25 Электрическая емкость, диэлектрики, накопление электрической энергии

Этой главой завершается изучение электростатики. Прежде всего речь пойдет о конденсаторах – важных устройствах, применяемых почти во всех электронных схемах. Мы обсудим также возможности накопления электрической энергии и влияние так называемых диэлектриков (непроводников) на электрические поля и разность потенциалов.

25.1. Конденсаторы

Конденсатор – это устройство для накопления электрического заряда; он состоит из двух проводников (обкладок), расположенных близко друг к другу, но не соприкасающихся. Типичный плоский конденсатор представляет собой пару параллельных пластин площадью A, разделенных небольшим промежутком d (рис. 25.1, *а*). Часто пластины, разделяют прокладкой из бумаги или другого диэлектрика (изолятора) и сворачивают в рулон (рис. 25.1, *б*).

Предположим, что конденсатор подключен к источнику напряжения, например к батарее (рис. 25.2). (Батарея – это устройство, на клеммах которого поддерживается

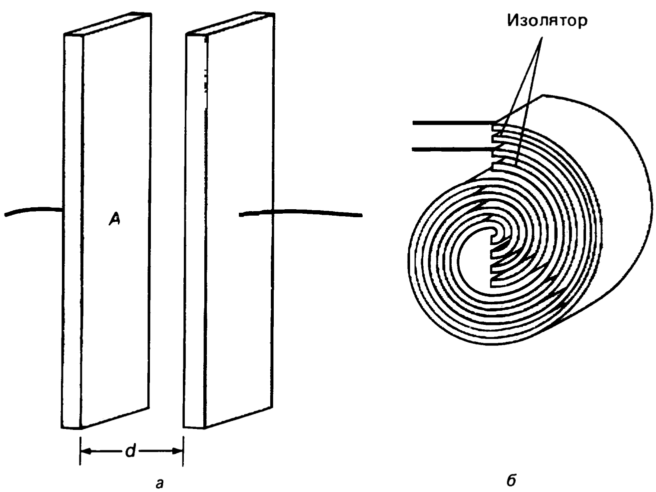


Рис. 25.1. Конденсаторы.

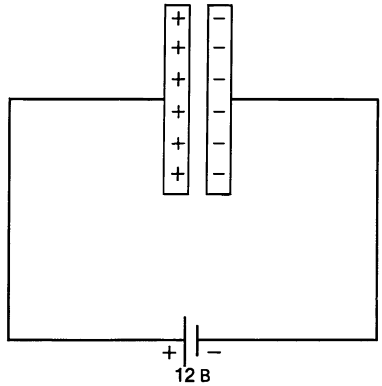


Рис. 25.2. Конденсатор с параллельными обкладками, соединенный с батареей.

относительно постоянная разность потенциалов.) Подсоединенный к батарее конденсатор быстро заряжается: одна его обкладка приобретает положительный заряд, другая – равный по величине отрицательный. Заряд, приобретаемый каждой из обкладок конденсатора, пропорционален разности потенциалов V_{ba}:

$$Q = CV_{ba}. \tag{25.1}$$

Коэффициент пропорциональности C называется **емкостью** конденсатора. Единица емкости, кулон на вольт, называется *фарад* (Ф). На практике чаще всего применяются конденсаторы емкостью от 1 пФ (пикофарад, 10^{-12}Ф) до 1 мкФ (микрофарад, 10^{-6} Ф). Формулу (25.1) впервые вывел Вольта (разд. 26.1) в конце XVIII в.

25.2. Определение емкости конденсатора

Емкость C служит характеристикой данного конденсатора. Величина емкости C зависит от размеров, формы и взаимного расположения обкладок, а также от вещества, заполняющего промежуток между обкладками. В этом разделе мы будем считать, что между обкладками находится вакуум или воздух.

Емкость конденсатора, согласно (25.1), можно определить экспериментально, непосредственно измерив заряд Q пластины при известной разности потенциалов V_{ba}.

Если геометрическая конфигурация конденсаторов достаточно проста, то можно определить емкость C аналитически. Для иллюстрации рассчитаем емкость C конденсатора с параллельными пластинами площадью A, находящимися на расстоянии d друг от друга (плоский конденсатор) (рис. 25.3). Будем считать, что величина d мала по сравнению с размерами пластин, так что электрическое поле **E** между пластинами однородно и искривлением силовых линий у краев пластин можно пренебречь. Ранее мы показали (пример 22.9), что напряженность электрического поля между близко расположенными параллельными пластинами равна $\mathbf{E} = \sigma/\varepsilon_0$, а силовые линии перпендикулярны пластинам. Поскольку плотность заряда равна $\sigma = Q/A$, то

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

Согласно (24.4), напряженность электрического поля связана с разностью потенциалов соотношением

$$V_{ba} = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}.$$

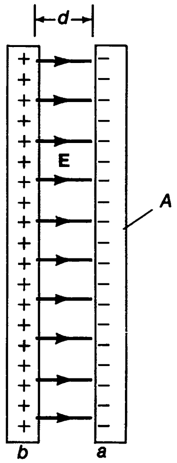


Рис. 25.3. Конденсатор с параллельными обкладками площадью A.

Мы можем взять интеграл от одной пластины до другой вдоль траектории, направленной навстречу силовым линиям:

$$V_{ba} = +\int_a^b E dl = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\int_a^b dl = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}.$$

Установив связь между Q и V_{ba}, выразим теперь емкость C через геометрические параметры:

$$C = \frac{Q}{V_{ba}} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{[плоский конденсатор].} \qquad (25.2)$$

Справедливость полученного вывода очевидна: чем больше площадь A, тем «свободнее» разместятся на ней заряды, отталкивание между ними будет меньше и каждая пластина сможет удерживать больший заряд. Чем больше расстояние d между пластинами, тем слабее заряды на одной пластине будут притягивать заряды на другой: на пластины от батареи поступает меньше заряда и емкость оказывается меньше.

Обратим также внимание на то, что, согласно (25.2), C не зависит от Q или V и, как и следует из опыта, величина Q пропорциональна V.

Пример 25.1. а) Рассчитайте емкость плоского конденсатора, пластины которого имеют размеры 20 × 3,0 см и разделены воздушным промежутком 1,0 мм. б) Чему равен заряд каждой пластины, когда конденсатор подключен к клеммам батареи с напряжением 12 В?

Решение. а) Площадь $A = (20\cdot 10^{-2}\ \text{м}) \times (3{,}0\cdot 10^{-2}\ \text{м}) = 6{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{м}^2$. Емкость конденсатора равна

$$C = (8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2) \times \frac{(6{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{м}^2)}{(1{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{м})} = 53\ \text{пФ}.$$

б) Заряд каждой пластины равен

$$Q = CV = (53\cdot 10^{-12}\ \text{Ф})(12\ \text{В}) = 6{,}4\cdot 10^{-10}\ \text{Кл}.$$

Формула (25.2), согласно которой $C \sim A/d$, справедлива и для конденсатора с пластинами, свернутыми в рулон (рис. 25.1, *б*). Однако, если между обкладками, как обычно, находится изолятор, коэффициент ε_0 следует изменить. Этот вопрос мы обсудим в разд. 25.5. Для конденсатора, состоящего из двух длинных коаксиальных цилиндров, результат будет несколько иным, как показывает следующий пример.

Пример 25.2. Цилиндрический конденсатор представляет собой цилиндр (или провод) радиусом R_1, окруженный коаксиальным цилиндром (или оболочкой) с внутренним радиусом R_2 (рис. 25.4, *а*). Будем считать, что длина обоих цилиндров L намного больше зазора между цилиндрами $R_2 - R_1$. Конденсатор заряжен (например, подключен к батарее), и одна его обкладка имеет заряд $+Q$, а другая $-Q$. Выведите формулу для емкости конденсатора.

