

# 31 Индуктивность, энергия магнитного поля и электромагнитные колебания

В предыдущей главе обсуждалось, как изменение магнитного потока через контур возбуждает в нем ЭДС. Ранее мы также видели, что электрический ток создает магнитное поле. Основываясь на этих выводах, можно было бы предположить, что изменение тока в одном контуре должно возбуждать ЭДС (и индуцировать ток) в расположенном поблизости другом контуре и даже возбуждать ЭДС в самом первом контуре. Один из соответствующих примеров (трансформатор) рассматривался в предыдущей главе; сейчас мы рассмотрим это явление на основе более общих представлений об индуктивности и взаимной индуктивности контуров. Понятие индуктивности послужит затем отправной точкой для изучения энергии магнитного поля. Завершает главу анализ цепей, содержащих индуктивность, а также активное сопротивление и (или) емкость.

## 31.1. Взаимная индуктивность

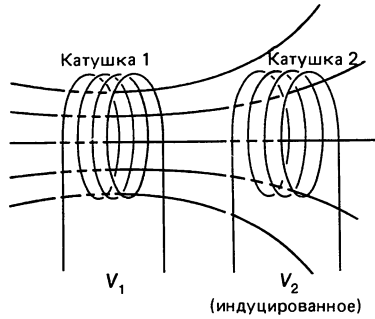
Если две катушки расположены поблизости друг от друга (рис. 31.1), то изменение тока в одной из них приведет к появлению ЭДС индукции в другой. Согласно закону Фарадея, ЭДС индукции  $\mathcal{E}_2$  в катушке 2 пропорциональна скорости изменения пронизывающего магнитного потока. Этот поток создается током  $I_1$ , текущим в катушке 1, и часто бывает удобно выражать ЭДС в катушке 2 через ток в катушке 1.

Пусть  $\Phi_{21}$  — магнитный поток, пронизывающий каждый виток катушки 2 и обусловленный током в катушке 1. Величина  $N_2 \Phi_{21}$  называется потокоцеплением катушки 2, содержащей  $N_2$  витков плотной намотки. Если взаимное расположение двух катушек в пространстве фиксировано, величина  $N_2 \Phi_{21}$  будет пропорциональна силе тока  $I_1$  в катушке 1; коэффициент пропорциональности называется **взаимной индуктивностью**  $M_{21}$  (коэффициентом взаимной индукции) катушек 1 и 2:

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}. \quad (31.1)$$

Согласно закону Фарадея, ЭДС  $\mathcal{E}_2$ , возбуждаемая в

Рис. 31.1. Изменяющийся ток через одну катушку возбуждает ток в другой катушке.



катушке 2 изменяющимся током в катушке 1, равна

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}. \quad (31.2)$$

Объединяя (31.1) и (31.2), получим выражение

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt},$$

связывающее ток в катушке 1 с обусловленной этим током ЭДС индукции в катушке 2. Взаимная индуктивность  $M_{21}$  катушки 2 по отношению к катушке 1 зависит от размеров, формы, числа витков и взаимного расположения двух катушек, а также от материала сердечника — железа или другого ферромагнетика. Например, чем ближе катушки на рис. 31.1 друг к другу, тем больше силовых линий пройдет через катушку 2 и тем больше будет коэффициент взаимной индукции  $M_{21}$ . Для некоторых конфигураций взаимную индуктивность можно рассчитать теоретически (пример 31.1), но чаще ее определяют экспериментально.

Рассмотрим теперь обратный случай, когда изменяющийся ток в катушке 2 возбуждает ЭДС в катушке 1. Тогда

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad (31.3)$$

где  $M_{12}$  — коэффициент взаимной индукции катушки 1 по отношению к катушке 2. Можно показать, хотя здесь мы этого делать не будем, что  $M_{12} = M_{21}$ ; следовательно, индексы излишни, и можно просто написать

$$M = M_{12} = M_{21} \quad (31.4)$$

и

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}, \quad (31.5a)$$

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}. \quad (31.5b)$$

В системе СИ единицей взаимной индуктивности служит генри (Гн);  $1 \text{ Гн} = 1 \text{ В} \cdot \text{с} / \text{А} = 1 \text{ Ом} \cdot \text{с}$ .

