условились направлять вектор A (или dA) *наружу* из ограниченного поверхностью объема (рис. 23.4). Для силовой линии, выходящей из объема (справа на рис. 23.4), угол θ между E и dA меньше $\pi/2$ ($= 90^\circ$) и $\cos \theta > 0$; для линии, входящей в объем (слева на рис. 23.4), $\theta > \pi/2$ и $\cos \theta < 0$. Соответственно *поток, входящий в замкнутый объем, отрицателен* ($\int E \cos \theta dA < 0$), а *поток, выходящий из объема, положителен*. Формула (23.3) дает, таким образом, величину потока, выходящего из объема, ограниченного замкнутой поверхностью. Если значение Φ_E отрицательно, то результирующий поток направлен внутрь объема.

На рис. 23.3 число линий, входящих в объем, равно числу выходящих линий. Поэтому $\Phi_E = 0$: результирующий поток через поверхность равен нулю. Поток $\oint E \cdot dA$ отличен от нуля лишь в том случае, когда какое-то число силовых линий начинается или заканчивается внутри замкнутой поверхности. А поскольку силовые линии могут начинаться или заканчиваться только на электрических зарядах, поток будет отличен от нуля лишь в том случае, когда суммарный заряд внутри поверхности не равен нулю. Например, поверхность A_1 на рис. 23.5 окружает положительный заряд, и поток напряженности электрического поля через эту поверхность направлен наружу ($\Phi_E > 0$); внутри поверхности A_2 заключен такой же по величине отрицательный заряд, и поток направлен внутрь этой поверхности ($\Phi_E < 0$). Для конфигурации, показанной на рис. 23.6, поток через поверхность отрицателен (подсчитайте число силовых линий!). Поток Φ_E

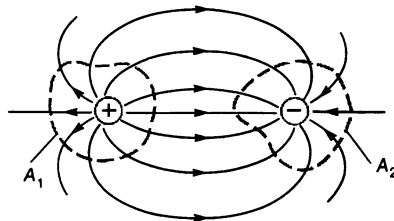
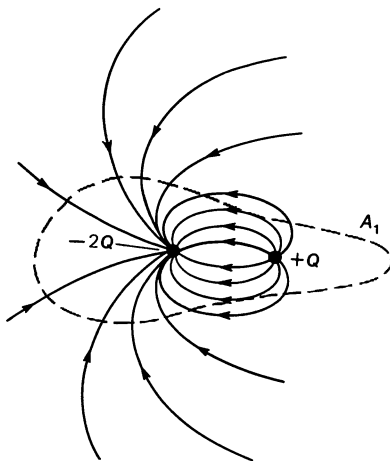


Рис. 23.5. Электрический диполь. Поток через поверхность A_1 положителен, а через поверхность A_2 отрицателен.

Рис. 23.6. Суммарный поток через поверхность A_1 отрицателен.



зависит от заряда, и именно в этом состоит суть теоремы Гаусса ¹⁾.

23.2. Теорема Гаусса

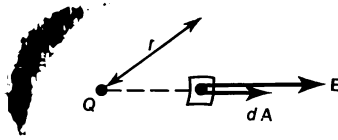
Теорема Гаусса устанавливает точное соотношение между потоком напряженности электрического поля через замкнутую поверхность и суммарным зарядом Q внутри этой поверхности:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (23.4)$$

где ϵ_0 – та же константа (электрическая постоянная), что и в законе Кулона. Подчеркнем, что Q – это заряд, заключенный внутри той поверхности, по которой берется интеграл в левой части. При этом не существенно, как

¹⁾ Понятие потока в равной степени применимо и к течению жидкости, и здесь возникает интересная аналогия. Напряженность электрического поля \mathbf{E} в каждой точке можно сопоставить скорости течения жидкости \mathbf{v} , а силовые линии поля – линиям тока жидкости. Поток Φ через поверхность это не что иное, как объемный расход жидкости, $\Phi = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$. Силовые линии (линии тока) на рис. 23.1–23.3 соответствуют установившемуся ламинарному течению жидкости без источников (например, кранов) и стоков (сливных отверстий). Результирующий поток через замкнутую поверхность равен нулю: сколько жидкости втекает, столько и вытекает (рис. 23.3). На рис. 23.5 и 23.6 имеются источники (соответствующие положительным зарядам), где силовые линии начинаются, и стоки (отрицательные заряды), где силовые линии кончаются. Хотя эта аналогия интересна и наглядна, не следует заходить слишком далеко: электрическое поле не связано с потоком какого-либо вещества. Понятие потока можно ввести для любого векторного поля, как это мы сделаем ниже для магнитного поля.

