24 Электрический потенциал

Как мы видели в гл. 6 и 7, понятие энергии исключительно полезно для решения задач механики. Прежде всего энергия сохраняется и поэтому служит важной характеристикой явлений природы. Кроме того, мы видели, что, используя представления об энергии, многие задачи удается решить, не имея детальных сведений о силах или в случае, когда применение законов Ньютона потребовало бы сложных вычислений.

Энергетическим подходом можно воспользоваться и при изучении электрических явлений, и здесь он оказывается чрезвычайно полезным: позволяет не только обобщить закон сохранения энергии, но и в новом аспекте увидеть электрические явления, а также служит средством более просто находить решения, чем путем рассмотрения сил и электрических полей.

24.1. Электрический потенциал и разность потенциалов

В разд. 7.1 было показано, что потенциальную энергию можно определить лишь для консервативных сил; работа такой силы по перемещению частицы между двумя точками не зависит от выбранного пути. Легко видеть, что электростатическая сила является консервативной: сила, с которой один точечный заряд действует на другой, определяется законом Кулона: $F = kQ_1Q_2/r^2$; здесь та же обратно пропорциональная зависимость от квадрата расстояния, что и в законе всемирного тяготения: $F = Gm_1m_2/r^2$. Такие силы, как говорилось в разд. 7.5, консервативны. Сила, действующая на выбранный заряд со стороны любого распределения зарядов, может быть записана в виде суммы кулоновских сил (разд. 22.7); следовательно, и сила, создаваемая произвольным распределением зарядов, консервативна. А это позволяет ввести потенциальную энергию электростатического поля.

Разность потенциальных энергий точечного заряда q в двух различных точках электрического поля можно определить как работу, совершаемую внешними силами по перемещению заряда (против действия электрической силы) из одной точки в другую. Это равносильно определе-

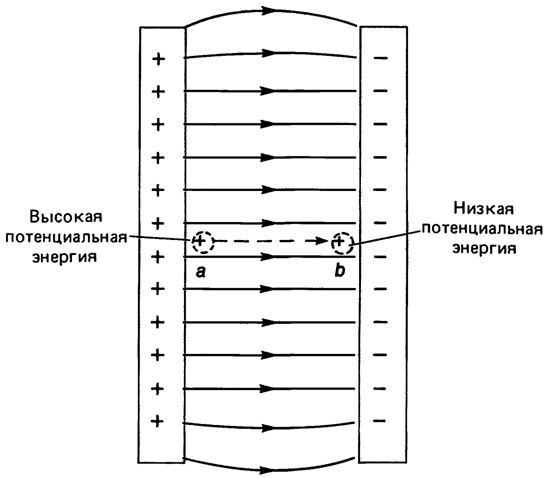

Рис. 24. 1. Электрическое поле совершает работу по перемещению положительного заряда из точки *a* в точку *b*.

нию изменения потенциальной энергии заряда в поле как взятой с обратным знаком работы, совершаемой самим полем по перемещению заряда из одной точки в другую (разд. 6.5).

Рассмотрим для примера электрическое поле между двумя пластинами с равным по величине и противоположным по знаку зарядом. Пусть размеры пластин велики по сравнению с расстоянием между ними, и поэтому поле между пластинами можно считать однородным (рис. 24.1). Поместим в точку *a* вблизи положительно заряженной пластины точечный положительный заряд *q*. Электрическая сила, действующая на заряд, будет стремиться переместить его к отрицательной пластине (в точку *b*), совершая работу по переносу заряда. Под действием силы заряд приобретет ускорение и его кинетическая энергия возрастет; при этом потенциальная энергия уменьшится на величину работы, совершенной электрической силой по перемещению заряда из точки *a* в точку *b*. Согласно закону сохранения энергии, потенциальная энергия заряда в электрическом поле перейдет в кинетическую энергию, но полная энергия останется неизменной. Заметим, что положительный заряд *q* обладает наибольшей потенциальной энергией *U* вблизи положительной пластины (в этой точке его способность совершать работу над другим телом или системой максимальна). Для отрицательного заряда справедливо обратное: его потенциальная энергия будет максимальна вблизи отрицательной пластины.

Напряженность электрического поля (гл. 22) мы определяли как силу, действующую на единичный заряд; аналогично удобно ввести **электрический потенциал** (или просто **потенциал**, если это не вызывает недоразумений) как *потенциальную энергию единичного заряда*. Электрический потенциал обозначается символом *V*; итак, если в некоторой точке a точечный заряд q обладает потенциальной энергией U_a, то электрический потенциал в этой точке равен

$$V_a = \frac{U_a}{q}.$$

Как показано в гл. 6, реально мы измеряем только изменение потенциальной энергии. Соответственно фактически можно измерить лишь **разность потенциалов** между двумя точками (например, точками a и b на рис. 24.1). Если работа электрических сил по перемещению заряда от точки a в точку b есть W_{ba} (а разность потенциальных энергий соответственно равна этой величине с обратным знаком), то для разности потенциалов можно написать

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\frac{W_{ba}}{q}. \tag{24.1}$$

Единицей электрического потенциала (и разности потенциалов) является джоуль на кулон (Дж/Кл); этой единице присвоено наименование *вольт* (В) в честь Алессандро Вольты (1745–1827) (он известен как изобретатель электрической батареи); 1 В = 1 Дж/Кл. Заметим, что, согласно данному определению, положительно заряженная пластина на рис. 24.1 имеет более высокий потенциал, чем отрицательная. Таким образом, положительно заряженное тело будет стремиться перейти из точки с более высоким потенциалом в точку с более низким потенциалом, отрицательно заряженное тело – наоборот. Разность потенциалов часто называют **электрическим напряжением**.

Потенциал в данной точке V_a зависит от выбора «нуля» потенциала; как и в случае потенциальной энергии, нулевой уровень может выбираться произвольно, поскольку измерить можно лишь изменение потенциальной энергии (разность потенциалов). Часто за нулевой принимают потенциал земли или проводника, соединенного с землей, и остальные значения потенциалов отсчитывают относительно «земли». (Например, говоря, что потенциал в какой-то точке равен 50 В, имеют в виду, что разность потенциалов между этой точкой и землей равна 50 В.) В иных случаях, как мы увидим, удобно считать нулевым потенциал на бесконечности.

Поскольку электрический потенциал определяется как потенциальная энергия единичного заряда, изменение потенциальной энергии заряда q при перемещении его из точки a в точку b равно

$$\Delta U = U_b - U_a = qV_{ba}. \tag{24.2}$$

Другими словами, когда заряд q перемещается между точками с разностью потенциалов V_{ba}, его потенциальная энергия изменяется на величину qV_{ba}. Если, например, разность потенциалов между пластинами на рис. 24.1

составляет 6 В, то заряд 1 Кл, перемещенный (внешней силой) из точки b в точку a, увеличит свою потенциальную энергию на (1 Кл) (6 В) = 6 Дж. (Перемещаясь же из a в b, он потеряет потенциальную энергию 6 Дж.) Аналогично энергия заряда 2 Кл увеличится на 12 Дж и т. п. Таким образом, электрический потенциал служит мерой изменения потенциальной энергии электрического заряда в данной ситуации. А поскольку потенциальная энергия – это способность совершать работу, электрический потенциал служит мерой той работы, которую может совершить данный заряд. Количество работы зависит как от разности потенциалов, так и от величины заряда.

Чтобы лучше понять смысл электрического потенциала, проведем аналогию с гравитационным полем. Пусть камень падает с вершины скалы. Чем выше скала, тем большей потенциальной энергией обладает камень и тем больше будет его кинетическая энергия, когда он долетит до подножия скалы. Величина кинетической энергии и соответственно работа, которую может совершить камень, зависят от высоты скалы и от массы камня. Точно так же и в электрическом поле изменение потенциальной энергии (и работа, которую можно совершить) зависит от разности потенциалов (эквивалентной высоте скалы) и заряда (эквивалентного массе) [см. (24.1)].

Используемые на практике источники электроэнергии – батареи, электрогенераторы – создают определенную разность потенциалов. Количество энергии, отбираемой от источника, зависит от величины переносимого заряда. Рассмотрим, например, автомобильную фару, соединенную с аккумулятором, разность потенциалов на зажимах которого равна 12 В. Количество энергии, преобразуемой фарой в свет (и, конечно, в тепло), пропорционально заряду, протекшему через фару, что в свою очередь зависит от того, как долго включена фара. Если за некоторое время через фару прошел заряд 5,0 Кл, то преобразованная фарой энергия составит (5,0 Кл) (12,0 В) = = 60 Дж. Если оставить фару включенной вдвое дольше, то через нее пройдет заряд 10,0 Кл, и количество преобразованной энергии составит (10,0 Кл) (12,0 В) = = 120 Дж.