**Пример 31.1.** Длинный тонкий соленоид длиной  $l$  с площадью поперечного сечения  $A$  содержит  $N_1$  витков плотной катушки. Поверх него также изолированным проводом плотно намотана катушка с  $N_2$  витками (рис. 31.2). Вычислите взаимную индуктивность, считая, что весь магнитный поток соленоида (катушки 1) проходит через катушку 2.

**Решение.** Индукция магнитного поля внутри соленоида, согласно (29.3), равна

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1.$$

Магнитный поток через катушку 2 равен

$$\Phi_{21} = BA = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 A,$$

поскольку через катушку 2 проходит весь магнитный поток соленоида. Следова-

тельно, взаимная индуктивность равна

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}.$$

Обратите внимание на то, что мы вычисляли  $M_{21}$ ; если бы мы взяли за вычисление  $M_{12}$ , это оказалось бы сложным делом. Но  $M_{12} = M_{21} = M$ , поэтому для вычисления взаимной индуктивности  $M$  можно всегда выбирать наиболее простой путь.

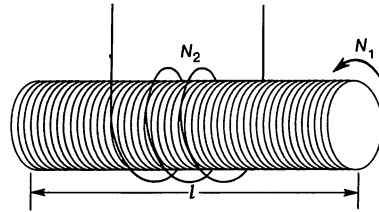


Рис. 31.2. К примеру 31.1.

Трансформатор служит примером взаимной индуктивности, в котором связь двух катушек максимальна и магнитный поток почти полностью пронизывает обе катушки. Индуктивная связь находит и другие применения. Например, некоторые типы сердечных стимуляторов (приборов, задающих ритм сокращений сердечной мышцы для поддержания нормального кровообращения у людей с заболеваниями сердца) питаются извне. Энергия из внешней катушки (расположенной на теле пациента) передается благодаря взаимной индуктивности катушке стимулятора, вшитого в области сердца. Таким образом, для замены источников питания нет нужды всякий раз прибегать к хирургическому вмешательству.

Иногда, однако, из-за индуктивной связи возникают проблемы. Переменный ток в любой цепи способен возбуждать ЭДС в другой части той же цепи или в другой цепи, даже если проводники по форме отличаются от катушки. Конечно, в отсутствие катушек с большим числом витков и ферромагнитных сердечников взаимная индуктивность  $M$  обычно невелика. Однако при слабых сигналах часто возникают проблемы, обусловленные индуктивными наводками; для их устранения обычно применяют экранированные кабели, внутренний проводник в которых окружен заземленным цилиндрическим металлическим экраном.

## 31.2. Индуктивность

Понятие индуктивности можно применить и к изолированной катушке с  $N$  витками. Когда сила тока в катушке (или соленоиде) меняется, меняется и магнитный поток внутри катушки, возбуждающий в ней ЭДС индукции. Эта ЭДС противодействует изменению магнитного потока (правило Ленца). Это очень похоже на возникновение противо-ЭДС в электродвигателе. Если, например, ток в катушке увеличивается, то возрастающий магнитный поток индуцирует в катушке ЭДС, под действием которой возникает ток, противоположный первоначальному току и стремящийся затормозить его рост. Если же ток в катушке уменьшается, то убывающий магнитный поток возбуждает ЭДС индукции, которая создает ток, направленный аналогично исходному, в результате чего в катушке поддерживается первоначальная сила тока.


Поскольку магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий  $N$  витков катушки, пропорционален силе тока  $I$  в катушке, **индуктивность** катушки (или **коэффициент самоиндукции**  $L$  по аналогии со взаимной индуктивностью) можно определить как

$$L = \frac{N\Phi}{I}. \quad (31.6)$$

Тогда, согласно закону Фарадея, ЭДС индукции  $\mathcal{E}$  в катушке с индуктивностью  $L$  равна

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (31.7)$$

Как и взаимная индуктивность, индуктивность измеряется в генри. Значение  $L$  зависит от геометрии проводников и наличия ферромагнитного материала. В принципе индуктивность можно определить для любой цепи или ее части.