Рис. 23.7. Сферическая поверхность, окружающая уединенный точечный заряд Q .



именно распределен заряд внутри поверхности; заряды вне поверхности не учитываются. (Внешний заряд может повлиять на расположение силовых линий, но не на алгебраическую сумму линий, входящих внутрь поверхности и выходящих наружу.)¹⁾

Прежде чем переходить к обсуждению теоремы Гаусса, заметим, что интеграл по поверхности на практике не всегда легко вычисляется, однако необходимость в этом возникает не часто, за исключением самых простых ситуаций, которые мы рассмотрим ниже (в основном в разд. 23.3).

Как же связаны между собой теорема Гаусса и закон Кулона? Покажем вначале, что закон Кулона следует из теоремы Гаусса. Рассмотрим уединенный точечный заряд Q . По предположению теорема Гаусса справедлива для произвольной замкнутой поверхности. Выберем поэтому такую поверхность, с которой удобнее всего иметь дело: симметричную поверхность сферы радиусом r , в центре которой находится наш заряд Q (рис. 23.7). Поскольку сфера (конечно, воображаемая) симметрична относительно заряда, расположенного в ее центре, напряженность электрического поля \mathbf{E} должна иметь одно и то же значение в любой точке сферы; кроме того, вектор \mathbf{E} всюду направлен наружу (или всюду внутрь) параллельно вектору $d\mathbf{A}$ элемента поверхности. Тогда равенство

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

¹⁾ Заметим, что теорема Гаусса выглядела бы намного сложнее, если бы мы воспользовались постоянной $k = 1/4\pi\epsilon_0$, которая применялась в законе Кулона (22.1):

Закон Кулона

$$E = k \frac{Q}{r^2},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

Теорема Гаусса

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi k Q,$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q/\epsilon_0.$$

Теорема Гаусса проще записывается через ϵ_0 ; закон Кулона – через k . Сейчас принято пользоваться постоянной ϵ_0 , так как теорема Гаусса отражает более общие закономерности, и поэтому лучше записывать ее в более простом виде.

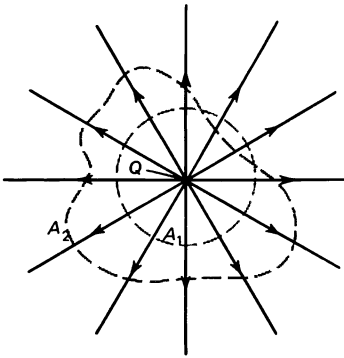


Рис. 23.8. Уединенный точечный заряд, окруженный сферической поверхностью A_1 и поверхностью формы A_2 .

принимает вид

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \oint d\mathbf{A} = E(4\pi r^2),$$

(площадь сферы радиусом r равна $4\pi r^2$). Отсюда находим

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Мы получили закон Кулона в форме (22.4).

Теперь об обратном. В общем случае теореме Гаусса нельзя вывести из закона Кулона: теорема Гаусса является более общим (и более тонким) утверждением, нежели закон Кулона. Однако для некоторых частных случаев теореме Гаусса удастся получить из закона Кулона; мы используем общие рассуждения относительно силовых линий. Рассмотрим для начала уединенный точечный заряд, окруженный сферической поверхностью (рис. 23.7). Согласно закону Кулона, напряженность электрического поля в точке на поверхности сферы равна $E = (1/4\pi\epsilon_0)(Q/r)$. Прделав в обратном порядке аналогичные рассуждения, получим

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} d\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Это и есть теорема Гаусса, и мы вывели ее для частного случая точечного заряда в центре сферической поверхности. Но что можно сказать о поверхности неправильной формы, например поверхности A_2 на рис. 23.8? Через эту поверхность проходит то же число силовых линий, что и через сферу A_1 , но поскольку, как мы видели в разд. 23.1, поток напряженности электрического поля через поверхность пропорционален числу проходящих через нее силовых линий, поток через A_2 равен потоку через A_1 :

$$\oint_{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Следует ожидать поэтому, что формула

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

справедлива для *любой* замкнутой поверхности, окружающей точечный заряд.