Пример 24.1. Электрон в кинескопе телевизора ускоряется из состояния покоя разностью потенциалов $V_{ba} = 5000$ В. а) Чему равно изменение потенциальной энергии электрона? б) Какую скорость приобретает электрон в результате этого ускорения?

Решение. а) Заряд электрона равен $-e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Изменение потенциальной энергии равно

$$\Delta U = qV_{ba} = (-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(+5000\ \text{В}) = -8{,}0 \cdot 10^{-16}\ \text{Дж}.$$

[Разность потенциалов V_{ba} положительна, так как потенциал конечной точки выше потенциала начальной точки; отрицательно заряженные электроны движутся от отрицательного электрода (катода) к положительному (аноду).] б) Потенциальная энергия электрона переходит в его кинетическую энергию. По закону сохранения энергии [см. (7.3)]

$$\Delta КЭ = -\Delta U,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = -qV_{ba},$$

где начальное значение кинетической энергии равно нулю, поскольку электрон покоился. Подставив значение массы электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, найдем скорость:

$$v = \sqrt{-\frac{2qV_{ba}}{m}} = \sqrt{\frac{-2(-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(5000\ \text{В})}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{кг}}} = 4{,}2 \cdot 10^7\ \text{м/с}.$$

24.2. Связь между электрическим потенциалом и напряженностью электрического поля

Эффекты, обусловленные тем или иным распределением зарядов, можно описать как с помощью напряженности электрического поля, так и через электрический потенциал. Между напряженностью поля и потенциалом существует тесная связь. Рассмотрим вначале эту связь для случая однородного электрического поля, например поля между пластинами на рис. 24.1 с разностью потенциалов V_{ba}. Работа электрического поля по перемещению положительного заряда q из точки a в точку b, согласно соотношению (24.1), равна

$$W = -qV_{ba}.$$

Обратим внимание на то, что величина $V_{ba} = V_b - V_a$ отрицательна ($V_{ba} < 0$), так как потенциал в точке a выше, чем в точке b (и положителен по отношению к потенциалу в точке b). Поэтому совершаемая полем работа положительна. С другой стороны, работа равна произведению силы на перемещение, а сила, действующая на заряд q, есть $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – напряженность однородного электрического поля между пластинами. Таким образом,

$$W = Fd = qEd,$$

где d – расстояние между точками a и b (вдоль силовой линии). Приравняв эти выражения для работы, получим

$$-qV_{ba} = qEd,$$

или

$$V_b - V_a = V_{ba} = -Ed \quad [\text{поле } E \text{ однородно}]. \tag{24.3}$$

Знак минус в правой части указывает просто на то, что $V_a > V_b$, т. е. потенциал положительной пластины выше, чем отрицательной, как мы уже говорили. Положительные заряды стремятся двигаться из области с высоким потенциалом в область с низким потенциалом. Отсюда можно найти E: $E = -V_{ba}/d$.

Из последнего равенства видно, что напряженность электрического поля можно измерять как в вольтах на метр (В/м), так и в ньютонах на кулон (Н/Кл). Эти единицы эквивалентны между собой: 1 Н/Кл = = 1 Н·м/Кл·м = 1 Дж/Кл·м = 1 В/м.

Пример 24.2. Две параллельные пластины заряжены до разности потенциалов 50 В. Рассчитать напряженность поля между пластинами, если расстояние между ними равно 5,0 см.

Решение. По формуле (24.3) без учета знака находим

$E = V/d = 50$ В/0,050 м $= 1000$ В/м.

Чтобы перейти к общему случаю неоднородного электрического поля, вспомним соотношение между силой **F** и потенциальной энергией U, обусловленной этой силой. Как говорилось в разд. 6.5, разность потенциальных энергий в двух точках пространства a и b дается формулой (6.13):

$$U_b - U_a = -\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l},$$

где $d\boldsymbol{l}$ – бесконечно малое перемещение, а интеграл берется вдоль произвольной траектории между точками a и b. В случае электрического поля нас больше интересует разность не потенциальных энергий, а потенциалов [формула (24.2)]: $V_{ba} = V_b - V_a = (U_b - U_a)/q$. Напряженность электрического поля **E** в любой точке пространства определяется отношением силы к заряду [формула (22.3)]: $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$. Подставляя эти два равенства в (6.13), получим

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l}. \tag{24.4}$$

Это и есть общее соотношение, связывающее напряженность электрического поля с разностью потенциалов.

Когда поле однородно, формула (24.4) переходит в (24.3). Например, на рис. 24.1 вдоль траектории, параллельной силовым линиям, от точки a у положительной пластины до точки b у отрицательной пластины (поскольку направления **E** и $d\boldsymbol{l}$ всюду совпадают) имеем

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -E\int_a^b dl = -Ed,$$

где d – расстояние вдоль силовой линии между точками a и b. И вновь знак минус в правой части свидетельствует лишь о том, что на рис. 24.1 $V_a > V_b$.

24.3. Эквипотенциальные поверхности

Электрический потенциал можно представить графически, изображая **эквипотенциальные линии** или в трех измерениях – **эквипотенциальные поверхности**. Всем точкам эквипотенциальной поверхности соотвстствует один и тот же потенциал. Иначе говоря, разность потенциалов между любыми двумя точками этой поверхности равна нулю, и при перемещении заряда из одной точки в другую работа не совершается. *Эквипотенциальная поверхность в любой точке должна быть перпендикулярна направлению*

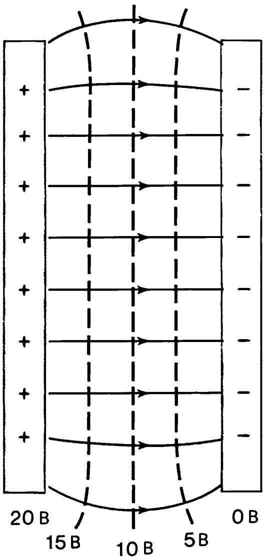

Рис. 24.2. Эквипотенциальные линии (штриховые) между двумя заряженными параллельными пластинами, перпендикулярные силовым линиям поля (сплошные линии).

напряженности электрического поля. Если бы это было не так (т. е. если бы существовала компонента **E**, параллельная поверхности), то для перемещения заряда вдоль поверхности в направлении, противоположном этой компоненте **E**, приходилось бы совершать работу, что противоречит предположению об *эквипотенциальности* поверхности.

Тот факт, что силовые линии электрического поля перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, помогает построению эквипотенциальных поверхностей, если известно расположение силовых линий. На рис. 24.2 изображено несколько эквипотенциальных линий (штриховые линии) для поля между параллельными пластинами, разность потенциалов которых составляет 20 В. Эти линии принадлежат эквипотенциальным поверхностям, которые пересекают рисунок перпендикулярно плоскости книжной страницы. Потенциал отрицательной пластины условно принят за нулевой; указан соответствующий потенциал каждой эквипотенциальной линии. Эквипотенциальные линии для случая двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов показаны штриховыми линиями на рис. 24.3.

В разд. 22.9 мы видели, что в статическом случае внутри проводника не существует электрическое поле, так как в противном случае на свободные электроны действовала бы сила и они пришли бы в движение. Иными словами, *в статическом случае проводник должен находиться целиком под одним и тем же потенциалом*, и поверхность проводника является, таким образом, эквипотенциальной. (Иначе свободные электроны на поверх-

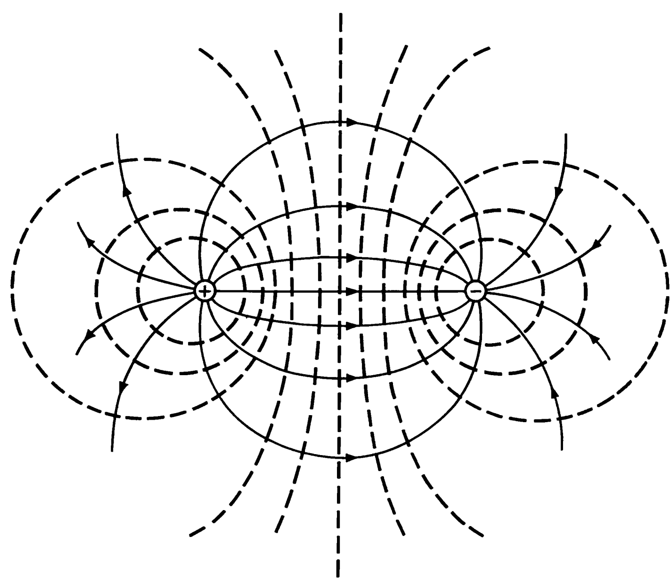

Рис. 24.3. Эквипотенциальные линии (штриховые) и силовые линии электрического поля (сплошные линии) вблизи двух противоположно заряженных частиц.