Любая цепь переменного тока содержит индуктивность, но обычно эта индуктивность мала, если только в цепи нет катушки с большим числом витков. Катушка, обладающая заметной индуктивностью, называется **катушкой индуктивности** или **дроссельной катушкой** (дресселем); на схемах она обозначается символом . В некоторых цепях индуктивность играет полезную роль, но иногда ее стремятся сделать как можно меньше. Например, прецизионные резисторы обычно наматываются из проволоки и поэтому обладают не только электрическим сопротивлением, но и индуктивностью; чтобы сделать индуктивность минимальной, проволоку наматывают в обе стороны, так что результирующий магнитный поток оказывается слабым. Подобная намотка называется безындукционной.

Если катушка индуктивности обладает пренебрежимо

малым сопротивлением, сила тока через нее зависит только от индуктивности (иначе говоря, от ЭДС самоиндукции). Если к катушке приложено переменное напряжение, оно будет в точности скомпенсировано ЭДС самоиндукции [см. (31.7)]. Таким образом, чем больше индуктивность, тем меньше скорость изменения тока, а следовательно, и сама сила тока. Индуктивность в цепи переменного тока ведет себя подобно электрическому сопротивлению, оказывая сопротивление переменному току; это свойство индуктивности характеризуют индуктивным (реактивным) сопротивлением, или *импедансом*. Более подробно понятие импеданса будет обсуждаться в гл. 32; мы увидим, что импеданс зависит не только от  $L$ , но и от частоты. Здесь же приведем только один пример, характеризующий его роль. Сопротивление первичной обмотки трансформатора обычно невелико, порой менее 1 Ом. Если бы ток в обмотке ограничивался только активным сопротивлением, то при подаче на обмотку напряжения в ней протекал бы огромный ток (и, действительно, подав на обмотку трансформатора постоянное напряжение, можно сжечь ее). Сила тока в обмотке трансформатора ограничивается до разумных значений именно благодаря импедансу обмотки, т.е. ее индуктивному сопротивлению переменному току (или благодаря ЭДС самоиндукции).

**Пример 31.2.** а) Выведите формулу для индуктивности  $L$  соленоида (длинной катушки) с  $N$  витками длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $A$ . б) Вычислите  $L$  при  $N = 100$ ,  $l = 5,0$  см,  $A = 0,30$  см<sup>2</sup> для соленоида без сердечника. в) Вычислите  $L$  при тех же параметрах для соленоида с железным сердечником с магнитной проницаемостью  $\mu = 4000\mu_0$ .

**Решение.** а) Согласно (29.3), индукция магнитного поля внутри соленоида равна  $B = \mu_0 nI$ , где  $n = N/l$ . Поток равен  $\Phi = BA = \mu_0 NIA/l$ , и тогда

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}.$$

б) Поскольку  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Тл·м/А, подставляя численные значения, получаем

$$L = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м/А})(100)^2 (3,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2)}{(5,0 \cdot 10^{-2} \text{ м})^2} = 7,5 \text{ мкГн}.$$

в) Теперь вместо  $\mu_0$  следует подставить  $\mu = 4000\mu_0$ , поэтому индуктивность  $L$  бу-

дет в 4000 раз больше:  $L = 0,030$  Гн = 30 мГн.

**Пример 31.3.** Определите индуктивность единицы длины коаксиального кабеля с внутренним проводником радиусом  $R_1$  и внешним радиусом  $R_2$  (рис. 31.3). Проводники считаем тонкими, так что магнитным полем в них можно пренебречь. Силы тока в проводниках  $I$  одинаковы и направлены в противоположные стороны.