Решение. Нам необходимо выразить разность потенциалов между обкладками V_{ba} через заряд Q. Мы вполне могли бы воспользоваться полученным ранее результатом (пример 22.7), согласно которому электрическое поле длинного проводника направлено радиально наружу и имеет напряженность $E = (1/2\pi\varepsilon_0)(\lambda/r)$, где r – расстояние от оси, а λ – заряд, приходящийся на единицу длины проводника: Q/L. Далее легко было бы догадаться, что напряженность электрического поля между цилиндрами равна $E = (1/2\pi\varepsilon_0)(Q/Lr)$. Но давайте начнем с нуля и честно рассчитаем напряженность электрического поля, пользуясь теоремой Гаусса. Будем считать, что цилиндры заряжены равномерно и поэтому напряженность электрического поля зависит только от расстояния r от оси цилиндра. В силу симметрии вектор напряженности будет перпендикулярен оси (рис. 25.4, *б*). (Поскольку $R_2 - R_1 \ll L$, мы можем пренебречь искривлением силовых линий у торцов цилиндров.) Проведем воображаемую цилиндрическую поверхность радиусом r ($R_1 < r < R_2$), коаксиальную с цилиндрическими обкладками (штриховая линия на рис. 25.4, *б*). Это поверхность интегрирования. Поток напряженности электрического поля сквозь торцы отсутствует, так что весь поток направлен через боковую поверхность цилиндра, площадь которой равна $(2\pi r)(L)$. Поскольку напряженность электрического поля E на этой поверхности постоянна, теорема Гаусса дает

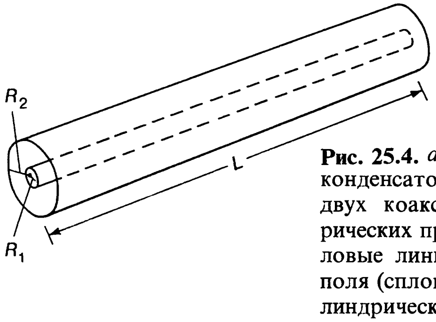
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = Q/\varepsilon_0,$$

$$E(2\pi rL) = Q/\varepsilon_0,$$

поскольку поверхность охватывает весь заряд Q на внутренней обкладке. Тогда

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{Q}{r} \quad [R_1 < r < R_2],$$

что подтверждает полученный ранее результат. Чтобы выразить V_{ba} через Q, подставим его в (24.4) и вычислим интеграл вдоль радиуса в пределах от внеш-



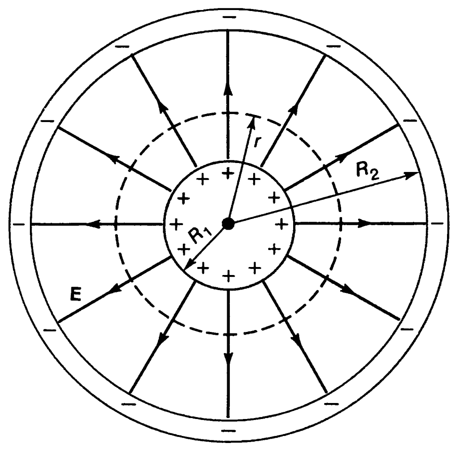


Рис. 25.4. *а* – цилиндрический конденсатор, состоящий из двух коаксиальных цилиндрических проводников; *б* – силовые линии электрического поля (сплошные линии) и цилиндрическая поверхность интегрирования (штриховая кривая) в поперечном сечении конденсатора.

него цилиндра до внутреннего:

$$V_{ba} = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} =$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{R_2}{R_1},$$

где, поскольку мы движемся «вовнутрь», $d\mathbf{l} = -d\mathbf{r}$ и направление вектора $\mathbf{E}$ противоположно $d\mathbf{l}$. И величины Q и V_{ba} оказываются взаимно пропорциональными, а емкость C равна

$$C = \frac{Q}{V_{ba}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} \quad \begin{bmatrix}\text{цилиндрический}\\ \text{конденсатор}\end{bmatrix}.$$

Подтверждается ли полученная формула, т. е. зависимость C от L, R_1 и R_2 общими соображениями? [См. замечания после формулы (25.2).]

Уединенный проводник также обладает емкостью C. В этом случае C определяется как отношение заряда к абсолютному потенциалу проводника (по отношению к $V = 0$ при $r = \infty$), и равенство

$$Q = CV$$

остается справедливым. Например, потенциал проводящей сферы радиусом r_0 (пример 24.8) с зарядом Q равен

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0},$$

а ее емкость равна

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 r_0 .$$

Заметим, однако, что уединенный проводник не может служить конденсатором. На практике вблизи него могут находиться другие проводники или земля, которые представляют собой вторую «обкладку» конденсатора, и емкость будет зависеть от взаимного расположения этих тел.

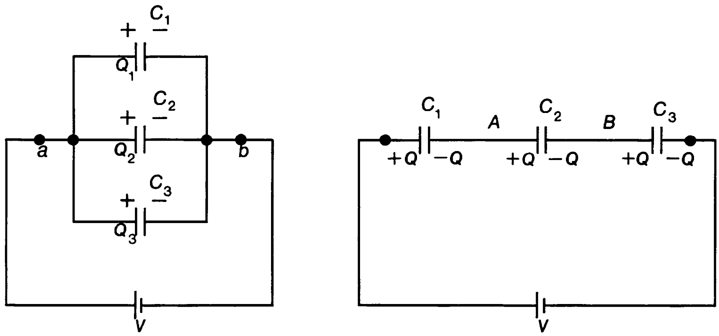
Пример 25.3. *Электрометр.* Покажите, что простейший электроскоп с подвижными листочками (электрометр) (разд. 22.4) измеряет потенциал, а не заряд других тел. (Все потенциалы и емкости следует рассматривать относительно земли.)

Решение. Как мы видели в разд. 22.4, отклонение листочков служит мерой заряда электроскопа. Поскольку $Q = CV$, отклонение листочков можно откалибровать также в единицах потенциала V электроскопа. (Ни та ни другая шкала не будет линейной; не будут они и совпадать между собой, так как емкость электроскопа C_e зависит, пусть и незначительно, от расстояния между листочками.) Если мы хотим воспользоваться электроскопом для определения «электрического состояния» какого-либо тела, то следует иметь в виду, что после соединения тела с электроскопом оба приобретут один и тот же потенциал (скажем, по отношению к земле). После соединения часть заряда тела перейдет на первоначально незаряженный электроскоп. Если этот перешедший на электроскоп заряд не составляет ничтожно малой доли исходного заряда тела, то собственный потенциал тела (и, разумеется, его заряд) изменится; другими словами, процесс измерения заметно повлияет на систему и изменит измеряемую величину. Это влияние можно уменьшить, потребовав, чтобы емкость электроскопа C_e была много меньше емкости C заряженного тела: коль скоро их потенциал V одинаков, то $Q = CV$ и $Q_e = C_e V$ и тогда $Q_e \ll Q$ при условии, что $C_e \ll C$. Отсюда следует, что потенциал тела при соединении с электроскопом изменится незначительно. Заряд Q_e, переходящий на электроскоп, и, следовательно, отклонение листочков будут зависеть только от потенциала V (поскольку $Q_e = C_eV$) при условии, что тело находится достаточно далеко (а соединительный проводник достаточно тонок и его зарядом можно пренебречь) и не оказывает дополнительного влияния на электроскоп (например, индуцируя заряд). Таким образом, электроскоп можно проградуировать в значениях потенциала V. Но откалибровать его для измерения заряда различных тел *не удастся*. Чтобы пояснить это рассмотрим другое тело с тем же самым потенциалом V, но емкостью, вдвое большей: $C' = 2C$. Отклонение листочков электроскопа будет прежним: оно определяется равенством $Q_e = C_eV$, а значение V не изменилось. В то же время заряд второго тела равен $Q' = C'V = 2CV = 2Q$, т. е. вдвое больше заряда первого. Электроскоп же дает одинаковые показания для зарядов обоих тел (Q и $2Q$) и, очевидно, не пригоден для измерения заряда различных тел. Есть, впрочем, одно исключение: если измерение проводится всегда на одном и том же теле (или тела всегда имеют одну и ту же емкость), то для такой системы электроскоп можно проградуировать и в единицах заряда. Но столь серьезное ограничение не позволяет нам утверждать, будто электроскоп вообще годится для измерения заряда.

Этот пример с, казалось бы, простым устройством должен служить предостережением относительно использования измерительных устройств. Всегда надо тщательно проанализировать: 1) что именно измеряет прибор и с какой погрешностью и 2) насколько введение измерительного прибора влияет на систему, над которой проводится измерение. (С подобными примерами мы столкнемся при рассмотрении вольтметров и амперметров в разд. 27.6 и 27.7.)