Рассмотрим, наконец, случай, когда внутри поверхности находится не единственный заряд. Для каждого заряда в отдельности

$$\oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}.$$

Но коль скоро полная напряженность электрического поля \mathbf{E} есть сумма напряженностей, обусловленных от-

дельными зарядами, $\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$, то

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint (\sum \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{A} = \sum \frac{Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

где $Q = \sum Q_i$ – суммарный заряд, заключенный внутри поверхности. Итак, эти простые рассуждения подсказывают нам, что теорема Гаусса справедлива для любого распределения электрических зарядов внутри любой замкнутой поверхности. Следует иметь в виду, однако, что поле \mathbf{E} не обязательно обусловлено только зарядами Q , которые находятся внутри поверхности. Например, на рис. 23.3 электрическое поле \mathbf{E} существует во всех точках поверхности, однако оно создается вовсе не зарядом внутри поверхности (здесь $Q = 0$). Теорема Гаусса справедлива для потока напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность; она утверждает, что если поток, направленный внутрь поверхности, не равен потоку, направленному наружу, то это обусловлено наличием зарядов внутри поверхности.

Теорема Гаусса справедлива для любого векторного поля, обратно пропорционального квадрату расстояния, например для гравитационного поля. Но для полей другого типа она не будет выполняться. Допустим, например, что поле точечного заряда убывает как kQ/r ; тогда поток через сферу радиусом r определялся бы выражением

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \left(\frac{kQ}{r}\right) (4\pi r^2) = (4\pi kQ) r.$$

Чем больше радиус сферы, тем больше был бы поток, несмотря на то что заряд внутри сферы остается постоянным.

23.3. Применения теоремы Гаусса

Теорема Гаусса позволяет выразить связь между электрическим зарядом и напряженностью электрического поля в очень компактной и элегантной форме. С помощью этой теоремы удастся легко найти напряженность поля в случае, когда распределение зарядов оказывается достаточно простым и симметричным. При этом, однако, необходимо позаботиться о надлежащем выборе поверхности интегрирования. Обычно стремятся выбрать поверхность так, чтобы напряженность электрического поля \mathbf{E} была постоянна по всей поверхности, или по крайней мере на определенных ее участках.

Пример 23.1. *Сферическая оболочка.* По тонкой сферической оболочке радиусом r_0 равномерно распределен заряд Q (рис. 23.9). Определите напряженность

электрического поля а) вне оболочки, б) внутри оболочки.

Решение. а) Поскольку заряд распределен симметрично, электрическое поле

также должно быть симметричным. Оно должно быть направлено вдоль радиуса сферы к поверхности ($Q > 0$) или от нее ($Q < 0$) и в полярных координатах должно зависеть только от r , но не от θ . Напряженность поля будет, таким образом, одинакова во всех точках воображаемой сферы радиусом r , concentричной с оболочкой (A_1 на рис. 23.9). Поскольку напряженность поля E перпендикулярна

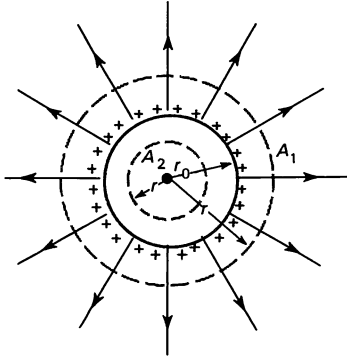


Рис. 23.9. Однородное распределение заряда по тонкой сферической оболочке радиусом r_0 .

поверхности, теорема Гаусса дает

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

или

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} Q \quad [r > r_0].$$

Таким образом, поле снаружи равномерно заряженной сферической оболочки имеет такую же напряженность, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре сферы.

б) Внутри оболочки поле также должно быть симметричным; поэтому напряженность поля E должна иметь одно и то же значение во всех точках сферической поверхности (A_2 на рис. 23.9), concentричной с оболочкой. Следовательно, E можно вынести из-под знака интеграла, и мы получим

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(4\pi r^2) = 0,$$

поскольку заряд Q внутри воображаемой сферы равен нулю. Итак,

$$E = 0 \quad [r < r_0]$$

внутри равномерно заряженной сферы.

Полученный результат очень важен; он справедлив и для однородно заряженного проводящего шара, весь заряд которого будет сосредоточен в тонком поверхностном слое.

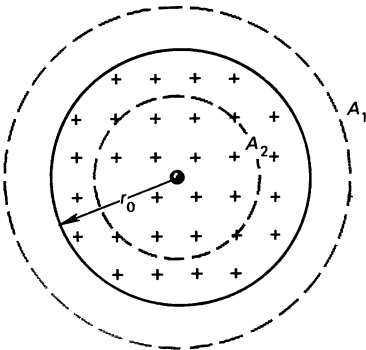


Рис. 23.10. Сплошной шар с однородной объемной плотностью заряда.