**Решение.** Согласно закону Ампера (см. также пример 29.2),

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Силовые линии магнитной индукции  $\mathbf{B}$  представляют собой окружности с центром на внутреннем проводнике (одна из линий показана штриховой кривой на рис. 31.3, а); индукция магнитного поля на расстоянии  $r$  от центра равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где  $I$  — сила тока во внутреннем провод-

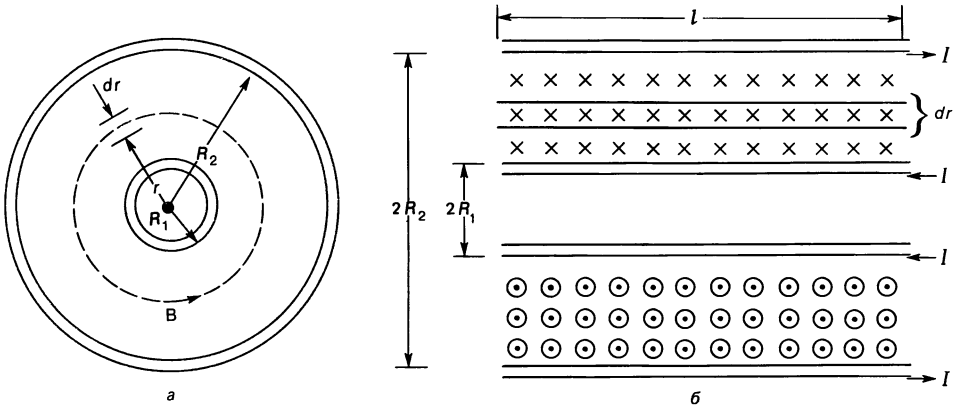


Рис. 31.3. К примеру 31.3. Поперечное (а) и продольное (б) сечения коаксиального кабеля.

нике. Магнитный поток через прямоугольник длиной  $l$  и шириной  $dr$  (вдоль отрезка кабеля; рис. 31.3, б) равен

$$d\Phi = B l dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr.$$

Полный поток вдоль отрезка кабеля длиной  $l$  составит

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

### 31.3. Энергия магнитного поля

Когда в катушке с индуктивностью  $L$  течет ток  $I$ , меняющийся со скоростью  $dI/dt$ , к катушке подводится электрическая мощность

$$P = I \mathcal{E} = LI \frac{dI}{dt}$$

[здесь мы воспользовались формулой (31.7)]. Рассчитаем работу по увеличению силы тока в катушке от нуля до некоторого значения  $I$ . С учетом предыдущего равенства работа  $dW$ , совершаемая за время  $dt$ , равна

$$dW = P dt = LI dI,$$

а полная работа, необходимая для увеличения силы тока от нуля до  $I$ , составляет

$$W = \int dW = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2.$$

Поскольку ток  $I$  течет в одну сторону во внутреннем проводнике и такой же силы ток  $I$  течет в противоположную сторону во внешнем проводнике, мы имеем дело с одним витком, т. е.  $N = 1$ . Индуктивность отрезка кабеля длиной  $l$  равна

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

а индуктивность единицы длины составляет

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Эта работа равна энергии  $U$ , запасенной катушкой индуктивности, в которой течет ток  $I$  (будем считать, что  $U = 0$  при  $I = 0$ ):

$$U = \frac{1}{2} LI^2. \quad (31.8)$$

Полученное выражение можно сравнить с выражением для энергии конденсатора  $C$  при разности потенциалов на его обкладках  $V$ :

$$U = \frac{1}{2} CV^2.$$

(разд. 25.4).