25.3. Последовательное и параллельное соединения конденсаторов

Конденсаторы можно соединять различными способами. На практике это используют очень часто, и емкость комбинации конденсаторов зависит от того, как они соединены. Два основных способа соединения – параллельное и последовательное (рис. 25.5). (На принципиальных схемах конденсатор обозначается символом ⊣⊢, источник напряжения (батарея) – символом ⊣|⊢ .) Рассмотрим сначала параллельное соединение (рис. 25.5, *а*). Если батарея с напряжением V подключена к точкам *a* и *b*, то это напряжение будет приложено к каждому из кон-



а $C = C_1 + C_2 + C_3$

б $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

Рис. 25.5. Параллельное (*а*) и последовательное (*б*) соединения конденсатора.

денсаторов: поскольку левые пластины всех конденсаторов соединены между собой проводником, они имеют одинаковый потенциал; то же самое можно сказать и о правых пластинах. Тогда заряд на пластинах каждого из конденсаторов будет равен соответственно $Q_1 = C_1 V$, $Q_2 = C_2 V$, $Q_3 = C_3 V$. Полный заряд, отбираемый от батареи, составит

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 V + C_2 V + C_3 V.$$

Емкость эквивалентного конденсатора, который в состоянии накопить заряд Q при том же напряжении V, дается соотношением

$$Q = CV = C_1 V + C_2 V + C_3 V,$$

т. е.

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \quad \left[\begin{array}{l}\text{параллельное соединение}\\ \text{конденсаторов}\end{array}\right]. \tag{25.3}$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов результирующая емкость возрастает (и равна сумме емкостей отдельных конденсаторов). Этого и следовало ожидать: ведь происходит увеличение площади пластин, на которых накапливается заряд [см., например, (25.2)].

Если конденсаторы соединены последовательно (рис. 25.5, *б*), заряд $+Q$ переходит от батареи на пластину (левую) C_1, а заряд $-Q$ – на пластину (правую) C_3. Участки A и B между конденсаторами были вначале электрически нейтральными; поэтому результирующий заряд по-прежнему должен быть равен нулю. Заряд $+Q$ на левой пластине C_1 вызывает появление заряда $-Q$ на противоположной пластине, а поскольку в целом заряд участка A равен нулю, на левой пластине C_2 должен появиться заряд $+Q$. Аналогичные соображения применимы и к остальным конденсаторам; в результате оказывается, что на каждом конденсаторе имеется один и тот же заряд Q. Конденсатор, которым можно заменить все последовательно соединенные конденсаторы, должен иметь емкость C такую, чтобы выполнялось равенство

$$Q = CV.$$

Полное напряжение V на концах цепочки последовательно соединенных конденсаторов равно сумме напряжений на каждом конденсаторе:

$$V = V_1 + V_2 + V_3.$$

Мы знаем, кроме того, что $Q = C_1 V_1$, $Q = C_2 V_2$ и $Q = C_3 V_3$; подставляя V_1, V_2 и V_3 в последнее равенство, получим

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3},$$

или

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{последовательное соединение}\\ \text{конденсаторов}\end{array}\right]. \tag{25.4}$$

Остальные соединения можно рассматривать как комбинации параллельных и последовательных соединений.

Пример 25.4. Определите емкость конденсатора, эквивалентного цепи на рис. 25.6. (Пусть $C_1 = C_2 = C_3 = C$.)

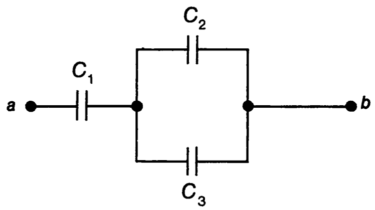


Рис. 25.6. К примеру 25.4.

Решение. Конденсаторы C_2 и C_3 соединены параллельно и поэтому эквивалентны конденсатору емкостью

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 2C.$$

C_{23} и C_1 соединены последовательно, и эквивалентная им емкость C_e определяется из равенства

$$\frac{1}{C_e}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_{23}}=\frac{1}{C}+\frac{1}{2C}=\frac{3}{2C}.$$

Отсюда $C_e = {}^2/_3C$ – это и есть эквивалентная емкость всей цепи.

25.4. Накопление электрической энергии

В заряженном конденсаторе накоплена (аккумулирована) электрическая энергия. Эта энергия конденсатора равна работе, необходимой для зарядки конденсатора. Процесс зарядки конденсатора состоит, по сути, в том, что заряд с одной пластины переносится на другую. Именно это совершает источник напряжения, когда его подключают к конденсатору. Сначала, когда конденсатор не заряжен, для переноса первой порции заряда не требуется работы. Но когда на каждой из пластин уже имеется заряд, для пополнения его приходится совершать работу против сил электрического отталкивания. Чем больше накопленный пластинами заряд, тем бóльшую работу, необходимо совершить для его увеличения. Если на пластинах существует разность потенциалов V, работа по переносу элемента заряда dq равна $dW = Vdq$. Поскольку $V = q/C$ [см. (25.1)], где C – емкость, работа по заряду конденсатора составит

$$W=\int_0^Q Vdq=\frac{1}{C}\int_0^Q qdq=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

Итак, мы можем сказать, что энергия, запасенная, или аккумулированная, конденсатором, равна

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C},$$

если заряды обкладок конденсатора емкостью C равны соответственно $+Q$ и $-Q$. А так как $Q = CV$, где V – разность потенциалов между обкладками, мы можем написать

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV. \tag{25.5}$$

Пример 25.5. Конденсатор емкостью 20 мкФ подключен к батарее напряжением 12 В. Какую энергию может запасти конденсатор?

Решение. Согласно (25.5),

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(20\cdot 10^{-6}\ \text{Ф})(12\ \text{В})^2 = 1{,}4\cdot 10^{-3}\ \text{Дж}.$$

Энергия не является «вещественной субстанцией», поэтому она вовсе не должна быть где-то сосредоточена. Тем не менее принято считать, что она запасена электрическим полем между пластинами. Для примера выразим энергию плоского конденсатора через напряженность электрического поля.

Мы показали [см. (24.3)], что между параллельными пластинами существует приблизительно однородное электрическое поле **E** и его напряженность связана с разностью потенциалов соотношением $V = Ed$, где d – расстояние между пластинами. Кроме того, согласно (25.2), емкость плоского конденсатора равна $C = \varepsilon_0 A/d$. Тогда

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)\left(E^2 d^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Ad.$$

Произведение Ad характеризует объем, занимаемый электрическим полем E. Разделив обе части формулы на объем, получим выражение для энергии, запасенной в единице объема, или **плотности энергии** u:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2. \tag{25.6}$$

Плотность электростатической энергии, запасенной в любой части пространства, пропорциональна квадрату напряженности электрического поля в этой области. Выражение (25.6) получено для частного случая плоского конденсатора. Можно показать, однако, что оно справедливо для любой области пространства, в которой существует электрическое поле.

25.5. Диэлектрики

В большинстве конденсаторов между пластинами проложен изолирующий материал (**диэлектрик**), например бумага или пластмассовая пленка. Этим достигается сразу несколько целей. Во-первых, диэлектрики лучше противостоят электрическому пробою, чем воздух, и к конденсатору можно приложить более высокое напряжение без утечки заряда через зазор между обкладками. Во-вторых,

Таблица 25.1. Диэлектрическая проницаемость (при 20 °С)

Вещество	K
Вакуум	1,0000
Воздух (1 атм)	1,0006
Парафин	2,2
Эбонит	2,8
Пластик (поливинильный)	2,8–4,5
Бумага	3–7
Кварц	4,3
Стекло	4–7
Фарфор	6–8
Слюда	7
Этиловый спирт	24
Вода	80

при наличии прокладки из диэлектрика пластины можно расположить ближе друг к другу без опасения, что они могут соприкасаться[1]. Наконец, экспериментально обнаружено, что при заполнении пространства между пластинами диэлектриком его емкость увеличивается в K раз, т. е.

$$C = KC_0, \tag{25.7}$$

где C_0 – емкость, отвечающая вакууму между обкладками, а C – емкость в случае, когда пространство между пластинами заполнено диэлектриком. Множитель K называют **относительной диэлектрической проницаемостью**; значения K для ряда диэлектриков приведены в табл. 25.1. Обратите внимание на то, что для воздуха при давлении 1 атм $K = 1{,}0006$, и поэтому емкость конденсатора с воздушным зазором очень мало отличается от емкости этого конденсатора в вакууме.