Пример. 23.2. *Однородно заряженный шар.* Электрический заряд равномерно распределен по объему непроводящего шара радиусом r_0 (рис. 23.10). Определите электрическое поле а) снаружи шара ($r > r_0$) и б) внутри шара ($r < r_0$).

Решение. Поскольку заряд распределен внутри шара равномерно, электрическое поле также должно быть симметричным. Напряженность поля E зависит только от r и направлена вдоль радиуса наружу (или внутрь, если $Q < 0$). а) Выберем в качестве поверхности интегрирования сферу радиусом $r (r > r_0)$ (A_1 на рис. 23.10). Поскольку E зависит только

от r , имеем

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

или

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Мы вновь получили, что поле снаружи однородно заряженного шара имеет такую же напряженность, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре шара.

б) Внутри шара в качестве поверхности интегрирования выберем сферу радиусом r ($r < r_0$) (A_2 на рис. 23.10). В силу симметрии напряженность \mathbf{E} постоянна во всех точках поверхности A_2 и перпендикулярна ей, так что

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E (4\pi r^2).$$

Это выражение следует приравнять заряду, заключенному внутри сферы A_2 (и деленному на ϵ_0); этот заряд не равен полному заряду Q , а составляет лишь часть его. Так как заряд единицы объема (объемная плотность заряда ρ) всюду одинаков, внутри A_2 заключен заряд, равный

$$\left(\frac{4/3\pi r^3 \rho}{4/3\pi r_0^3 \rho} \right) Q = \frac{r^3}{r_0^3} Q.$$

Отсюда по теореме Гаусса

$$E (4\pi r^2) = \frac{r^3}{r_0^3} \frac{Q}{\epsilon_0},$$

или

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^3} r \quad [r < r_0].$$

Таким образом, с увеличением расстояния r от центра шара поле вначале линейно растет (до $r = r_0$), а затем при $r > r_0$ убывает как $1/r^2$ (рис. 23.11)

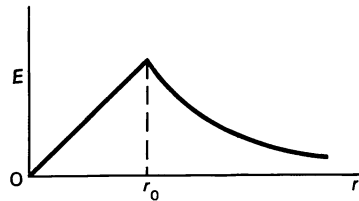


Рис. 23.11. Зависимость напряженности электрического поля от расстояния до центра r однородно заряженного сплошного шара.

Чтобы получить эти результаты на основании закона Кулона, нам пришлось бы потрудиться, интегрируя по объему шара. Благодаря использованию теоремы Гаусса и симметрии задачи решение оказалось почти тривиальным. Это демонстрирует огромные возможности теоремы Гаусса. Однако подобное использование этой теоремы ограничено в основном случаями, когда распределение зарядов обладает высокой симметрией. В подобных ситуациях мы *выбираем* простую поверхность, на которой $E = \text{const}$, и интеграл берется без труда. Разумеется, теорема Гаусса справедлива для любой поверхности, «простые» поверхности выбираются лишь для облегчения интегрирования. В следующих двух примерах мы рассмотрим задачи, обладающие симметрией, которые уже были решены с помощью закона Кулона. И здесь теорема Гаусса упрощает решение.

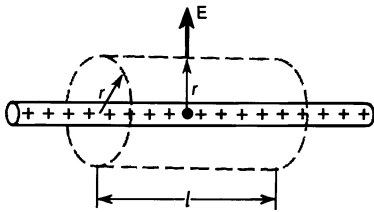


Рис. 23.12. К расчету напряженности электрического поля E , создаваемого длинным линейным зарядом.

Пример 23.3. *Длинный равномерно заряженный проводник.* Очень длинный прямой линейный проводник равномерно заряжен; линейная плотность заряда равна λ . Рассчитайте напряженность электрического поля вблизи проводника на достаточно большом расстоянии от его концов.