Точно так же, как энергию заряженного конденсатора можно рассматривать как энергию электрического поля между его обкладками, энергию, запасенную в катушке индуктивности, можно представлять как энергию ее магнитного поля. Чтобы выразить энергию через индукцию магнитного поля, воспользуемся результатом примера 31.2, согласно которому индуктивность соленоида равна  $L = \mu_0 N^2 A/l$ . Нам известно, что индукция магнитного поля внутри соленоида связана с силой тока в его обмотке соотношением  $B = \mu_0 NI/l$ . Следовательно,

$$U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \left( \frac{Bl}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} Al.$$

Эта энергия заключена внутри катушки в объеме  $Al$ . Тогда энергия единицы объема, или *плотность энергии*, равна

$$u = \text{плотность энергии} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (31.9)$$

Формула (31.9), полученная нами для частного случая (магнитное поле внутри соленоида), справедлива в любой области пространства, где существует магнитное поле. В присутствии ферромагнитного материала величина  $\mu_0$  заменяется на  $\mu$ . Полученное равенство аналогично выражению для плотности энергии электрического поля (25.6):  $u = (1/2) \epsilon_0 E^2$ .

**Пример 31.4.** а) Какая энергия запасена на единице длины коаксиального кабеля с проводниками радиусами  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 31.3), когда по ним течет ток  $I$ ? Где плотность энергии максимальна?

**Решение.** а) Согласно результату примера 31.3,

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{U}{l} = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

б) Так как  $B = \mu_0 I/2\pi r$ , индукция магнитного поля максимальна у поверхности внутреннего проводника; поэтому здесь же максимальна и плотность энергии  $u = B^2/2\mu_0$ .

31.4.  $RL$ -цепочка

Любая катушка индуктивности обладает электрическим сопротивлением. Поэтому реальную катушку можно представить в виде последовательно соединенных индуктивности  $L$  и резистора  $R$  (рис. 31.4, *a*), причем величина сопротивления  $R$  может включать и сопротивление отдельного резистора, соединенного последовательно с катушкой. Что же происходит, когда последовательно с такой  $RL$ -цепочкой включается источник постоянного напряжения  $V$ ? В момент замыкания ключа, соединяющего цепь с батареей, в цепи начинает течь ток, и в катушке возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая увеличению тока. Однако по мере возрастания силы тока падение напряжения на резисторе увеличивается, а на индуктивности уменьшается и ее сопротивление току (импеданс) падает. Таким образом, ток в цепи постепенно нарастает, как показано на рис. 31.4, *б*, и приближается к максимальному (стационарному) значению  $I_{\text{макс}} = V/R$ , при котором все напряжение батареи падает на резисторе.

Процесс нарастания тока в цепи можно описать математически, применив к цепи на рис. 31.4, *a* правило Кирхгофа. Источниками ЭДС в цепи являются батарея ( $V$ ) и ЭДС самоиндукции катушки  $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$ . Сумма этих ЭДС равна падению напряжения на резисторе:

$$V - L \frac{dI}{dt} = IR,$$

где  $I$  — мгновенное значение силы тока в цепи. Перепишем это равенство в виде

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V. \quad (31.10)$$

Мы получили линейное дифференциальное уравнение,

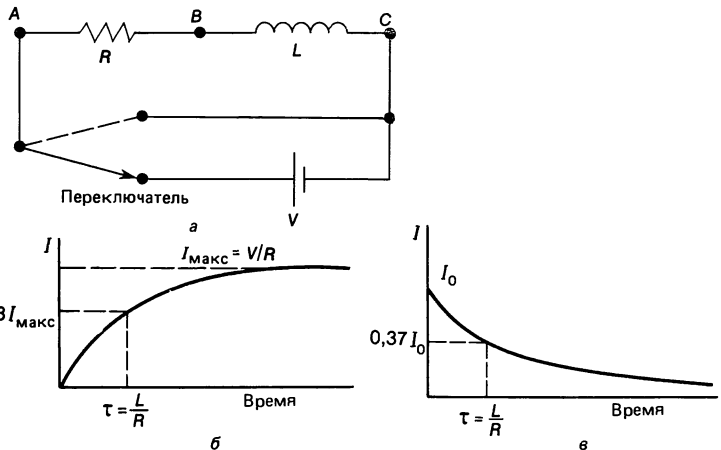


Рис. 31.4. *a* —  $RL$ -цепочка; *б* — нарастание тока после подключения батареи; *в* — уменьшение тока после выведения батареи из цепи.