Для плоского конденсатора

$$C = K\varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{[плоский конденсатор]} \tag{25.8}$$

[см. (25.2)], когда пространство между пластинами целиком заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью K. (Случай, когда диэлектрик заполняет лишь часть пространства между пластинами, рассматривается ниже – см. пример 25.6.) Величина $K\varepsilon_0$ так часто встречается в формулах, что нередко вводят величину

$$\varepsilon = K\varepsilon_0, \tag{25.9}$$

которую называют *абсолютной диэлектрической проницаемостью*. Тогда емкость плоского конденсатора прини-

---

[1] Как мы видели в примере 25.1, емкость простого плоского конденсатора обычных размеров составляет всего несколько пикофарад. Чтобы получить емкость 1 мкФ без использования диэлектрика, потребовались бы пластины гигантских размеров.

мает вид

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}.$$

Напомним, что ε_0 – это электрическая постоянная. Плотность энергии, запасенной электрическим полем E (разд. 25.4), определяется выражением [ср. (25.6)]

$$u = \frac{1}{2} K\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2.$$

Влияние диэлектрика на емкость впервые всесторонне исследовал Фарадей. Он обнаружил, что, когда пространство между пластинами конденсатора заполнено диэлектриком, на пластинах при том же напряжении накапливается несколько больший заряд, нежели когда между пластинами воздух. Иначе говоря, если заряд на каждой пластине конденсатора с воздушным промежутком равен Q_0, то после введения диэлектрика и подключения конденсатора к батарее с прежним напряжением V_0 заряд каждой из пластин увеличится до

$$Q = KQ_0 \quad \text{[при постоянном напряжении]}.$$

Это соответствует формуле (25.7), поскольку после введения диэлектрика емкость равна

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{KQ_0}{V_0} = KC_0,$$

где $C_0 = Q_0/V_0$ – емкость в отсутствие диэлектрика.

Рассмотрим теперь несколько иной случай (выше мы, вводя диэлектрик, поддерживали напряжение постоянным). Пусть пластины конденсатора, подключенного к батарее с напряжением V_0, приобретают заряд

$$Q_0 = CV_0.$$

Прежде чем ввести диэлектрик, отключим конденсатор от батареи. После введения диэлектрика (который заполняет все пространство между пластинами) заряд Q_0 на каждой из пластин не изменится. В этом случае мы обнаружим, что разность потенциалов между пластинами уменьшится в K раз:

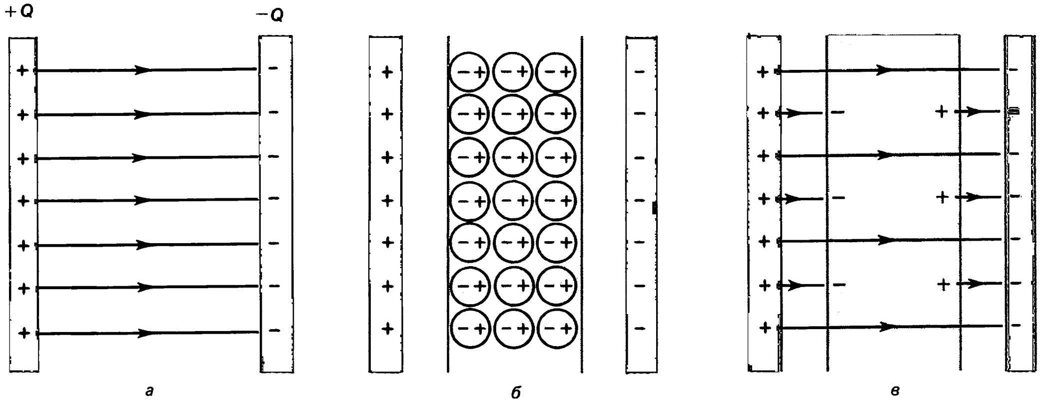
$$V = \frac{V_0}{K}.$$

Емкость же вновь будет равна

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0/K} = K\frac{Q_0}{V_0} = KC_0.$$

Оба этих результата согласуются с выражением (25.7).

Электрическое поле внутри диэлектрика также изменяется. При отсутствии диэлектрика между пластинами напряженность электрического поля между обкладками



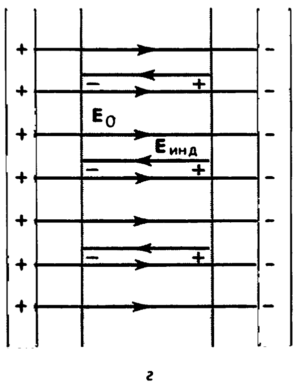


Рис. 25.7. Молекулярные представления о свойствах диэлектрика.

плоского конденсатора определяется формулой (24.3):

$$E_0 = \frac{V_0}{d},$$

где V_0 – разность потенциалов между пластинами, а d – расстояние между ними. Если конденсатор изолирован, так что заряд на пластинах после введения диэлектрика не изменяется, то разность потенциалов упадет до значения $V = V_0/K$. Напряженность электрического поля в диэлектрике теперь будет равна

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{Kd},$$

или

$$E = \frac{E_0}{K} \quad \text{[в диэлектрике]}. \tag{25.10}$$

Таким образом, напряженность электрического поля внутри диэлектрика также ослабляется в K раз. Электрическое поле внутри диэлектрика (изолятора) ослабляется, но не до нуля, как в случае проводника.

Происходящее в диэлектрике можно объяснить с молекулярной точки зрения. Рассмотрим конденсатор, обкладки которого разделены воздушным промежутком. На одной обкладке имеется заряд $+Q$, на другой заряд $-Q$ (рис. 25.7, *а*). Конденсатор изолирован (не подключен к батарее). Разность потенциалов между пластинами V_0 определяется выражением (25.1): $Q = C_0 V_0$. (Индекс 0 соответствует воздуху между пластинами.) Введем теперь между пластинами диэлектрик (рис. 25.7, *б*). Молекулы диэлектрика могут быть *полярными* – иначе говоря, они могут обладать постоянным дипольным моментом, будучи нейтральными. В электрическом поле возникнет вращательный момент, который будет стремиться развернуть диполи параллельно полю (рис. 25.7, *б*); тепловое движение препятствует идеальной ориентации всех молекул, однако, чем сильнее поле, тем выше будет степень выстроенности молекул. Даже если молекулы не полярны, в электрическом поле между обкладками у них произойдет разделение заряда, и молекулы приобретут *индуцированный (наведенный) дипольный момент*: электроны, не отрываясь от молекулы, сместятся в сторону положительной обкладки. Поэтому картина всегда будет такой, как показано на рис. 25.7, *б*. В конечном итоге все выглядит так, как если бы на обращенной к положительной обкладке внешней стороне диэлектрика имелся результирующий отрицательный заряд, а на противоположной – положительный (рис. 25.7, *в*). Из-за появления на диэлектрике этого индуцированного заряда часть электрических силовых линий не пройдет сквозь диэлектрик, а будет заканчиваться (или начинаться) на зарядах, наведенных на его поверхности. Соответственно напряженность электрического поля внутри диэлектрика окажется меньше, чем в воздухе.

Можно представить себе эту картину и по-иному (рис. 25.7, *г*). Напряженность электрического поля внутри диэлектрика представляет собой векторную сумму напряженности поля $\mathbf{E}_0$, создаваемого «свободными» зарядами на обкладках, и напряженности поля $\mathbf{E}_{\text{инд}}$, создаваемого зарядами, индуцированными в диэлектрике; поскольку эти поля направлены в противоположные стороны, результирующая напряженность электрического поля внутри диэлектрика $E_0 - E_{\text{инд}}$ будет меньше E_0. Точное соотношение дается формулой (25.10):

$$E_0 - E_{\text{инд}} = \frac{E_0}{K},$$

или

$$E_{\text{инд}} = E_0\left(1 - \frac{1}{K}\right).$$

[Из соображений симметрии ясно, что, если размеры пластин велики по сравнению с расстоянием между ними, заряд, индуцированный на поверхности диэлектрика, не зависит от того, заполняет ли диэлектрик все пространство между пластинами или нет, если только его поверхности параллельны обкладкам. Формула (25.10) справедлива и в этом случае, хотя равенство $V = V_0/K$ уже не верно (почему?).]