Решение. В силу симметрии задачи электрическое поле должно быть направлено вдоль радиуса наружу (если $Q > 0$) и зависеть только от расстояния r по перпендикуляру от проводника. Благодаря цилиндрической симметрии напряженность электрического поля должна быть постоянна по поверхности цилиндра, охватывающего проводник и коаксиального с ним (рис. 23.12). Вектор E во всех точках перпендикулярен поверхности цилиндра. Чтобы применить теорему Гаусса, нам нужна замкнутая поверхность, поэтому следует учесть и плоские торцы цилиндра. Однако, поскольку вектор E параллелен торцам, поток сквозь торцы отсутствует, и

$$\oint E \cdot dA = E(2\pi r l) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0},$$

где l — высота цилиндра, по поверхности которого проводится интегрирование (l много меньше длины проводника). Отсюда

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}.$$

Этот же результат мы получили в примере 22.7, пользуясь законом Кулона (вместо r мы писали там x); использование теоремы Гаусса упростило решение,

и мы вновь убедились, каким мощным инструментом является эта теорема.

Пример 23.4. *Бесконечная заряженная плоскость.* Заряд равномерно распределен по непроводящей плоскости; поверхностная плотность заряда равна σ . Определите напряженность электрического поля вблизи плоскости.

Решение. Выберем в качестве поверхности интегрирования небольшой замкнутый цилиндр, ось которого перпендикулярна плоскости и который пересекается плоскостью (рис. 23.13). В силу симметрии следует ожидать, что вектор E по обе стороны плоскости перпендикулярен ей и постоянен в пределах торца цилиндра площадью a . Поскольку через боковую поверхность цилиндра поток равен нулю, весь поток приходится на торцы. По теореме Гаусса

$$\oint E \cdot dA = 2EA = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

где $Q = \sigma A$ — заряд, заключенный внутри цилиндра. Напряженность электрического поля равна

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Этот же результат мы получили более сложным путем в примере 22.8. Вблизи заряженной плоскости (далеко от краев) электрическое поле однородно.

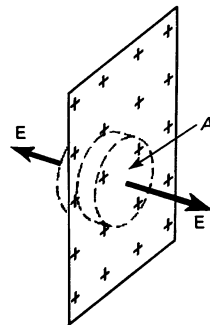


Рис. 23.13. К расчету напряженности электрического поля вблизи большой, однородно заряженной плоскости.

Пример 23.5. Покажите, что напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника произвольной формы определяется выражением

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

где σ — плотность заряда в данной точке поверхности проводника.

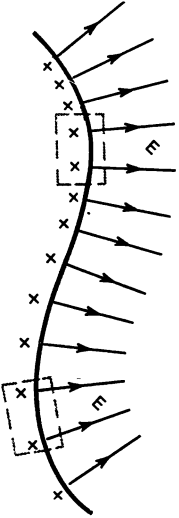


Рис. 23.14. Электрическое поле у поверхности проводника.

Решение. В качестве поверхности интегрирования выберем небольшую цилиндрическую поверхность, как и в предыдущем примере. Пусть цилиндр имеет очень малую высоту, так что его торцы едва возвышаются над поверхностью проводника (рис. 23.14); другой торец находится под поверхностью, а боковая поверхность перпендикулярна проводнику. Электрическое поле внутри проводника отсутствует, а вблизи поверхности вектор напряженности электрического поля перпендикулярен ей (разд. 22.9). Поэтому поток напряженности проходит только через наружный торец цилиндра. Площадь A торца выберем достаточно малой, чтобы напряженность поля E можно было считать в его пределах постоянной. Тогда по теореме Гаусса

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E A = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

и

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [\text{у поверхности проводника}]. \quad (23.5)$$

Этот полезный результат справедлив для проводников любой формы.

Может возникнуть вопрос, почему поле у поверхности заряженного плоского изолятора (пример 23.4) имеет напряженность $E = \sigma/2\epsilon_0$, а у поверхности проводника $K = \sigma/\epsilon_0$. Двойка в знаменателе обусловлена не тем, что в одном случае мы имеем проводник, а в другом — изолятор, а различным определением поверхностной плотности заряда в этих случаях. У проводника весь заряд сосредоточен на поверхности и все силовые линии поля выходят в одну сторону. Из плоского изолятора силовые линии выходят в обе стороны (рис. 23.13). На большом плоском тонком проводнике заряд располагался бы по обе стороны, и силовые линии выходили бы с обеих сторон. И тогда, если бы мы считали σ плотностью заряда для *всей* поверхности, а не только для плоскости, то плотность заряда с одной стороны поверхности составляла бы $\sigma/2$ и напряженность электрического поля была бы такой же, как и в случае изолятора [$E = (\sigma/2)/\epsilon_0 = \sigma/2\epsilon_0$]. Принято, однако, относить σ к одной поверхности заряженной плоскости, и тогда $E = \sigma/\epsilon_0$. Таким образом, результаты примеров 23.4 и 23.5 различаются в два раза из-за того, что σ определяется по-разному.