которое можно проинтегрировать точно так же, как это было сделано в разд. 27.5 для  $RC$ -цепочки:

$$\int_{I=0}^I \frac{dI}{V - IR} = \int_0^t \frac{dt}{L},$$

откуда

$$-\frac{1}{R} \ln \left( \frac{V - IR}{V} \right) = \frac{t}{L},$$

или

$$I = \frac{V}{R} (1 - e^{-t/\tau}), \quad (31.11)$$

где

$$\tau = L/R \quad (31.12)$$

называется *постоянной времени*  $RL$ -цепочки. Значение  $\tau = L/R$  соответствует времени, за которое сила тока достигает  $(1 - 1/e) I_{\text{макс}} = 0,63 I_{\text{макс}}$ , или 63% своего максимального значения  $I_{\text{макс}} = V/R$ . Зависимость (31.11) изображена на рис. 31.4, б. (Сравните полученный здесь результат с результатом для  $RC$ -цепочки; разд. 27.5.)

Если перебросить переключатель на рис. 31.4, а в положение, когда батарея выключается из цепочки (точки  $A$  и  $C$  соединяются напрямую) в тот момент, когда сила тока цепи достигнет  $I_0$ , то дифференциальное уравнение (31.10) примет вид

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0,$$

так как  $V = 0$ . Это уравнение легко интегрируется:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt,$$

где  $I = I_0$  при  $t = 0$ , а  $I$  — значение тока в момент  $t$ . Взяв интегралы, получим

$$\ln \frac{I}{I_0} = - \frac{R}{L} t,$$

или

$$I = I_0 e^{-t/\tau},$$

где опять  $\tau = L/R$  — постоянная времени. Таким образом, ток экспоненциально убывает до нуля (рис. 31.4, в)

Из проведенного анализа следует, что при включении или выключении, например, электромагнита, всегда существует какое-то запаздывание. Кроме того,  $RL$ -цепочка обладает свойствами, сходными со свойствами  $RC$ -цепоч-

ки (разд. 27.5), однако постоянная времени оказывается *обратно* пропорциональной  $R$ .

**Пример 31.5.** В момент  $t = 0$  батареею напряжением 12,0 В подключают последовательно с сопротивлением 30 Ом и индуктивностью 220 мГн. а) Чему равна постоянная времени? б) За какое время сила тока достигнет половины максимального значения? Чему в этот момент будет равна в) мощность, потребляемая от батареи, и г) скорость накопления энергии магнитным полем катушки?

**Решение.** а) Согласно (31.12),  $\tau = L/R = (0,22 \text{ Гн})/(30 \text{ Ом}) = 7,3 \text{ мс}$ .

б) Максимальная сила тока  $I_{\text{макс}} = V/R$ . Подставляя в (31.11)  $I = 1/2 I_{\text{макс}} = V/2R$ , получаем

$$1 - e^{-t/\tau} = \frac{1}{2},$$

или

$$t = \tau \ln 2 = (7,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}) \cdot 0,69 = 5,0 \text{ мс}.$$

в) В этот момент сила тока равна  $I = I_{\text{макс}}/2 = V/(2R) = 12,0 \text{ В}/60 \text{ Ом} = 200 \text{ мА}$ , и

мощность, отбираемая от батареи, равна  $P = I V = (0,20 \text{ А})(12 \text{ В}) = 2,4 \text{ Вт}$ .