Электрическое поле между двумя параллельными пластинами связано с поверхностной плотностью заряда σ выражением $E = \sigma/\varepsilon_0$ (разд. 23.3). Таким образом,

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где $\sigma = Q/A$ – поверхностная плотность заряда на обкладке, а Q – полный заряд проводника, называемый часто *свободным зарядом* (поскольку в проводнике заряды могут свободно перемещаться). Аналогично мы определим поверхностную плотность индуцированного заряда $\sigma_{\text{инд}}$ и

$$E_{\text{инд}} = \frac{\sigma_{\text{инд}}}{\varepsilon_0},$$

где $E_{\text{инд}}$ – напряженность электрического поля, создаваемого индуцированным зарядом $Q_{\text{инд}} = \sigma_{\text{инд}} A$ на поверхности диэлектрика (рис. 25.7, *г*); $Q_{\text{инд}}$ называют обычно *связанным зарядом* (так как в диэлектрике (изоляторе) заряды не могут свободно перемещаться). Поскольку, как показано выше, $E_{\text{инд}} = E_0(1 - 1/K)$, получаем

$$\sigma_{\text{инд}} = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \tag{25.11а}$$

и

$$Q_{\text{инд}} = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right). \tag{25.11б}$$

Так как K больше 1, индуцированный на диэлектрике заряд всегда меньше заряда на обкладках конденсатора.

Пример 25.6. Площадь обкладок плоского конденсатора равна $A = 250$ см^2; расстояние между ними $d = 2{,}00$ мм. Конденсатор заряжается от батареи с напряжением $V_0 = 150$ В. Затем его отключают от батареи (заряд Q на обкладках при этом не меняется) и между обкладками вводят диэлектрическую пластину ($K = 3{,}50$) такой же площади A и толщиной $l = 1{,}00$ мм (рис. 25.8). Определите а) начальную емкость конденсатора с воздушным зазором; б) заряд на каждой обкладке до введения диэлектрика; в) заряд, индуцированный на каждой поверхности диэлектрической пластины; г) напряженность электрического поля между каждой обкладкой конденсатора и поверхностью диэлектрика; д) напряженность электрического поля в диэлектрике; е) разность потенциалов между обкладками после введения диэлектрика; ж) емкость конденсатора с диэлектриком.

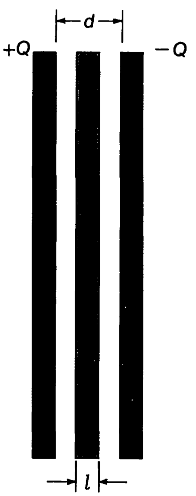


Рис. 25.8. К примеру 25.6.

Решение. а) До введения диэлектрика

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = (8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2) \times$$
$$\times \frac{(2{,}50 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^2)}{(2{,}00 \cdot 10^{-3}\ \text{м})} = 111\ \text{пФ}.$$

б) Заряд каждой обкладки равен

$$Q = C_0 V_0 = (1{,}11 \cdot 10^{-10}\ \text{Ф})(150\ \text{В}) =$$
$$= 1{,}66 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл}.$$

в) По формуле (25.11б)

$$Q_{\text{инд}} = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = (1{,}66 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл}) \times$$
$$\times \left(1 - \frac{1}{3{,}5}\right) = 1{,}19 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл}.$$

г) В зазорах между обкладками и диэлектриком (рис. 25.7, *в*) напряженность электрического поля будет такая же, как в случае отсутствия диэлектрика, так как заряд на обкладках не изменился. Мы могли бы воспользоваться теоремой Гаусса, как в примере 23.5, и получить $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$; или же заметим, что в отсутствие диэлектрика $E_0 = V_0/d = Q/C_0 d$ (так как $V_0 = Q/C_0$), или $E_0 = Q/\varepsilon_0 A$ (так как $C_0 = \varepsilon_0 A/d$), т.е. то же самое; таким образом,

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{1{,}66\cdot 10^{-8}\ \text{Кл}}{(8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{Кл/Н}\cdot\text{м}^2)(2{,}50\cdot 10^{-2}\ \text{м}^2)} = 7{,}50\cdot 10^4\ \text{В/м}.$$

д) Напряженность электрического поля в диэлектрике равна

$$E_d = \frac{E_0}{K} = \frac{7{,}50\cdot 10^4\ \text{В/м}}{3{,}50} = 2{,}14\cdot 10^4\ \text{В/м}.$$

е) Чтобы определить разность потенциалов после введения диэлектрика, воспользуемся формулой (24.4) и проинтегрируем вдоль силовых линий:

$$V = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = E(d-l) + E_d l,$$

или после упрощения

$$V = E_0\left(d - l + \frac{l}{K}\right) = (7{,}50\cdot 10^4\ \text{В/м})(1{,}00\cdot 10^{-3}\ \text{м} + 1{,}00\cdot 10^{-3}\ \text{м}/3{,}50) = 96{,}4\ \text{В}.$$

ж) При наличии диэлектрика

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1{,}66\cdot 10^{-8}\ \text{Кл}}{96{,}4\ \text{В}} = 172\ \text{пФ}.$$

Заметим, что если бы диэлектрик заполнял все пространство между обкладками, то ответами на вопросы «е» и «ж» были бы соответственно 42,9 В и 387 пФ.

Пример 25.7. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью K заполняет пространство между обкладками плоского конденсатора. Площадь каждой обкладки равна A, расстояние между ними – d. Конденсатор заряжен до разности потенциалов V и затем отключен от батареи (так что заряд на обкладках не меняется). Затем диэлектрик медленно удаляют из конденсатора. Какую работу надо при этом совершить? Объясните, почему для этого требуется работа.

Решение. Энергия, запасенная конденсатором, равна [см. (25.5)]

$$U_1 = \frac{1}{2}CV^2,$$

где $C = K\varepsilon_0 A/d$. После того как диэлектрик удален, емкость уменьшится в K раз, а напряжение на пластинах увеличится в K раз. Следовательно,

$$U_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{K}\right)\left(KV\right)^2 = K\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = KU_1.$$

Таким образом, запасенная конденсатором энергия увеличится в K раз. Для увеличения энергии необходимо совершить работу по удалению диэлектрика, величина которой (без учета трения) равна

$$W = U_2 - U_1 = \frac{1}{2}CV^2(K-1).$$

То, что для удаления диэлектрика нужно совершить работу, ясно из общих соображений: между индуцированным на диэлектрике зарядом и зарядом пластин (рис. 25.7, *в*) действует притяжение, против силы которого и совершается внешняя работа, когда диэлектрик удаляется из конденсатора.

*25.6. Теорема Гаусса для диэлектриков

Обсудим применение теоремы Гаусса при наличии диэлектрика. Рассмотрим плоский конденсатор, пространство между обкладками которого заполнено диэлектриком (рис. 25.9). Размеры обкладок (площадью A) будем считать большими по сравнению с расстоянием l между

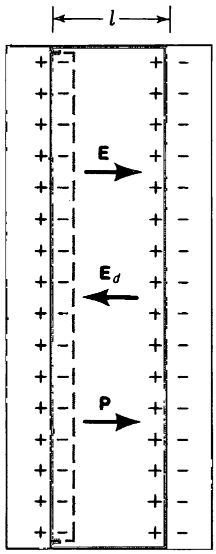


Рис. 25.9. Теорема Гаусса в диэлектрике.

ними, так что электрическое поле **E** однородно и перпендикулярно обкладкам. В качестве поверхности интегрирования выберем длинный прямоугольный «ящик» (изображен на рисунке штриховой линией), включающий небольшой участок диэлектрика. Поверхность интегрирования охватывает как свободный заряд Q на обкладке, так и индуцированный (связанный) заряд $Q_{\text{инд}}$ на диэлектрике, и, следовательно,

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q - Q_{\text{инд}}}{\varepsilon_0}. \tag{25.12}$$

Поскольку в силу (25.11б) $Q_{\text{инд}} = Q(1 - 1/K)$, то $Q - Q_{\text{инд}} = Q(1 - 1 + 1/K) = Q/K$ и

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{K\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon}. \tag{25.13}$$

Хотя соотношение (25.13) получено в частном случае, оно справедливо всегда при наличии диэлектрика. Обратим внимание на то, что Q в этом выражении — только *свободный* заряд. Индуцированный связанный заряд не входит в формулу, так как он учитывается коэффициентом K (или ε).