ности пришли бы в движение.) Это полностью согласуется с уже отмеченным выше фактом, что электрическое поле у поверхности проводника перпендикулярно поверхности.

24.4. Электрон-вольт, единица энергии

Как мы увидим, джоуль оказывается слишком крупной единицей для измерения энергии электронов, атомов, молекул как в атомной и ядерной физике, так и в химии и молекулярной биологии. Здесь удобнее пользоваться единицей *электрон-вольт* (эВ). Один электрон-вольт равен энергии, которую приобретает электрон, проходя разность потенциалов 1 В. Заряд электрона равен $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, и, поскольку изменение потенциальной энергии равно qV,

$$1\ \text{эВ} = (1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл})(1{,}0\ \text{В}) = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}.$$

Электрон, ускоренный разностью потенциалов 1000 В, теряет потенциальную энергию 1000 эВ и приобретает кинетическую энергию 1000 эВ (или 1 кэВ). Если той же разностью потенциалов ускорить частицу с вдвое большим зарядом ($2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл), ее энергия изменится на 2000 эВ.

Электрон-вольт – удобная единица для *измерения* энергии молекул и элементарных частиц, но он не принадлежит к системе СИ. Поэтому при расчетах следует переводить электрон-вольты в джоули, пользуясь приведенным выше коэффициентом. В примере 24.1 кинетическая энергия электрона составила $8{,}0 \cdot 10^{-16}$ Дж. Привычнее было бы сказать, что энергия электрона равна 5000 эВ ($= 8{,}0 \cdot 10^{-16}$ Дж/$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж/эВ), но при определении скорости электрона в единицах СИ кинетическую энергию следует выражать в джоулях.

24.5. Электрический потенциал уединенного точечного заряда

Электрический потенциал на расстоянии r от уединенного точечного заряда Q можно получить непосредственно из формулы (24.4). Электрическое поле точечного заряда имеет напряженность [см. (22.4)]

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

и направлено вдоль радиуса от заряда (или к заряду, если $Q < 0$). Возьмем интеграл в (24.4) вдоль прямой линии (рис. 24.4) от точки a на расстоянии r_a от Q до точки b на расстоянии r_b от Q. Тогда вектор $d\mathbf{l}$ параллелен $\mathbf{E}$ и $dl = dr$.

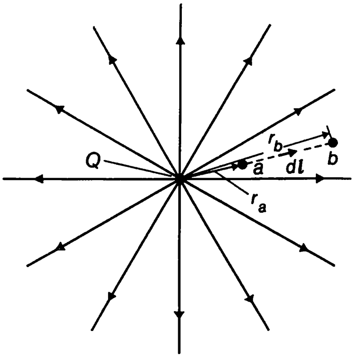

Рис. 24.4. Уравнение (24.4) интегрируется вдоль прямой (штриховой) линии от точки *a* до точки *b*; траектория интегрирования направлена вдоль силовой линии поля.

Таким образом,

$$V_b - V_a = -\int_{r_a}^{r_b} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_b} - \frac{Q}{r_a}\right).$$

Как уже говорилось, физический смысл имеет лишь разность потенциалов. Поэтому мы вправе присвоить потенциалу в какой-либо точке произвольное значение. Принято считать потенциал равным нулю на бесконечности (например, $V_b = 0$ при $r_b = \infty$), и тогда электрический потенциал на расстоянии r от уединенного точечного заряда равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \quad \text{[уединенный точечный заряд].} \qquad (24.5)$$

Это электрический потенциал относительно бесконечности; он иногда называется «абсолютным потенциалом» уединенного точечного заряда. Обратим внимание на то, что потенциал V убывает как первая степень расстояния от заряда, в то время как напряженность электрического поля [см. (22.4)] убывает как *квадрат* расстояния. Потенциал велик вблизи положительного заряда и убывает до нуля на очень большом расстоянии. Вблизи отрицательного заряда потенциал *меньше* нуля (отрицателен) и с увеличением расстояния возрастает до нуля.

Пример 24.3. Какую работу требуется совершить, чтобы перенести заряд $q = 3{,}0$ мкКл из бесконечности ($r = \infty$) в точку на расстоянии 0,50 м от заряда $Q = 20{,}0$ мкКл?

Решение. Работа равна

$$W = qV_{ba} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_b} - \frac{Q}{r_a}\right),$$

где $r_b = 0{,}50$ м, а $r_a = \infty$. Отсюда

$$W = (3{,}0\cdot 10^{-6}\ \text{Кл}) \times \frac{(9{,}0\cdot 10^{9}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(2{,}00\cdot 10^{-5}\ \text{Кл})}{0{,}500\ \text{м}} = 1{,}08\ \text{Дж}.$$

(Вспомним, что $1/4\pi\varepsilon_0 = 9{,}0\cdot 10^{9}$ $\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2$.)

Чтобы определить напряженность электрического поля системы зарядов, необходимо просуммировать напряженности полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Поскольку напряженность поля – вектор, такое суммирование нередко вырастает в проблему. Найти же электрический потенциал нескольких точечных зарядов гораздо проще: потенциал – скалярная величина и при сложении потенциалов не требуется учитывать направление. В этом большое преимущество электрического потенциала.

Пример 24.4. Рассчитайте электрический потенциал в точках A и B, обусловленный зарядами на рис. 22.15 (см. также пример 22.5, где мы рассчитывали напряженность поля в этих точках).

Решение. Потенциал в точке A есть сумма потенциалов, обусловленных положительным и отрицательным зарядами; для определения каждого из них используем формулу (24.5):

$$V_A \sim V_{A2} + V_{A1} = \frac{(9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(5{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{Кл})}{0{,}30\ \text{м}} + \frac{(9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(-5{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{Кл})}{0{,}60\ \text{м}} = 7{,}5 \cdot 10^5\ \text{В}.$$

Для точки B

$$V_B = V_{B2} + V_{B1} = \frac{(9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(5{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{Кл})}{0{,}40\ \text{м}} + \frac{(9{,}0 \cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(-5{,}0 \cdot 10^{5}\ \text{Кл})}{0{,}40\ \text{м}} = 0\ \text{В}.$$

Потенциал будет равен нулю не только в этой точке, но и во всех точках плоскости, равноудаленной от обоих зарядов.

Подобное суммирование легко выполнить для любого числа точечных зарядов.

24.6. Потенциал электрического диполя

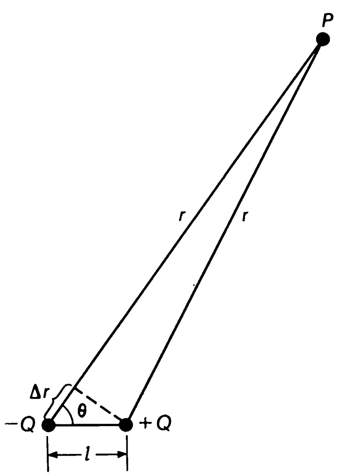

Рис. 24.5. Электрический диполь. Расчет потенциала V в точке P.

Два равных по величине и противоположных по знаку точечных заряда Q, находящиеся на расстоянии l друг от друга, называются *электрическим диполем* (разд. 22.11). Силовые линии и эквипотенциальные поверхности диполя показаны на рис. 24.3.

Рассчитаем электрический потенциал, создаваемый диполем в произвольной точке P (рис. 24.5). Потенциал V представляет собой сумму потенциалов, создаваемых каждым из зарядов:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-Q)}{r+\Delta r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\Delta r}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta r}{r(r+\Delta r)},$$

где r – расстояние от точки P до положительного заряда, а $r + \Delta r$ – до отрицательного заряда. Выражение упростится, если рассматривать точки, расстояние которых до диполя гораздо больше расстояния между зарядами ($r \gg l$). Как видно из рисунка, в этом случае $\Delta r \approx l\cos\theta$; тогда $r \gg \Delta r = l\cos\theta$, и в знаменателе величиной Δr можно пренебречь по сравнению с r. Такого рода приближения часто оказываются полезными и позволяют получить простое выражение для потенциала

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \quad [\text{диполь};\ r \gg l], \tag{24.6}$$

где $p = Ql$ – *дипольный момент*. При $0° < \theta < 90°$ потенциал V положителен, при $90° < \theta < 180°$ потенциал отрицателен (поскольку отрицательно значение $\cos\theta$). Это разумно, поскольку в первом случае точка P ближе к положительному заряду, а во втором – к отрицательному. При $\theta = 90°$ потенциал равен нулю ($\cos 90° = 0$) в соответствии с результатом примера 24.4. Из (24.6) мы видим, что потенциал убывает как *квадрат* расстояния до диполя, в то время как потенциал точечного заряда убывает как первая степень расстояния [см. (24.5)]. Это неудивительно: на больших расстояниях от диполя заряды кажутся столь близкими друг к другу, что взаимно нейтрализуются.