Заключение

Поток напряженности однородного электрического поля \mathbf{E} через плоскую площадку A равен $\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$. Если поле неоднородно, то поток определяется интегралом $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$. Вектор \mathbf{A} (или $d\mathbf{A}$) направлен перпендикулярно площадке A (или dA); для замкнутой поверхности вектор \mathbf{A} направлен наружу. Поток через поверхность пропорционален числу силовых линий, проходящих через эту поверхность.

Теорема Гаусса утверждает, что результирующий поток напряженности электрического поля, проходящий через замкнутую поверхность, равен суммарному заряду внутри поверхности, деленному на ϵ_0 :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

В принципе теорему Гаусса можно использовать для определения напряженности электрического поля, создаваемого заданным распределением зарядов. Однако на практике ее применение ограничено в основном несколькими частными случаями, когда распределение зарядов имеет высокую симметрию. Истинная ценность теоремы Гаусса состоит в том, что она устанавливает в более общем и более элегантном виде, чем закон Кулона, связь между электрическим зарядом и напряженностью электрического поля. Теорема Гаусса является одним из фундаментальных уравнений электромагнитной теории.

Вопросы

1. Если поток напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен нулю, означает ли это, что напряженность электрического поля равна нулю во всех точках поверхности? Справедливо ли обратное: если $\mathbf{E} = 0$ во всех точках поверхности, то поток через поверхность равен нулю?

2. Обусловлена ли напряженность электрического поля \mathbf{E} в теореме Гаусса $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q/\epsilon_0$ только зарядом Q ?

3. Точечный заряд окружен сферической поверхностью интегрирования радиусом r . Изменится ли значение Φ_E , если сферу заменить кубом со стороной $r/2$?

4. Что вы можете сказать о потоке напряженности электрического поля через замкнутую поверхность, окружающую электрический диполь?

5. Напряженность электрического поля \mathbf{E} равна нулю во всех точках замкнутой поверхности. Значит ли это, что внутри нет зарядов? Если суммарный заряд внутри замкнутой поверхности равен нулю, то обязательно ли равна нулю напряженность электрического поля во всех точках поверхности?

6. Дайте определение гравитационного потока по аналогии с потоком напряженности электрического поля. Существуют ли в гравитационном поле «источники» и «стоки», как в электрическом? Объясните ответ.

7. Можно ли применить теорему Гаусса для определения напряженности электрического поля диполя?

8. Сферический баскетбольный мяч (непроводник) обладает зарядом Q , равномерно распределенным по его поверхности. Что можно сказать о напряженности электрического поля внутри мяча? Человек наступил на мяч и выпустил почти весь воздух из него, причем электрический заряд не изменился. Что можно теперь сказать о напряженности электрического поля внутри мяча?

9. Может показаться, что рассчитанная в примере 23.3 напряженность электрического поля обусловлена лишь теми зарядами, которые попали внутрь цилиндрической поверхности интегрирования. В действительности же рассчитанная напряженность учитывает вклад зарядов по всей длине проводника. Объясните, каким образом учитывается этот вклад (рис. 23.12). (Подсказка; рассмотрите поле, создаваемое коротким проводником.)

10. Вернемся к комментарию к примеру 23.5. Можно ли определить поверхностную плотность заряда с каждой стороны непроводящей плоскости? Если можно, то при каком условии?

11. Точечный заряд Q окружен сферической поверхностью радиусом r_0 , центр которой совпадает с Q . Затем заряд перемещают вправо на расстояние $r_0/2$, сфера же остается на месте. Изменится ли поток Φ_E через сферу? Изменится ли распределение напряженности электрического поля на поверхности сферы? Если да, то как?

12. Предположим, что проводник в примере 23.3 имеет не слишком большую длину и лишь немного выходит за торцы цилиндра, показанного на рис. 23.12. Как изменится результат примера 23.3 в этом случае?

13. Проводник обладает зарядом Q . В проводнике имеется полость, в центр которой помещается точечный заряд q . Чему равен заряд а) на внешней поверхности проводника; б) на внутренней поверхности проводника?

14. Точечный заряд q помещен в центре тонкой металлической незаряженной оболочки. Будет ли действовать электрическая сила на заряд Q , находящийся снаружи? Объясните ответ.