Для поверхности интегрирования, показанной на рис. 25.9 (поскольку в проводнике напряженность электрического поля $\mathbf{E} = 0$), поток в направлении внутрь проводника отсутствует; отсутствует поток и через торцы «ящика», так как в этом случае вектор **E** параллелен поверхности; кроме того, торцы малы, и их вкладом в любом случае можно пренебречь. Поэтому весь поток сосредоточен через боковую поверхность внутри диэлектрика, и теорема Гаусса дает

$$E_d A = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{Q_{\text{инд}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon},$$

где мы воспользовались формулами (25.12) и (25.13). Величина E_d соответствует полю внутри диэлектрика и определяется выражениями

$$E_d = \frac{Q - Q_{\text{инд}}}{\varepsilon_0 A}$$

или

$$E_d = \frac{Q}{K\varepsilon_0 A} = \frac{Q}{\varepsilon A} = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Как из этих результатов, так и из общего выражения для теоремы Гаусса (25.13) видно, что отличие от случая вакуума состоит лишь в замене ε_0 на $K\varepsilon_0 = \varepsilon$.

*25.7. Поляризация и электрическое смещение (векторы P и D)

Прямоугольная диэлектрическая пластина между заряженными обкладками плоского конденсатора на рис. 25.9 обладает дипольным моментом

$$Q_{\text{инд}} l,$$

где l – толщина диэлектрика, а $Q_{\text{инд}}$ – заряд, наведенный на поверхности диэлектрика. Для характеристики диэлектрика можно ввести новую величину – *вектор поляризации* **P**, *дипольный момент единицы объема.* Для прямоугольной диэлектрической пластины площадью A и толщиной l

$$P = \frac{Q_{\text{инд}} l}{Al} = \frac{Q_{\text{инд}}}{A} = \sigma_{\text{инд}}.$$

Таким образом, величина вектора поляризации в данном случае равна поверхностной плотности наведенного на диэлектрике заряда[1].

Вектор поляризации направлен от поверхности с отрицательным зарядом с одной стороны диэлектрика к поверхности с положительным зарядом на противоположной стороне (подобно вектору дипольного момента), как показано на рис. 25.9. Для изображенной на этом рисунке штриховой линией поверхности можно написать

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} = PA = Q_{\text{инд}}, \tag{25.14}$$

поскольку поляризация равна $\mathbf{P} = 0$ в проводнике и параллельна торцам поверхности интегрирования. Формула (25.14) справедлива и в общем случае, и ее можно объединить с (25.12):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A},$$

или

$$\oint (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{A} = Q. \tag{25.15}$$

Это еще один способ записи теоремы Гаусса при наличии диэлектрика [см. также (25.12) и (25.13)], представляющий собой общий результат. Теорему Гаусса можно сформулировать, введя вектор *электрического смещения* **D**, который определяется как

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{25.16}$$

Тогда

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q. \tag{25.17}$$

Для диэлектрика, находящегося между пластинами плос-

[1] В более сложных случаях величина σ равна составляющей **P**, перпендикулярной поверхности.

кого конденсатора (рис. 25.9), это соотношение дает

$$D = \frac{Q}{A} \quad [\text{плоский конденсатор}], \tag{25.18}$$

где Q – свободный заряд.

Векторы **E**, **D** и **P** допускают наглядное толкование. Напряженность электрического поля **E** создается *всеми* зарядами, свободными и связанными, как это следует из (25.12). Поляризация **P**, как видно из формулы (25.14), связана только с индуцированным связанным зарядом. Электрическое смещение **D** обусловлено только свободным зарядом, как следует из (25.17) и (25.18).

И все же основной характеристикой электрического поля остается вектор напряженности электрического поля **E**. Векторы **P** и **D** служат полезными дополнительными характеристиками для более глубокого анализа, однако мы не будем часто пользоваться ими.

Заключение

Конденсатор – это устройство, аккумулирующее электрический заряд; он состоит из двух изолированных проводников (обкладок). Проводники обычно несут на себе равные по величине и противоположные по знаку заряды, и отношение величины этого заряда к разности потенциалов между проводниками называется *емкостью* C: $Q = CV$. Емкость плоского конденсатора пропорциональна площади каждой из обкладок и обратно пропорциональна расстоянию между ними. Пространство между обкладками обычно заполнено веществом, не проводящим электричества (воздухом, бумагой, пластмассой); такие вещества называются *диэлектриками*. Емкость конденсатора пропорциональна характеристике диэлектрика, которая называется относительной диэлектрической проницаемостью K (и которая для воздуха практически равна 1).

Если два или более конденсаторов соединены *параллельно*, то их общая емкость C равна сумме емкостей отдельных конденсаторов. При *последовательном* соединении конденсаторов величина, обратная их общей емкости C, равна сумме величин, обратных емкостям отдельных конденсаторов.

Энергия, накопленная заряженным конденсатором, равна $^1/_2 QV = {}^1/_2 CV^2 = {}^1/_2 Q^2/C$. Эту энергию можно рассматривать как энергию электрического поля, заключенного между обкладками конденсатора. *Плотность энергии* (энергия единицы объема) электрического поля **E** в вакууме равна $^1/_2 \varepsilon_0 E^2$, а в диэлектрике $^1/_2 K\varepsilon_0 E^2 = {}^1/_2 \varepsilon E^2$, где $\varepsilon = K\varepsilon_0$ называют абсолютной диэлектрической проницаемостью вещества.

Вопросы

1. Пусть два расположенных близко друг к другу проводника обладают одинаковым по величине отрицательным зарядом. Может ли между ними существовать разность потенциалов? Если да, то применимо ли здесь определение емкости $C = Q/V$?

2. Пусть расстояние между пластинами d плоского конденсатора не очень мало по сравнению с размерами пластин. Будет ли формула (25.2) занижать или завышать истинную емкость? Объясните.

3. Допустим, что одну из пластин плоского конденсатора сдвинули относительно другой так, что они по-прежнему параллельны, но площадь их перекрытия уменьшилась вдвое. Как изменится емкость?

4. Обкладку плоского конденсатора наклонили так, что расстояние с одной стороны увеличилось до $2d$. Как изменится емкость?

5. Подтвердите общими рассуждениями справедливость формулы для емкости цилиндрического конденсатора (пример 25.2). Возьмите за основу аргументы типа следующих за формулой (25.2).

6. Предложите простой метод определения ε_0 с помощью конденсатора.

7. Почему обкладки подключенного к батарее конденсатора приобретают одинаковый по величине заряд? Будет ли заряд одинаковым, если обкладки различаются размером или формой?

8. Большая медная пластина толщиной l помещена между обкладками плоского конденсатора, не касаясь их. Как это повлияет на емкость конденсатора?

9. Три одинаковых конденсатора подключают к батарее. В каком случае они аккумулируют больше энергии: при последовательном или при параллельном соединении?

10. Параллельные пластины изолированного конденсатора обладают зарядами Q противоположного знака. Надо ли прикладывать силу, чтобы развести пластины? Изменится ли при этом разность потенциалов? На что затрачивается работа при разведении пластин?

11. Как изменится аккумулированная конденсатором энергия, если а) удвоить напряжение на конденсаторе; б) удвоить заряд на каждой из пластин; в) удвоить расстояние между пластинами, при условии что конденсатор подключен к батарее?

12. Как зависит от температуры диэлектрическая проницаемость диэлектрика, состоящего из полярных молекул?

13. Обкладки плоского заряженного изолированного конденсатора расположены горизонтально. Если между пластинами чуть-чуть вдвинуть лист тонкого диэлектрика и затем отпустить его, как он будет двигаться?

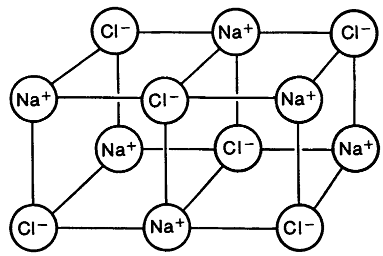
14. Пусть в предыдущем вопросе конденсатор подключен к батарее. Что произойдет с диэлектриком в этом случае?

15. Диэлектрик удаляют из устройства между обкладками плоского конденсатора, подключенного к батарее. Как при этом изменяются емкость, заряд на обкладках, разность потенциалов, энергия конденсатора, напряженность электрического поля?

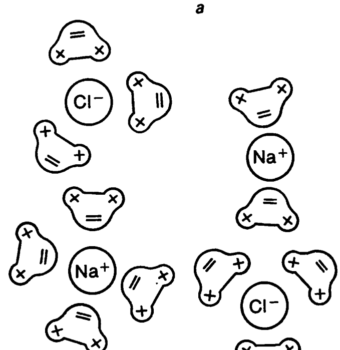
16. Как изменяется запасенная конденсатором энергия, если между обкладками помещают диэлектрик и при этом а) конденсатор изолирован, так что заряд Q остается неизменным; б) конденсатор остается подключенным к батарее и напряжение V не меняется?