Во многих молекулах, в целом электрически нейтральных, электроны проводят больше времени у одного атома, чем у другого, что эквивалентно разделению зарядов. Такие молекулы обладают дипольным моментом и называются *полярными*.

Пример 24.5. Расстояние между атомами углерода (C) и кислорода (O) в группе C=O, встречающейся у многих органических молекул, составляет примерно $1{,}2\cdot10^{-10}$ м; дипольный момент этой группы равен $8{,}0\cdot10^{-30}$ Кл·м. Рассчитайте а) результирующий заряд Q атомов C(+) и O(−); б) потенциал на расстоянии $9{,}0\cdot10^{-10}$ м от кислорода вдоль продольной оси диполя (т. е. влево на рис. 24.5, $\theta = 180°$); в) чему был бы равен потенциал в этой точке в случае просто атома кислорода с тем же зарядом?

Решение. а) Дипольный момент равен $p = Ql$. Отсюда

$$Q = \frac{p}{l} = \left(\frac{8{,}0\cdot10^{-30}\ \text{Кл}\cdot\text{м}}{1{,}2\cdot10^{-10}\ \text{м}}\right) = 6{,}6\cdot10^{-20}\ \text{Кл}.$$

б) Из (24.6) при $\theta = 180°$ находим

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} =$$

$$= \frac{(9{,}0\cdot10^{9}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(8{,}0\cdot10^{-30}\ \text{Кл}\cdot\text{м})(-1{,}0)}{(9{,}0\cdot10^{-10}\ \text{м})^2} =$$

$$= -0{,}088\ \text{В}.$$

в) Согласно п. «а», заряд кислорода равен $Q = -6{,}6\cdot10^{-20}$ Кл; используем формулу (24.5) для уединенного точечного заряда:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} =$$

$$= \frac{(9{,}0\cdot10^{9}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)(-6{,}6\cdot10^{-20}\ \text{Кл})}{9{,}0\cdot10^{-10}\ \text{м}} =$$

$$= -0{,}66\ \text{В}.$$

Как и следовало ожидать, потенциал уединенного заряда больше, чем диполя с одинаковыми зарядами, расположенными на таком же расстоянии.

24.7. Потенциал произвольного распределения зарядов

Зная напряженность электрического поля, создаваемого данным распределением зарядов, можно рассчитать разность потенциалов между любыми двумя точками, пользуясь формулой (24.4). Но нередко поле **E** неизвестно и его сложно рассчитать. Потенциал любого распределения зарядов можно получить иным и часто более простым способом, вычисляя потенциалы, создаваемые каждым точечным зарядом [см. (24.5)]:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r},$$

и затем суммируя их. Если имеется n точечных зарядов, то потенциал в некоторой точке c равен

$$V_c = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_{ic}}, \qquad (24.7а)$$

где r_{ic} – расстояние от i-го заряда Q_i до точки c. Такой подход использовался в примере 24.4 для случая диполя (разд. 24.6). Если распределение зарядов можно считать непрерывным, то

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \qquad (24.7б)$$

где r – расстояние от элемента заряда dq до точки, в которой определяется V.

Пример 24.6. Заряд Q распределен равномерно по тонкому кольцу радиусом R. Определите электрический потенциал в точке P на оси кольца на расстоянии x от его центра (рис. 24.6).

Решение. Все точки кольца удалены от точки P на расстояние $(x^2 + R^2)^{1/2}$. По формуле (24.7б) потенциал в точке P равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2 + R^2)^{1/2}}\int dq =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(x^2 + R^2)^{1/2}}.$$

Пример 24.7. Заряд Q равномерно распределен по тонкому диску радиусом R (рис. 24.7). Определите потенциал в точке P на оси диска на расстоянии x от его центра.

Решение. Разобьем диск на элементарные кольца радиусом r и шириной dr. Поскольку заряд Q распределен равномерно, заряд каждого элементарного кольца пропорционален его площади:

$$dq = Q\frac{(2\pi r)(dr)}{\pi R^2} = \frac{2Qrdr}{R^2}.$$

Тогда потенциал в точке P, согласно

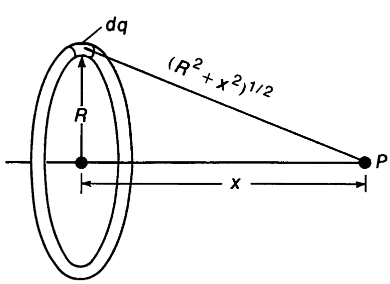

Рис. 24.6. Расчет потенциала в точке P на расстоянии x от центра равномерно заряженного кольца (пример 24.6).

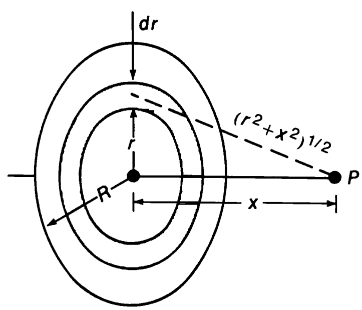

Рис. 24.7. Расчет электрического потенциала в точке P на оси равномерно заряженного тонкого диска (пример 24.7).

(24.7б), равен

$$V = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int\limits_0^R \frac{rdr}{(x^2+r^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(x^2+r^2)^{1/2}\Big|_{r=0}^{r=R} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}[(x^2+R^2)^{1/2}-x].$$

Пример 24.8. *Однородно заряженная проводящая сфера.* Определите потенциал на расстоянии r от центра однородно заряженной проводящей сферы радиусом R при а) $r > R$; б) $r = R$; в) $r < R$. Полный заряд сферы равен Q.

Решение. а) Заряд Q распределен по поверхности сферы, поскольку она проводник. В примере 23.1 мы показали, что электрическое поле снаружи сферы в этом случае равно

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad [r > R]$$

и направлено по радиусу (к центру, если $Q < 0$). Зная поле **E**, воспользуемся формулой (24.4); проинтегрируем по радиусу, учитывая, что вектор dl параллелен **E** (как на рис. 24.4), между двумя точками, отстоящими от центра сферы на расстояния r_a и r_b:

$$V_b - V_a = -\int\limits_{r_a}^{r_b}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right).$$

Если положить $V = 0$ при $r = \infty$ (скажем, $V_b = 0$ при $r_b = \infty$), то в любой точке $r\,(r > R)$ потенциал равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \quad [r > R].$$

б) Если r приближается к R, то потенциал на поверхности проводника равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \quad [r = R].$$

в) Внутри проводника поле равно $E = 0$. Поэтому интеграл $\int\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ между $r = R$ и любой точкой внутри проводника равен нулю, и потенциал постоянен внутри проводника:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \quad [r \leqslant R].$$

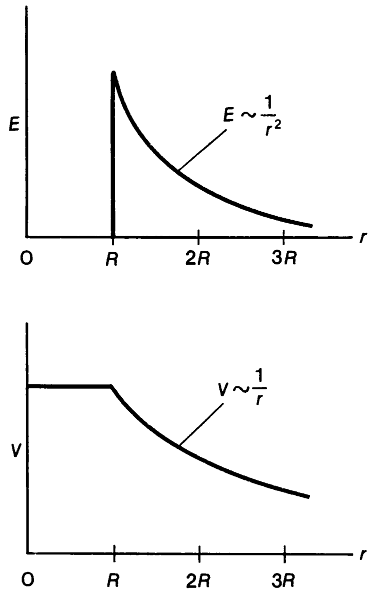

Рис. 24.8. Графики $E(r)$ и $V(r)$ для однородно заряженного сплошного проводящего шара радиусом R (заряд равномерно распределен по поверхности); r – расстояние до центра шара.

Итак, не только поверхность, но и весь проводник находится под одним и тем же потенциалом. Графики зависимости E и V от r для проводящего шара приведены на рис. 24.8.

Пример 24.9. *Напряжение пробоя.* Во многих установках используются очень высокие напряжения. Проблема, связанная с высоким напряжением, заключается в том, что поля больших напряженностей могут ионизовать воздух – электрическое поле вырывает электроны из атомов кислорода и азота; воздух становится проводящим, и это препятствует поддержанию высокого напряжения из-за утечки заряда. Электрический пробой воздуха происходит при напряженности поля примерно $3\cdot 10^6$ В/м. а) Покажите, что напряжение пробоя для сферического проводника в воздухе пропорционально радиусу сферы, и б) рассчитайте напряжение пробоя в воздухе для сферы диаметром 1,0 см.