Задачи

Раздел 23.1

1. (I) Круг радиусом 15 см помещен в однородное электрическое поле напряженностью $3,6 \cdot 10^2$ Н/Кл. Чему равен поток напряженности поля сквозь круг, если его плоскость а) перпендикулярна силовым линиям; б) составляет угол 45° с силовыми линиями; в) параллельна силовым линиям?

2. (I) Куб со стороной l помещен в однородное электрическое поле напряженностью $E = 8,1 \times 10^3$ Н/Кл так, что его ребра параллельны силовым линиям. Чему равен суммарный поток напряженности электрического поля через куб?

3. (II) Точечный заряд Q помещен в центр куба со стороной l . Чему равен поток напряженности электрического поля через одну грань куба?

4. (II) Однородное электрическое поле напряженностью E параллельно оси полусферы радиусом R . Чему равен поток напряженности поля через поверхность полусферы? Каким будет результат, если вектор E перпендикулярен оси?

Раздел 23.2

5. (I) Из куба со стороной 18,0 см выходит поток напряженности электрического поля, равный $1,45 \cdot 10^3$ Н·м²/Кл. Какой заряд находится внутри куба?

6. (II) Запишите теорему Гаусса для гравитационного поля \mathcal{G} (разд. 5.9).

7. (II) Пользуясь теоремой Гаусса, докажите, что результирующий заряд изолированного проводника находится на его внешней поверхности. (Подсказка: выберите поверхность интегрирования прямо под поверхностью проводника.)

8. (II) Понятие потока применимо также к течению жидкости. При этом скоростью течения жидкости v соответствует E , а силовые линии электрического поля — линиям тока жидкости: а) Какая характеристика течения жидкости соответствует потоку напряженности электрического поля Φ ? б) Запишите теорему Гаусса для ламинарного течения несжимаемой жидкости.

Раздел 23.3

9. (I) Напряженность электрического поля снаружи металлического шара радиусом 3,0 см вблизи его поверхности равна $2,1 \cdot 10^2$ Н/Кл и направлена к шару. Каким зарядом обладает шар?

10. (I) Пользуясь результатом примера 23.1, покажите, что напряженность электрического поля вблизи однородно заряженного сферического проводника равна $E = \sigma/\epsilon_0$ в согласии с результатом примера 23.5.

11. (II) Объемная плотность заряда ρ (заряд/объем) постоянна внутри сферы радиусом r_0 . Выразите напряженность электрического поля через ρ в зависимости от r а) при $r < r_0$; б) при $r > r_0$. Согласуются ли результаты при $r = r_0$?

12. (II) Точечный заряд Q помещен на расстоянии $r_0/2$ выше центра сферической поверхности радиусом r_0 . а) Чему равен поток напряженности электрического поля через сферу? б) В каких пределах меняется E на поверхности сферы? в) Всюду ли вектор E перпендикулярен поверхности сферы? г) Удобно ли воспользоваться теоремой Гаусса для определения E на поверхности сферы?

13. (II) Электрическое поле вблизи поверхности Земли имеет напряженность $E \approx 150$ Н/Кл и направлено к центру Земли. а) Чему равен суммарный заряд Земли? б) Сколько лишних электронов приходится на 1 м² земной поверхности?

14. (II) Две большие плоские круглые металлические пластины находятся друг от друга на расстоянии, много меньшем их диаметров. Проводники имеют равные по величине и противоположные по знаку поверхностные плотности заряда σ . Пренебрегая краевыми эффектами, воспользуйтесь теоремой Гаусса, чтобы показать, что а) вдали от краев напряженность электрического поля между пластинами равна

$E = \sigma/\epsilon_0$; б) с внешней стороны пластин напряженность электрического поля всюду равна нулю. в) Каким был бы ответ, если бы пластины были непроводящими?

15. (II) Предположим, что проводящие пластины в предыдущей задаче имеют заряд *одного и того же* знака. Чему тогда равна напряженность электрического поля а) между пластинами; б) с наружной стороны пластин. в) Каким был бы ответ, если бы пластины были непроводящими?

16. (II) Заряд Q помещен в вершину куба со стороной a . Определите поток напряженности электрического поля через куб. (Подсказка: в интегрировании и сложных расчетах нет необходимости.)

17. (II) Вершина куба со стороной l находится в начале координат, а оси x , y и z направлены по ребрам куба. Напряженность электрического поля в этой области определяется формулой $E = (a + by)\mathbf{j}$. Определите величину заряда внутри куба.