17. Мы видели, что емкость C зависит от размеров, формы и расположения двух проводников – обкладок конденсатора, а также от значения диэлектрической проницаемости K. Как же тогда понимать утверждение о постоянстве C в формуле (25.1)?

18. Какое значение можно приписать диэлектрической проницаемости хорошего проводника? Объясните.



а



б

Рис. 25.10. Кристалл хлористого натрия (*а*); растворение хлористого натрия в воде (*б*).

19. *Растворяющая способность воды.* Очень высокая диэлектрическая проницаемость воды, $K = 80$ (см. табл. 25.1), делает ее хорошим растворителем многих веществ. Например, обычная поваренная соль (хлористый натрий) $NaCl$, в кристаллической решетке которой (рис. 25.10, *а*) ионы Na^+ и Cl^- удерживаются силами электрического притяжения, легко растворяется в воде. Почему электрическое поле, создаваемое каждым ионом, должно ослабляться в K раз? Иными словами, объясните, как можно распространить формулу (25.10) на поле точечного заряда в диэлектрике, и на основании этой простой модели объясните процесс растворения соли (рис. 25.10, *б*).

Задачи

Раздел 25.1

1. (I) Какой заряд отбирает от батареи с напряжением 12 В конденсатор емкостью 25 мкФ?

2. (I) У конденсатора емкостью 12 000 пФ имеется заряд $8{,}0 \cdot 10^{-8}$ Кл. Чему равно напряжение на конденсаторе?

3. (II) У конденсатора емкостью C_1 имеется заряд Q_0. К нему непосредственно подключают другой (незаряженный) конденсатор емкостью C_2. Как распределится заряд между конденсаторами? Каким будет напряжение на каждом конденсаторе?

4. (II) Конденсатор емкостью 2,5 мкФ заряжают до напряжения 35 В и отключают от батареи. Затем его подключают к другому конденсатору емкостью C_2; напряжение на первом конденсаторе падает при этом до 16 В. Чему равна емкость C_2?

5. (II) Чтобы перенести заряд 0,20 мКл с одной обкладки конденсатора емкостью 60 мкФ на другую, надо затратить энергию 16,0 Дж. Какой заряд имеется на каждой обкладке?

6. (II) Конденсатор емкостью 2,4 мкФ заряжают до напряжения 200 В, а конденсатор емкостью 1,10 мкФ – до напряжения 60 В. а) Конденсаторы соединяют соответственно положительно и отрицательно заряженными обкладками. Чему будут равны напряжение и заряд на каждом из них? б) Чему будут равны напряжение и заряд на каждом конденсаторе, если соединить их обкладками противоположного знака?

Раздел 25.2

7. (I) Необходимо изготовить конденсатор емкостью 2,0 Ф. Какой должна быть площадь обкладок с воздушным промежутком 4,5 мм?

8. (I) Пользуясь теоремой Гаусса, покажите, что $\mathbf{E} = 0$ внутри внутренней обкладки и за пределами внешней обкладки цилиндрического конденсатора (см. рис. 25.4 и пример 25.2).

9. (I) Определите электрическую емкость Земли, считая ее сферическим проводником.

10. (II) Между параллельными пластинами площадью каждая 210 см^2, разделенными воздушным промежутком 2,50 см, необходимо создать электрическое поле напряженностью $8{,}0 \cdot 10^6$ В/м. Какой заряд должна иметь каждая пластина?

11. (II) Покажите, что в предельном случае очень малого расстояния между обкладками цилиндрического конденсатора ($R_2 - R_1 \ll R_1$ на рис. 25.4) формула для его емкости, полученная в примере 25.2, сводится к формуле для емкости плоского конденсатора (25.2).

12. (II) Большой металлический лист толщиной l помещается между обкладками плоского конденсатора, изображенного на рис. 25.3, параллельно им. Лист не касается обкладок и выходит за их размеры. а) Выразите емкость такого конденсатора через A, d и l. б) Если $l = {}^2/_3\, d$, то во сколько раз изменится емкость конденсатора после введения металлического листа?

13. (II) *Сферический конденсатор* состоит из двух тонких концентрических сферических оболочек радиусом R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). а) Выведите формулу для емкости такого конденсатора. б) Покажите, что для $R_2 - R_1 \ll R_1$ полученная формула сводится к формуле для емкости плоского конденсатора.

14. (II) Напряженность электрического поля, при которой наступает электрический пробой сухого воздуха, составляет приблизительно $3{,}0 \cdot 10^6$ В/м. Какой заряд может накопить конденсатор с площадью каждой обкладки 8,5 см^2?

Раздел 25.3

15. (I) Шесть конденсаторов емкостью каждый 1,5 мкФ соединены параллельно. Чему равна эквивалентная емкость? Чему равна эквивалентная емкость последовательного соединения?

16. (I) В схеме установлен конденсатор емкостью 3,0 мкФ. Инженер решил, что емкость необходимо увеличить до 4,8 мкФ. Какую емкость должен иметь дополнительный конденсатор и как его следует подключить?

17. (I) Емкость одного из участков электронной схемы необходимо уменьшить с 3600 до 1000 пФ. Какую емкость надо подключить к схеме, чтобы добиться желаемого результата, ничего не удаляя из схемы? Как следует подключить дополнительный конденсатор?

18. (I) Три плоских конденсатора с обкладками

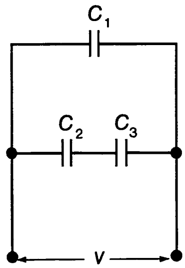


Рис. 25.11.

площадью соответственно A_1, A_2 и A_3 и промежутками d_1, d_2 и d_3 соединены параллельно. Покажите, пользуясь только формулой (25.2), справедливость выражения (25.3).

19. (II) а) Определите эквивалентную емкость цепи на рис. 25.11. б) Если $C_1 = C_2 = 2C_3 = 4{,}0$ мкФ, то какой заряд будет на каждом конденсаторе при $V = 50$ В?

20. (II) Три проводящие пластины площадью A каждая соединены, как показано на рис. 25.12. а) Как соединены образовавшиеся конденсаторы, последовательно или параллельно? б) Допустим, что среднюю пластину можно перемещать вверх и вниз (меняя значения d_1 и d_2) и тем самым менять емкость. Чему равны минимальное и максимальное значения результирующей емкости? в) Определите зависимость C от d_1, d_2 и A в предположении, что $d_1 + d_2$ намного меньше размеров пластин.

21. (II) Имеются три конденсатора емкостью 2000 пФ, 5000 пФ и 0,010 мкФ. Какие наибольшую и наименьшую емкости можно составить из них? Как следует соединить для этого конденсаторы?

22. (II) Конденсаторы емкостью 0,20 и 0,10 мкФ подключены последовательно к батарее с напряжением 9,0 В. Рассчитайте а) напряжение на каждом конденсаторе; б) заряд на каждом конденсаторе. в) Какими будут ответы, если конденсаторы соединены параллельно?

23. (II) Конденсаторы емкостью 3,0 и 4,0 мкФ соединены последовательно и включены параллельно третьему конденсатору-емкостью 2,0 мкФ. а) Чему равна общая емкость цепи? б) Рассчитайте напряжение на каждом конденсаторе, если к цепи приложено напряжение 50 В.

24. (II) Конденсатор переменной емкости в радиоприемнике представляет собой блок из шести пластин, соединенных между собой и чередующихся с шестью другими пластинами, также соединенными между собой. Пластины разделены воздушными зазорами; расстояние между двумя соседними пластинами везде одинаково и равно 1,0 мм. Один блок пластин может перемещаться относительно другого, так что площадь перекрытия пластин меняется от 1,0 до 4,0 см^2. а) Как соединены эти 11 конденсаторов: последовательно или параллельно? б) Определите диапазон изменения емкости.

25. (III) Левую пластину конденсатора, изображенного на рис. 25.3, отклоняют в верхней части влево так, что она составляет малый угол θ с вертикалью (и с другой пластиной); внизу же расстояние d остается прежним. Выведите формулу, выражающую емкость C через A, d и θ. Пластины считайте квадратными. (Подсказка: рассмотрите конденсатор как множество бесконечно малых конденсаторов, соединенных параллельно.)