Решение. а) Электрический потенциал поверхности сферического проводника радиусом R (пример 24.8) равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R},$$

а напряженность поля вблизи поверхности (пример 23.1) равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}.$$

Отсюда

$$V = RE \quad \left[\begin{array}{l}\text{вблизи поверхности} \\ \text{сферического проводника}\end{array}\right].$$

б) При $R = 5\cdot 10^{-3}$ м напряжение пробоя в воздухе составит

$$V = (5\cdot 10^{-3}\ \text{м})(3\cdot 10^{6}\ \text{В/м}) \approx 15\,000\ \text{В}.$$

Из этого примера ясно, почему вводы установок высокого напряжения делают большими. Понятно также, почему пробой (искрение) возникает на шероховатостях и остриях (области малого радиуса кривизны) и почему обычно проводники стараются делать как можно более гладкими.

24.8. Определение напряженности электрического поля E с помощью потенциала V

Формулу (24.4) можно использовать для определения разности потенциалов между двумя точками электрического поля, если напряженность поля в области между этими точками известна. Обращая формулу (24.4), мы можем выразить напряженность электрического поля через его потенциал, т. е., зная V, мы сможем определить **E**. Посмотрим, как это делается.

Уравнение (24.4) можно переписать в дифференциальной форме:

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -E_l dl,$$

где dV – бесконечно малая разность потенциалов между точками на расстоянии dl друг от друга, а E_l – составляющая напряженности электрического поля в направлении этого бесконечно малого перемещения $d\mathbf{l}$. Тогда

$$E_l = -\frac{dV}{dl}. \tag{24.8}$$

Таким образом, *составляющая напряженности электрического поля по любому направлению равна градиенту потенциала в этом направлении, взятому с обратным знаком*. Градиентом величины V называется ее производная по определенному направлению dV/dl. Если направление не указывается, то *градиент* соответствует направлению наиболее быстрого изменения V; это соответствует направлению вектора **E** в данной точке, поскольку именно в таком направлении составляющая вектора **E** совпадает с полной величиной напряженности поля:

$$E = -\frac{dV}{dl} \quad [\text{при } d\mathbf{l} \,||\, \mathbf{E}].$$

Если расписать составляющие вектора **E** по координатам x, y, z и в качестве l взять направления вдоль осей x, y, z, то уравнение (24.8) можно записать в виде

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{24.9}$$

Здесь $\partial V/\partial x$ – частная производная V по направлению x при условии, что y и z фиксированы.

Пример 24.10. Определите напряженность электрического поля в точке P на оси а) заряженного кольца (рис. 24.6), б) заряженного диска (рис. 24.7).

Решение. а) Из примера 24.6 потенциал равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(x^2 + R^2)^{1/2}}.$$

Тогда

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}},$$

$$E_y = E_z = 0.$$

Этот результат совпадает с полученным в примере 22.6.

б) Из примера 24.7 потенциал равен

$$V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}[(x^2 + R^2)^{1/2} - x],$$

и

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}}\right],$$

$$E_y = E_z = 0.$$

Для точек, близких к диску, $x \ll R$, и выражение упрощается:

$$E_x \approx \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где $\sigma = Q/\pi R^2$ – поверхностная плотность заряда. Этот результат мы получили в примере 22.8 при рассмотрении заряженной плоскости. В чем, по-вашему, причина совпадения результатов?

Пример 24.11. Определите составляющие напряженности E_x и E_y электрического поля диполя в произвольной точке P плоскости xy (рис. 24.9). Предположите, что $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \gg l$.

Решение. Согласно (24.6), потенциал равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

поскольку $r^2 = x^2 + y^2$ и $\cos\theta = x/r = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$. Тогда

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} =$$

$$= -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}\right) =$$

$$= -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(y^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

и

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

В разд. 22.11 мы показали, что $E = -E_x = (p/4\pi\varepsilon_0)(1/r^3)$ для точек на оси y ($x = 0$); это согласуется с более общими результатами, полученными здесь.

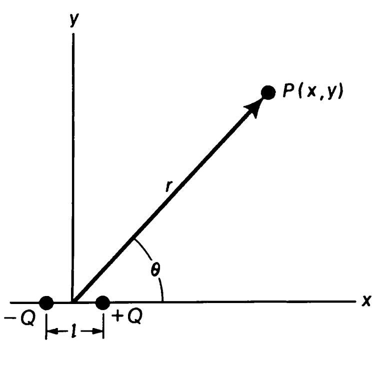

Рис. 24.9. Определение напряженности электрического поля, создаваемого диполем в любой точке плоскости xy (пример 24.11).

В последнем примере мы вычислили напряженность электрического поля **E** диполя в произвольной точке пространства. Складывая векторы напряженностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности, как в разд. 22.11, получить этот результат было бы гораздо сложнее (нам удалось рассчитать поле **E** только вдоль оси y). Вообще говоря, для многих распределений зарядов гораздо проще рассчитать потенциал, а затем по формуле (24.9) – напряженность электрического поля **E**, чем вычислять по закону Кулона по отдельности **E** для каждого заряда: скалярные величины складывать намного проще, чем векторы.

24.9. Электростатическая потенциальная энергия

Предположим, что точечный заряд q перемещают в пространстве из точки a в точку b, электрические потенциалы в которых, обусловленные другими зарядами, равны соответственно V_a и V_b. Изменение электростатической потенциальной энергии заряда q в поле других зарядов составляет, согласно (24.2),

$$\Delta U = U_b - U_a = q(V_b - V_a) = qV_{ba}.$$

Пусть теперь имеется система нескольких точечных зарядов. Чему равна электростатическая потенциальная энергия системы? Удобнее всего выбрать за нуль потенциальную энергию зарядов на очень больших (в идеале бесконечно больших) расстояниях друг от друга. Потенциальная энергия уединенного точечного заряда Q_1 равна нулю, поскольку в отсутствие других зарядов на него не действует никакая сила. Если к нему поднести второй точечный заряд, Q_2, потенциал в точке, где находится второй заряд, будет равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_{12}},$$

где r_{12} – расстояние между зарядами; потенциальная энергия двух зарядов равна

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}}. \tag{24.10}$$

Она характеризует работу, необходимую для перемещения заряда Q_2 из бесконечности ($V = 0$) на расстояние r_{12} до заряда Q_1 (или со знаком минус работу, необходимую для разнесения зарядов на бесконечно большое расстояние).

Если система состоит из трех зарядов, то ее полная потенциальная энергия будет равна работе по перемещению всех трех зарядов из бесконечности в место их расположения. Работа по сближению зарядов Q_2 и Q_1 определяется выражением (24.10); чтобы перенести заряд Q_3 из бесконечности в точку на расстоянии r_{13} от Q_1 и на расстоянии r_{23} от Q_2, требуется совершить работу

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{r_{13}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{r_{23}}.$$

В этом случае потенциальная энергия системы трех точечных зарядов равна

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}}+\frac{Q_1Q_3}{r_{13}}+\frac{Q_2Q_3}{r_{23}}\right).$$

Для системы четырех зарядов выражение для потенциальной энергии будет содержать шесть таких членов и т. п. (При составлении подобных сумм необходимо следить за тем, чтобы не учитывать одну и ту же пару дважды.)

Часто нас интересует не полная электростатическая потенциальная энергия, а лишь часть ее. Например, может возникнуть необходимость найти потенциальную энергию одного диполя в присутствии другого диполя. Во взаимодействии участвуют четыре заряда: Q_1 и $-Q_1$ первого диполя и Q_2 и $-Q_2$ второго диполя. Потенциальная энергия одного диполя и в присутствии другого (иногда ее называют *энергией взаимодействия*) представляет собой работу по сближению диполей с бесконечно большого расстояния. В этом случае нас не интересует взаимная потенциальная энергия зарядов Q_1 и $-Q_1$ или Q_2 и $-Q_2$; выражение для потенциальной энергии двух диполей будет содержать лишь четыре члена, соответствующие энергиям взаимодействия между зарядами: Q_1 и Q_2, Q_1 и $-Q_2$, $-Q_1$ и Q_2, $-Q_1$ и $-Q_2$.

Пример 24.12. Две нити молекулы ДНК (носителя генетического кода человеческих и других биологических клеток) связаны друг с другом электростатическими силами (см. рис. 22.27 и подпись к нему). Эти силы включают и взаимодействие между диполями, подобное показанному на рис. 24.10. Рассчитайте энергию взаимодействия между диполем C=O (в молекуле тимина) и диполем H—N (в молекуле аденина) в конфигурации, показанной на рис. 24.10 (все расстояния взяты из экспериментальных данных, $1\ \text{Å} = 10^{-10}$ м). Дипольные моменты C=O и H—N составляют соответственно $8{,}0\cdot10^{-30}$ и $3{,}0\cdot10^{-30}$ Кл·м.