18. (II) Тонкая цилиндрическая оболочка радиусом R_1 окружена концентрической цилиндрической оболочкой радиусом R_2 ($R_1 < R_2$). Внутренняя оболочка несет заряд $+Q$, а внешняя — заряд $-Q$. Считая длину цилиндров L много больше, чем R_1 и R_2 , определите зависимость напряженности электрического поля от r (расстояния от общей оси цилиндров) для а) $r < R_1$; б) $R_1 < r < R_2$; в) $r > R_2$. г) Чему равна кинетическая энергия электрона, который движется в промежутке между цилиндрами по концентрической окружности радиусом $(R_1 + R_2)/2$?

19. (II) При каких условиях в предыдущей задаче $E = 0$ при $r > R_2$? При каких условиях $E = 0$ при $R_1 < r < R_2$?

20. (II) Две концентрические сферические оболочки радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) равномерно заряжены с поверхностными плотностями заряда соответственно σ_1 и σ_2 . Определите напряженность электрического поля а) при $r < R_1$; б) при $R_1 < r < R_2$; в) при $r > R_2$. г) При каких условиях $E = 0$ при $r > R_2$?

21. (II) При каких условиях $E = 0$ при $R_1 < r < R_2$?

21. (II) Сферический резиновый воздушный шарик несет заряд Q , равномерно распределенный по его поверхности. При $t = 0$ радиус шарика равен r_0 ; шарик начинают медленно надуть, и за 30 с его радиус линейно растет от r_0 до $2r_0$.

Определите временную зависимость напряженности электрического поля а) снаружи шарика вблизи поверхности; б) в точке $r = 4r_0$.

22. (II) Пусть сфера в примере 23.2 имеет кон-

центрическую сферическую полость радиусом r_1 . Считая заряд Q равномерно распределенным по объему оболочки (между $r = r_1$ и $r = r_0$), определите зависимость напряженности электрического поля от r при а) $r < r_1$; б) $r_1 < r < r_0$; в) $r > r_0$.

23. (II) Пусть плотность заряда в пустотелом шарике в предыдущей задаче меняется по закону $\rho = \rho_0 r_1/r$. Рассчитайте напряженность электрического поля как функцию r для а) $r < r_1$; б) $r_1 < r < r_0$; в) $r > r_0$. г) Постройте график $E(r)$ для $0 < r < 2r_0$.

24. (II) Пусть в центре оболочки на рис. 23.9 (пример 23.1) имеется точечный заряд $q \neq Q$. Определите напряженность электрического поля при а) $r < r_0$; б) $r > r_0$. Каким будет ответ, если в) $q = Q$; г) $q = -Q$?

25. (II) Длинная цилиндрическая оболочка радиусом R_0 и длиной L ($R_0 \ll L$) имеет однородную поверхностную плотность заряда σ . Определите напряженность электрического поля а) снаружи цилиндра ($r > R_0$); б) внутри цилиндра ($r < R_0$); в) в точках, находящихся далеко от концов цилиндра и не слишком далеко от поверхности ($r \ll L$). в) Сравните полученный результат с результатом для длинного заряженного проводника (пример 23.3).

26. (II) Очень длинный сплошной непроводящий цилиндр радиусом R_0 и длиной L ($R_0 \ll L$) обладает однородной объемной плотностью заряда ρ (Кл/м³). Определите напряженность электрического поля в точках а) вне цилиндра ($r > R_0$); б) внутри цилиндра ($r < R_0$). Сделайте это для точек, удаленных от концов цилиндра, для которых также $r \ll L$.

27. (II) По плоскому квадратному алюминиевому листу со стороной 20 см равномерно распределен заряд 35 нКл. Чему приблизительно равна напряженность электрического поля над листом на расстоянии а) 1,0 см; б) 15 м?

28. (II) Точечный заряд Q находится в центре цилиндра на его оси. Длина цилиндра l равна его диаметру. Чему равен поток напряженности электрического поля через боковую поверхность цилиндра? (Подсказка: рассчитайте вначале поток через торцы.)

29. (III) Сплошной непроводящий шар радиусом r_0 обладает зарядом Q , который распределен в объеме по закону

$$\rho = br,$$

где ρ — объемная плотность заряда, b — постоянная. а) Выразите b через Q . Рассчитайте напряженность электрического поля для точек б) внутри шара; в) снаружи шара.