26. (III) К цепи, составленной из пяти конденсаторов (рис. 25.13), приложено напряжение V. а) Чему равна эквивалентная емкость цепи? б) Вычислите эквивалентную емкость при $C_2 = C_4 = 3{,}0$ мкФ, $C_1 = C_3 = C_5 = 6{,}0$ мкФ.

Раздел 25.4

27. (I) Какая энергия запасена конденсатором емкостью 200 пФ, если к нему приложено напряжение 200 В?

28. (I) У поверхности Земли существует электрическое поле напряженностью приблизительно 150 В/м. Чему равна энергия этого поля в расчете на 1 м^3?

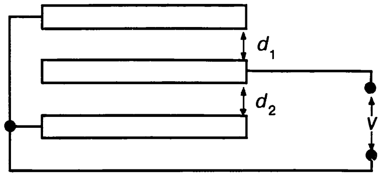


Рис. 25.12.

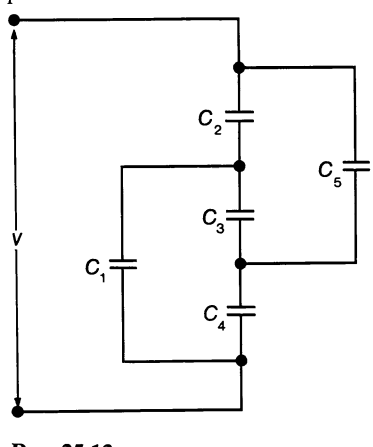


Рис. 25.13.

29. (I) Какая энергия запасена в электрическом поле между двумя квадратными пластинами со стороной 11,0 см, разделенными воздушным промежутком 2,0 мм? Пластины обладают равным по величине и противоположным по знаку зарядом 300 мкКл.

30. (II) Плоский конденсатор обладает постоянным зарядом Q. Расстояние между пластинами увеличивают вдвое. а) Во сколько раз изменится энергия, запасенная в электрическом поле конденсатора? б) Какую работу необходимо совершить, чтобы удвоить расстояние между пластинами, если площадь каждой из них равна A?

31. (II) Пусть на рис. 25.11 $V = 100$ В и $C_1 = C_2 = C_3 = 1200$ пФ. Чему равна энергия, запасенная всеми конденсаторами?

32. (II) Какую энергию отбирают от батареи с напряжением 12 В при полной зарядке конденсаторы емкостью 0,10 и 0,20 мкФ, соединенные а) параллельно; б) последовательно? в) Какой заряд поступает на конденсаторы от батареи в каждом из этих случаев?

33. (II) а) Радиус внешней обкладки цилиндрического конденсатора (R_2) увеличен вдвое, заряд же остался неизменным. Во сколько раз изменится запасенная в конденсаторе энергия? Откуда берется дополнительная энергия? б) Повторите решение, предполагая, что напряжение на обкладках остается неизменным.

34. (II) Конденсатор емкостью 2,0 мкФ заряжен от батареи с напряжением 12 В и затем подключен к незаряженному конденсатору емкостью 5,0 мкФ. Определите полную энергию, запасенную конденсаторами а) до того, как конденсаторы были соединены между собой; б) после соединения конденсаторов. в) Чему равно изменение энергии? г) Сохраняется ли энергия? Объясните почему.

35. (II) Какую работу надо совершить, чтобы удалить металлический лист из зазора между пластинами конденсатора в задаче 12, если а) конденсатор подключен к батарее и напряжение остается неизменным; б) конденсатор отключен от батареи и заряд остается неизменным.

36. (II) а) Покажите, что каждая пластина плоского конденсатора действует на другую с силой

$$F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}.$$

Для этого рассчитайте dW/dx, где dW – работа, необходимая для разведения пластин на расстояние dx. б) Почему формула $F = QE$ даст неверный результат?

37. (II) Покажите, что электростатическая энергия, запасенная в электрическом поле уединенного сферического проводника с радиусом R и зарядом Q, равна

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}.$$

Вычислите энергию тремя способами: а) пользуясь формулой (25.6) для плотности энергии электрического поля (подсказка: рассмотрите сферические слои толщиной dr); б) используя формулу (25.5) и понятие емкости уединенной сферы (разд. 25.2); в) вычисляя работу, которую необходимо совершить для переноса заряда Q из бесконечности бесконечно малыми порциями dq.

Раздел 25.5

38. (I) *Электрической прочностью* (напряженностью пробоя) вещества называется максимальная напряженность электрического поля, которую выдерживает диэлектрик, пока не наступает электрический пробой и диэлектрик не начинает проводить ток. Электрическая прочность диэлектриков, используемых в конденсаторах, имеет обычно порядок 10^7 В/м. а) Во сколько раз электрическая прочность этих диэлектриков выше, чем у воздуха (см. пример 24.9)? б) Какой должна быть минимальная толщина диэлектрика, если конденсатор будет использоваться при напряжении 1000 В? в) 50 000 В?

39. (I) Чему равна емкость двух квадратных параллельных пластин со стороной 5,5 см, разделенных слоем парафина толщиной 1,8 мм?

40. (II) Конденсатор с воздушным зазором емкостью 4500 пФ подключен к батарее с напряжением 12 В. Какой заряд перейдет от батареи на конденсатор, если воздух заменить слюдой?

41. (II) Предположим, что конденсатор в примере 25.7 остается подключенным к батарее при удалении диэлектрика. Чему равна в этом случае работа по удалению диэлектрика?

42. (II) Какую энергию запасет конденсатор в задаче 29, если между обкладками поместить пластину слюды толщиной а) 2,0 мм (т. е. полностью заполнить промежуток между обкладками); б) 1,0 мм?

43. (II) Решите пример 25.6, считая, что батарея постоянно подключена к конденсатору при введении диэлектрика. Чему равен свободный заряд на обкладках после введения диэлектрика?

44. (II) Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя различными диэлектриками (рис 25.14). Выразите емкость конденсатора через K_1, K_2, площадь пластин A и расстояние между ними d. (Подсказка: нельзя ли рассматривать этот конденса-

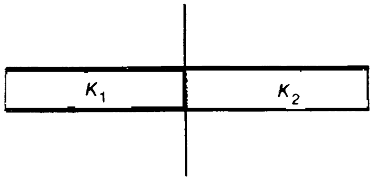


Рис. 25.14.

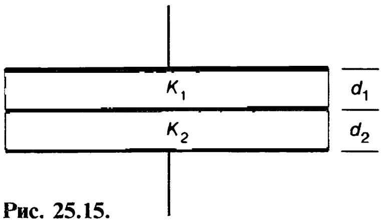


Рис. 25.15.

тор как два конденсатора, соединенных последовательно или параллельно?)

45. (II) Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя различными диэлектриками (рис. 25.15). Выразите емкость конденсатора через K_1, K_2, площадь пластин A и толщину диэлектриков $d_1 = d_2 = d/2$.

46. (II) Решите задачу 45, считая $d_1 \neq d_2$.

47. (II) Какой процент энергии, запасенной электрическим полем в примере 25.6, приходится на диэлектрик?

48. (II) Используя пример 25.6, выразите емкость плоского конденсатора через площадь обкладок A, расстояние между обкладками d, толщину диэлектрика l ($l < d$) и диэлектрическую проницаемость K.

* Раздел 25.6

***49.** (II) В цилиндрическом конденсаторе (рис. 25.4) диэлектрик ($K = 3,7$) полностью заполняет пространство между обкладками с радиусами 3,0 и 6,0 мм и длиной $L = 12,0$ см. Заряд каждой обкладки равен 1,60 мкКл. Определите а) поверхностную плотность заряда каждой обкладки; б) индуцированный заряд на каждой из поверхностей диэлектрика; в) максимальное и минимальное значения напряженности электрического поля в диэлектрике; г) разность потенциалов между обкладками.

***50.** (III) Решите задачу 49 для случая, когда диэлектрик не заполняет все пространство между обкладками, а представляет собой цилиндр с внутренним радиусом 3,0 мм и внешним радиусом 4,0 мм. Вычислите также максимальное и минимальное значения напряженности электрического поля в воздушном зазоре.

* Раздел 25.7

***51.** (II) Для конденсатора в примере 25.6 определите **E**, **D** и **P** а) внутри диэлектрика; б) в воздушном зазоре между диэлектриком и обкладками.