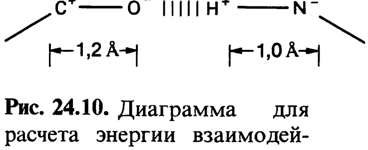

Рис. 24.10. Диаграмма для расчета энергии взаимодействия между диполем тимина C = O и диполем аденина H – N.

Решение. Энергия взаимодействия U равна потенциальной энергии одного диполя в присутствии другого диполя, которая равна (со знаком минус) работе по разнесению диполей на бесконечно большое расстояние друг от друга. Однако мы не можем воспользоваться приближенной формулой (24.6) для потенциала, так как расстояния между диполями лишь незначительно превышают размеры самих диполей. Поэтому нам придется применить формулу (24.10) для потенциальной энергии точечных зарядов; в выражение войдут четыре члена:

$$U = U_{\text{CH}} + U_{\text{CN}} + U_{\text{OH}} + U_{\text{ON}}.$$

Здесь U_{CH} обозначает потенциальную энергию атома C в присутствии атома H и т. п. Сюда не входят члены, соответствующие парам C и O и N и H, поскольку каждый диполь рассматривается как единое целое. Выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_C Q_H}{r_{CH}} + \frac{Q_C Q_N}{r_{CN}} + \frac{Q_O Q_H}{r_{OH}} + \frac{Q_O Q_N}{r_{ON}}\right).$$

Здесь $Q_C = -Q_O = p_{CO}/l = (8{,}0 \cdot 10^{-30}$ Кл·м)/$/(1{,}2 \cdot 10^{-10}$ м$) = 6{,}6 \cdot 10^{-20}$ Кл; $Q_H = -Q_N = p_{HN}/l = (3{,}0 \cdot 10^{-30}$ Кл·м)/$(1{,}0 \cdot 10^{-10}$ м$) = 3{,}0 \cdot 10^{-20}$ Кл. Расстояния, согласно рис. 24.10, равны: $r_{CH} = 3{,}0 \cdot 10^{-10}$ м, $r_{CN} = 4{,}0 \cdot 10^{-10}$ м, $r_{OH} = 1{,}8 \cdot 10^{-10}$ м и $r_{ON} = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ м. Подставляя эти числа и выносся за скобки степени десяти, получим

$$U = (9 \cdot 10^9\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2)\left(\frac{(6{,}6)(3{,}0)}{3{,}0} + \frac{(6{,}6)(-3{,}0)}{4{,}0} + \frac{(-6{,}6)(3{,}0)}{1{,}8} + \frac{(-6{,}6)(-3{,}0)}{2{,}8}\right)\frac{10^{-40}\ \text{Кл}^2}{10^{-10}\ \text{м}} =$$

$$= (5{,}9 - 4{,}5 - 9{,}9 + 6{,}4)\cdot 10^{-20}\ \text{Дж} =$$

$$= -2{,}1 \cdot 10^{-20}\ \text{Дж} = -0{,}13\ \text{эВ}.$$

Потенциальная энергия отрицательна; это значит, что для разделения молекул необходимо совершить работу.

Заключение

Электрический потенциал в любой точке пространства определяется как электростатическая потенциальная энергия единицы заряда. *Разность потенциалов* между двумя точками определяется взятой с обратным знаком работой, которая совершается полем при перемещении единичного электрического заряда между этими точками. Разность потенциалов измеряется в вольтах (1 В = 1 Дж/Кл) и иногда называется *напряжением*. Изменение потенциальной энергии заряда q при прохождении им разности потенциалов V_{ba} равно $\Delta U = qV_{ba}$. Разность потенциалов V_{ba} между точками b и a в однородном электрическом поле напряженностью **E** определяется формулой $V = -Ed$, где d – расстояние вдоль силовой линии поля между этими точками. В неоднородном электрическом поле **E** соответствующее выражение имеет вид $V_{ba} = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$; таким образом, зная **E**, всегда можно определить V_{ba}. Если значение V известно, то составляющие напряженности поля **E** можно найти, обращая приведенное соотношение: $E_x = -\partial V/\partial x$, $E_y = -\partial V/\partial y$, $E_z = -\partial V/\partial z$.

Эквипотенциальные линии или *поверхности* представляют собой геометрическое место точек одного потенциала; они всюду перпендикулярны силовым линиям поля.

Электрический потенциал уединенного точечного заряда Q относительно нулевого потенциала (на бесконечности) равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

Потенциал произвольного распределения зарядов можно определить, суммируя (интегрируя) потенциалы отдельных зарядов.

Вопросы

1. Электрон ускоряется разностью потенциалов, скажем, 100 В. Во сколько раз возрастет его конечная скорость, если разность потенциалов увеличить в 4 раза?

2. Можно ли зарядить пластмассовую расческу до потенциала 0,5 В?

3. Две точки имеют одинаковый потенциал. Значит ли это, что при перемещении пробного заряда из одной точки в другую не совершается работа? Верно ли, что для перемещения заряда не надо прикладывать силу?

4. Отрицательный заряд вначале покоится в электрическом поле. Куда он будет двигаться: в направлении более высокого или более низкого потенциала? А положительный заряд? Как меняется потенциальная энергия заряда в каждом случае?

5. Может ли частица перемещаться из области с более низким потенциалом в область с более высоким потенциалом так, чтобы при этом ее электростатическая потенциальная энергия уменьшалась? Объясните.

6. Определите четко различие между а) электрическим потенциалом и напряженностью электрического поля; б) электрическим потенциалом и электростатической потенциальной энергией.

7. Если в некоторой точке пространства $V = 0$, то обязательно ли в этой точке и $\mathbf{E} = 0$? Если в некоторой точке $\mathbf{E} = 0$, то всегда ли и $V = 0$ в этой точке? Проиллюстрируйте ответ примерами.

8. На практике мы часто принимаем потенциал земли за 0 В. А если бы мы считали его равным, скажем, -10 В, то как это повлияло бы на значения а) потенциала V; б) напряженности E в других точках? Влияет ли на выбор потенциала земли тот факт, что она обладает ненулевым электрическим зарядом?

9. Проведите на рис. 22.21, *б* несколько эквипотенциальных линий.

10. Могут ли эквипотенциальные линии пересекаться? Объясните.

11. Что можно сказать о напряженности электрического поля в области пространства с одним и тем же потенциалом?

12. Существует ли в области между двумя равными положительными зарядами точка, в которой напряженность электрического поля равна нулю? Точка с нулевым потенциалом? Объясните.

13. Если в некоторой точке потенциал равен нулю, то обязательно ли напряженность электрического поля здесь тоже равна нулю? Приведите пример.

14. Спутник движется вокруг Земли вдоль эквипотенциальной линии гравитационного поля. Какова форма его орбиты?

15. Предположим, что кольцо в примере 24.6 заряжено неравномерно: в верхней точке плотность заряда вдвое больше, чем в нижней. Повлияет ли это на потенциал в точке P, расположенной на оси (рис. 24.6)? Изменится ли значение напряженности поля $\mathbf{E}$ в этой точке? Нет ли здесь противоречия? Объясните.

16. Представьте себе продолговатый проводник, например слиток металла в форме мяча для регби. Полный заряд проводника равен Q. Где плотность заряда σ будет максимальна: на концах или с боков? Объясните. (Подсказка: у поверхности проводника $E = \sigma/\varepsilon_0$.)

17. Из двух одинаковых проводящих шаров один нейтрален, а другой обладает зарядом Q. Вначале шары изолированы друг от друга, а затем приводятся в соприкосновение. а) Что можно сказать о потенциале каждого из шаров, когда их соединили? б) Перейдет ли заряд с одного шара на другой? Если да, то в каком количестве? в) Как изменятся ответы, если радиусы шаров будут разными?

18. Почему напряженность электрического поля вблизи центра заряженного диска (пример 24.10) такая же, как и в случае заряженной плоскости (пример 22.8)?

19. В некоторой точке вектор напряженности поля направлен точно на север. В каких направлениях изменения потенциала будут а) максимальными; б) минимальными; в) равными нулю?

20. Зная потенциал V в некоторой точке пространства, можно ли рассчитать напряженность поля $\mathbf{E}$ в этой точке? Наоборот, можно ли рассчитать V, зная напряженность поля $\mathbf{E}$? Если нельзя, то что еще нужно знать в каждом случае?

21. Эквипотенциальные линии проведены с расстоянием 1 В. Говорит ли что-либо расстояние между линиями о напряженности электрического поля в различных областях? Что именно?

22. Если напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в некоторой области постоянна, что можно сказать о потенциале в этой области? Если потенциал V в некоторой области постоянен, то что можно сказать о напряженности электрического поля $\mathbf{E}$?

23. Положительна или отрицательна электростатическая потенциальная энергия двух разноименных зарядов? Двух одноименных зарядов? Какой смысл имеет знак потенциальной энергии в том и другом случае?

Задачи

Раздел 24.1

1. (I) Какую работу надо совершить по переносу заряда $-8{,}0$ мкКл от «земли» в точку с потенциалом $+600$ В?

2. (I) Ускоряемый электрическим полем электрон, перемещаясь от пластины A к пластине B, приобретает кинетическую энергию $6{,}4\cdot10^{-16}$ Дж. Какова разность потенциалов между пластинами? Какая из пластин имеет более высокий потенциал?

3. (II) Заряд, переносимый на Землю разрядом молнии при разности потенциалов $3{,}5\cdot10^{7}$ В, составляет 30 Кл. а) Сколько при этом выделяется энергии? б) Какое количество воды при 0 °С можно было бы довести до кипения?

4. (II) Работа, совершаемая внешней силой по переносу заряда $-2{,}0$ мкКл из точки a в точку b, равна $8{,}0\cdot10^{-4}$ Дж. Если заряд первоначально покоился, то в точке b он приобретает кинетическую энергию $1{,}0\cdot10^{-4}$ Дж. Чему равна разность потенциалов между a и b?

5. (II) Покажите аналитически, что электростатическая сила, описываемая законом Кулона, является консервативной.

Раздел 24.2

6. (I) Электрическое поле между двумя параллельными пластинами, подключенными к батарее с напряжением 45 В, имеет напряженность 1500 В/м. Каково расстояние между пластинами?

7. (I) Какую напряженность имеет электрическое поле между параллельными пластинами, находящимися друг от друга на расстоянии 5,0 мм, если разность потенциалов между ними составляет 110 В?

8. (II) В кинескопе телевизора электроны ускоряются в вакууме разностью потенциалов в несколько тысяч вольт. Если положить телевизор экраном вверх, смогут ли электроны двигаться против действия силы тяжести? Какую разность потенциалов надо приложить между пластинами, отстоящими друг от друга по вертикали на 20 см, чтобы действующая на электрон электростатическая сила скомпенсировала силу тяжести? Электрическое поле считайте однородным.

9. (II) Электрон ускоряется в кинескопе телевизора в горизонтальном направлении разностью потенциалов 20 000 В. Затем он проходит между двумя параллельными горизонтальными пластинами длиной 6,0 см, расстояние между которыми равно 1,0 см, а разность потенциалов 200 В (рис. 24.11). На какой угол θ отклонится электрон в результате прохождения пластин?

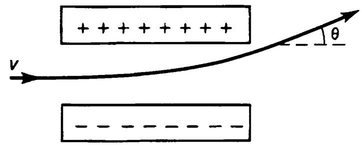

Рис. 24.11.

Раздел 24.3

10. (II) На каком расстоянии друг от друга будут находиться эквипотенциальные поверхности, проведенные через 1,0 В вблизи большой однородно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда 0,55 мКл/м^2?

Раздел 24.4

11. (I) Какая разность потенциалов необходима, чтобы сообщить ядру гелия ($Q = 3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл) кинетическую энергию 48 кэВ?

12. (I) Чему равна средняя кинетическая энергия (в электрон-вольтах) молекулы кислорода в воздухе при стандартных условиях (0 °С, 1 атм)?

13. (I) Чему равна скорость протона с кинетической энергией 20 МэВ?

Раздел 24.5

14. (I) а) Чему равен электрический потенциал на расстоянии $0{,}50\cdot10^{-10}$ м от протона (с зарядом $+e$)? б) Чему равна в этой точке потенциальная энергия электрона?

15. (II) Рассмотрим точку a на расстоянии 85 см к северу от точечного заряда -45 мКл и точку b на расстоянии 60 см к западу от этого заряда. Определите а) $V_{ba} = V_b - V_a$; б) величину и направление напряженности поля $\mathbf{E}_b - \mathbf{E}_a$.

16. (II) Заряд $+25$ мкКл находится на расстоянии 5,0 см от такого же заряда $+25$ мкКл. Какую работу должна совершить внешняя сила, чтобы переместить пробный заряд $+0{,}12$ мкКл из точки посредине между зарядами на 1,0 см ближе к одному из зарядов?

17. (II) Заряды $+3{,}0$ и $-2{,}0$ мкКл находятся на расстоянии 2,0 см друг от друга. В какой точке на соединяющей их прямой а) напряженность электрического поля равна нулю; б) потенциал равен нулю?

Раздел 24.6

18. (I) Электрон и протон находятся на расстоянии $0{,}53\cdot10^{-10}$ см друг от друга. а) Чему равен дипольный момент системы, когда оба заряда покоятся? б) Чему равен средний дипольный момент системы, когда электрон движется вокруг протона по круговой орбите?

19. (I) Рассчитайте электрический потенциал, создаваемый диполем с дипольным моментом $4{,}8 \cdot 10^{-30}$ Кл·м в точке, отстоящей на $1{,}0 \cdot 10^{-9}$ м, если эта точка а) находится на оси диполя ближе к положительному заряду; б) направление на точку составляет 45° с осью диполя в направлении положительного заряда; в) направление на точку составляет 45° с осью диполя в направлении отрицательного заряда.

20. (II) а) В примере 24.5, п. «б», рассчитайте электрический потенциал, не пользуясь формулой (24.6), т. е. не предполагая $r \gg l$. б) Какую ошибку в процентах дает в данном случае так называемое дипольное приближение?

21. (II) Один из типов *электрического квадруполя* представляет собой диполи, приставленные друг к другу отрицательными зарядами. Другими словами, по обе стороны от заряда $-2Q$ на расстоянии l находятся заряды $+Q$. а) Получите точную формулу для потенциала V на расстоянии r от центрального заряда вдоль линии, соединяющей три заряда (считайте, что $r > l$, но не $r \gg l$). б) Покажите, что при $r \gg l$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Ql^2}{r^3}.$$

Величина $(2Ql^2)$ называется *квадрупольным моментом*. Сравните зависимости от расстояния r потенциалов диполя и уединенного точечного заряда. в) Как будет зависеть от расстояния r потенциал электрического *октуполя*? Что может представлять собой электрический октуполь?

22. (II) Дипольный момент представляет собой вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному. Молекула воды (рис. 24.12) обладает дипольным моментом $\mathbf{p}$, равным векторной сумме двух дипольных моментов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. Расстояние от каждого атома H до атома O равно $0{,}96 \cdot 10^{-10}$ м; линии, соединяющие центр атома O с атомами H, образуют угол 104°, и по результатам измерений результирующий дипольный момент молекулы равен $p = 6{,}1 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. а) Определите заряд q, приходящийся на каждый атом H. б) Определите электрический потенциал, создаваемый каждым из диполей $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ вдали от молекулы, и покажите, что

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2},$$

где p – величина результирующего дипольного момента $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, а V – потенциал, обусловленный совместно $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$.

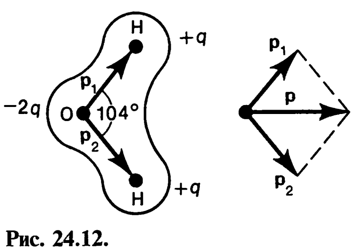

Рис. 24.12.

Раздел 24.7

23. (I) Нарисуйте продолговатый проводник в форме мяча для регби. Пусть этот проводник обладает отрицательным зарядом $-Q$. Изобразите десяток силовых и эквипотенциальных линий.

24. (II) Электрический потенциал очень большой плоской металлической пластины равен V_0; поверхностная плотность заряда постоянна и равна σ (Кл/м²). Определите V на расстоянии x от пластины. Точка x находится далеко от краев, и расстояние до пластины намного меньше ее размеров.

25. (II) Электрическое поле вблизи поверхности Земли направлено к поверхности и имеет напряженность 150 В/м. а) Чему равен потенциал Земли относительно потенциала на бесконечности, принятого за нуль? б) Если считать нулевым потенциал Земли, то чему равен потенциал на бесконечности? (Игнорируйте тот факт, что положительный заряд ионосферы примерно уравновешивает заряд Земли. Как этот факт повлиял бы на ответ?)

26. (II) Какой максимальный заряд может нести сферический проводник радиусом 5,0 см?

27. (II) Каким может быть минимальный радиус шара разрядника электростатического генератора, который можно зарядить до 30 000 В без возникновения разряда в воздухе? Каков заряд шара?

28. (II) Проводящая сфера радиусом 32 см заряжена до потенциала 500 В. а) Чему равна поверхностная плотность заряда σ? б) На каком расстоянии от сферы ее потенциал равен 10 В?

29. (II) Какой разностью потенциалов надо ускорить протон, чтобы его энергия оказалась достаточной для достижения поверхности ядра железа? Заряд ядра железа в 26 раз больше заряда протона $(=e)$, а его радиус равен $4{,}0 \cdot 10^{-15}$ м. Считайте ядро однородно заряженным шаром.

30. (II) Изолированный сферический проводник радиусом R_1 обладает зарядом Q. Вторая проводящая сфера радиусом R_2, вначале не заряженная, соединяется длинным проводом с первой. а) Что можно сказать о потенциалах обеих сфер после их соединения? б) Чему равен заряд, перешедший на вторую сферу? Считайте расстояние между сферами большим по сравнению с их радиусами. (Для чего нужно это предположение?)

31. (II) Предположим, что однородный слой электронов удерживается силой тяжести недалеко над поверхностью Земли. Какое максимальное число электронов может удерживаться таким образом? В расчете следует учитывать заряды и поля только самих электронов.

32. (II) Определите разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях R_a и R_b от очень длинного ($L \gg R_a$, R_b) прямолинейного заряженного проводника с линейной плотностью заряда λ.

33. (II) Очень длинный проводящий цилиндр длиной L и радиусом $R_0 (L \gg R_0)$ равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ (Кл/м^2). Электрический потенциал цилиндра V_0. Чему равен потенциал на расстоянии r от оси цилиндра в точках, удаленных от его концов при а) $r > R_0$; б) $r < R_0$. в) Будет ли $V = 0$ при $r = \infty$ (считая $L = \infty$)? Объясните.

34. (III) Полый сферический проводник с зарядом $+Q$ имеет внутренний радиус R_1 и внешний радиус $R_2 = 2R_1$. В центре сферы находится точечный заряд $+Q/2$. Определите зависимость потенциала от r – расстояния от центра – при а) $0 < r < R_1$; б) $R_1 < r < R_2$; в) $r > R_2$. г) Определите зависимость напряженности электрического поля E от r в указанных областях. д) Постройте графики $V(r)$ и $E(r)$ в области от $r = 0$ до $r = 2R_2$.

35. (III) В объеме непроводящего шара радиусом R равномерно распределен заряд Q. Определите зависимость электрического потенциала от расстояния r до центра шара при а) $r > R$; б) $r < R$. Положите $V = 0$ при $r = \infty$. в) Постройте графики $V(r)$ и $E(r)$. Сравните с примером 24.8.

36. (III) В непроводящем шаре радиусом R_2 имеется концентрическая сферическая полость радиусом R_1. По шару равномерно распределен электрический заряд с объемной плотностью ρ (Кл/м^3). Определить зависимость электрического потенциала (относительно $V = 0$ при $r = \infty$) от расстояния r до центра шара при а) $r > R_2$; б) $R_1 < r < R_2$; в) $r < R_1$. Сохраняется ли непрерывность V при $r = R_1$ и $r = R_2$?

37. (III) Решите задачу 35, считая, что плотность заряда ρ растет пропорционально квадрату расстояния от центра шара, где $\rho = 0$.

Раздел 24.8

38. (I) Чему равен градиент потенциала у поверхности ядра урана ($Q = +92e$), диаметр которого составляет примерно $15 \cdot 10^{-15}$ м?

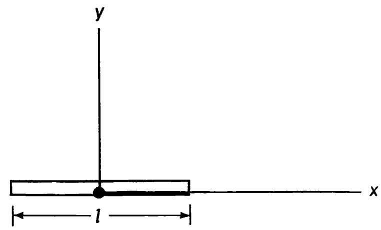

Рис. 24.13.

39. (I) Покажите, что напряженность электрического поля уединенного точечного заряда [уравнение (22.4)] следует из уравнения (24.5): $V = (1/4\pi\varepsilon_0)(Q/r)$.

40. (II) Электрический потенциал в некоторой области пространства определяется выражением $V = ay/(b^2 + y^2)$. Определите напряженность электрического поля **E**.

41. (II) В полярных координатах (см. приложение В) связь между **E** и V дается выражениями

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

а) Докажите, исходя из формулы (24.8), справедливость этих выражений. б) Определите составляющие напряженности поля E_r и E_θ электрического диполя (рис. 24.5) в любой точке пространства (r, θ), считая $r \gg l$.

42. (III) По тонкому короткому горизонтальному отрезку проволоки длиной l равномерно распределен заряд Q (рис. 24.13). Определите электрический потенциал а) на расстоянии y от середины отрезка; б) на расстоянии x от середины отрезка вдоль линии, являющейся его продолжением ($x > l/2$). Считайте $V = 0$ на бесконечности. в) Определите x- и y-компоненты напряженности поля **E** в точках $(0, y)$ и $(x, 0)$.

Раздел 24.9

43. (I) Определите электростатическую потенциальную энергию (в электрон-вольтах) двух протонов в ядре урана (^{235}U), если а) протоны находятся на поверхности ядра и диаметрально противоположны; б) один протон находится в центре ядра, а другой – на поверхности. Диаметр ядра урана равен примерно $15 \cdot 10^{-15}$ м.

44. (I) Запишите полную электростатическую энергию U для а) четырех точечных зарядов; б) пяти точечных зарядов.

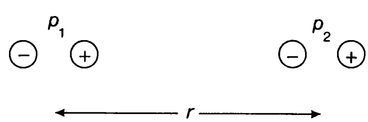

Рис. 24.14.

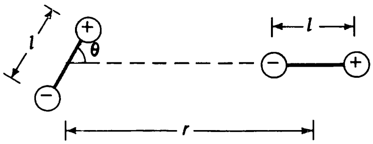

Рис. 24.15.

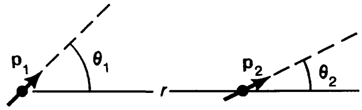

Рис. 24.16.

45. (I) Какую работу необходимо совершить по переводу трех электронов из бесконечности на расстояние $1{,}0 \cdot 10^{-10}$ м друг от друга?

46. (II) Покажите, что, когда два диполя с дипольными моментами p_1 и p_2 располагаются вдоль одной прямой (рис. 24.14), потенциальная энергия одного в присутствии другого (их энергия взаимодействия) равна

$$U = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p_1 p_2}{r^3},$$

где r – расстояние между диполями (r много больше размеров каждого из диполей).

47. (II) Два диполя сильнее всего взаимодействуют, когда они выстроены непосредственно в линию. Чтобы убедиться в этом, рассчитайте энергию взаимодействия двух диполей (рис. 24.15), а) когда они выстроены вдоль одной прямой ($\theta = 0°$); б) когда угол между их осями $\theta = 45°$; в) $\theta = 90°$; г) $\theta = 180°$. Считайте, что $|q| = 0{,}40e$, $l = 1{,}0$ Å, $r = 3{,}0$ Å.

48. (II) Четыре точечных заряда расположены в вершинах квадрата со стороной 8,0 см. Заряды равны (по часовой стрелке) Q, $2Q$, $-3Q$ и $2Q$, где $Q = 4{,}8$ мкКл. Чему равна полная электростатическая потенциальная энергия системы?

49. (II) Четыре равных точечных заряда Q расположены в вершинах квадрата со стороной b. а) Чему равна полная электростатическая потенциальная энергия системы? б) Какую потенциальную энергию будет иметь пятый заряд Q, помещенный в центре квадрата (относительно $V = 0$ на бесконечности)? в) В устойчивом или неустойчивом равновесии находится пятый заряд? Если в неустойчивом, то какую максимальную кинетическую энергию он может приобрести? г) Ответьте на вопрос «в» в случае, когда пятый заряд отрицателен ($-Q$).

50. (II) Решите задачу 49, заменив два заряда в противоположных вершинах по диагонали на отрицательные ($-Q$).

51. (II) В модели атома водорода Бора электрон вращается вокруг ядра (протона) по круговой орбите радиусом r. Определите r, зная, что энергия ионизации (т.е. энергия, необходимая для отрыва электрона) по результатам измерений равна 13,6 эВ.

52. (II) Определите полную электростатическую потенциальную энергию проводящей сферы радиусом R, по поверхности которой равномерно распределен заряд Q.

53. (III) Определите полную электростатическую потенциальную энергию непроводящего шара радиусом R, по объему которого равномерно распределен заряд Q.

54. (III) Покажите, что электростатическая потенциальная энергия двух диполей, расположенных в одной плоскости (рис. 24.16), определяется выражением

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_1 p_2}{r^3}[\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3\cos\theta_1 \cos\theta_2].$$

Считайте, что r намного больше размеров каждого из диполей. Векторы дипольных моментов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ направлены от отрицательного заряда к положительному.