г) Согласно (31.8), энергия, накопленная катушкой индуктивности в произвольный момент времени, равна

$$U = \frac{1}{2} L I^2,$$

где  $I$  – сила тока в катушке в данный момент. Скорость накопления энергии равна

$$\frac{dU}{dt} = L I \frac{dI}{dt}.$$

Чтобы найти  $dI/dt$ , надо продифференцировать (31.11):

$$\frac{dU}{dt} = L I \frac{V}{R \tau} e^{-t/\tau} =$$

$$= (0,22 \text{ Гн})(0,20 \text{ А}) \frac{12,0 \text{ В}}{30 \text{ Ом}} \frac{1}{7,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}} e^{-\ln 2} = 1,2 \text{ Вт}.$$

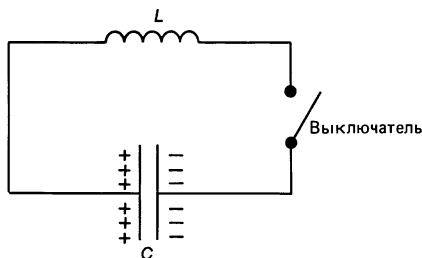
Получается, что только часть мощности, отбираемой от батареи, поступает в катушку индуктивности. На что идет остальная мощность?

## 31.5. LC-контур и электромагнитные колебания

Любая электрическая цепь помимо источника ЭДС может содержать три основных элемента: сопротивление, емкость и индуктивность. (В цепи могут находиться, конечно, и более сложные элементы, например диоды или транзисторы.) Выше были рассмотрены  $RC$ - и  $RL$ -цепочки. Исследуем теперь цепь, содержащую только емкость  $C$  и индуктивность  $L$ , – так называемый  $LC$ -контур (рис. 31.5). (Мы рассмотрим идеальный случай, когда катушка не обладает электрическим сопротивлением; аналогичный контур с учетом сопротивления будет проанализирован в следующем разделе.)

Пусть вначале конденсатор  $C$  на рис. 31.5 заряжен, так что на одной из его обкладок имеется заряд  $+Q_0$ , а на другой – заряд  $-Q_0$ . В момент  $t = 0$  выключатель замыкается и конденсатор начинает разряжаться; по мере разряда конденсатора ток  $I$  в катушке индуктивности нарастает. В каждый момент времени разность потен-

Рис. 31.5. LC-цепочка.



циалов на обкладках конденсатора  $V = Q/C$  (где  $Q$  – заряд конденсатора в данный момент) равна разности потенциалов на катушке, т. е. равна ЭДС самоиндукции  $-L(dI/dt)$ . Когда конденсатор полностью разрядится ( $Q = 0$ ), сила тока  $I$  в катушке достигнет максимального значения и перестанет изменяться ( $-LdI/dt = Q/C = 0$ ). Индукция магнитного поля катушки в этот момент также максимальна. Затем сила тока начинает уменьшаться, а заряд будет накапливаться на противоположных пластинах конденсатора. Когда сила тока уменьшится до нуля, заряд конденсатора достигнет максимального значения  $Q_0$ , но обкладка, прежде заряженная положительно, теперь будет заряжена отрицательно. (Чуть дальше это будет показано математически.) Затем конденсатор вновь начинает разряжаться, причем ток в цепи потечет в противоположном направлении. Так процесс перетекания заряда с одной обкладки конденсатора на другую через катушку индуктивности повторяется снова и снова. Говорят, что в LC-контуре происходят *электромагнитные колебания*. Этот процесс связан не только с колебаниями величины заряда, но и с перекачкой энергии. Вначале энергия сосредоточена в электрическом поле конденсатора; когда заряд конденсатора  $Q$  уменьшится до нуля, а сила тока в катушке максимальна, вся энергия будет сосредоточена в магнитном поле катушки. Таким образом, колебания сопровождаются перекачкой энергии из электрического поля в магнитное и обратно.

Попытаемся математически описать колебания в LC-контуре. В любой момент времени разность потенциалов на обкладках конденсатора равна ЭДС самоиндукции:

$$\frac{Q}{C} = -L \frac{dI}{dt},$$

где  $Q$  – заряд одной из пластин конденсатора в данный момент, а  $I$  – сила тока в катушке в этот же момент. Сила тока  $I$  обусловлена только перетеканием заряда конденсатора с одной обкладки на другую; поэтому  $I = dQ/dt$ . Тогда приведенное выше равенство можно переписать в виде

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0. \quad (31.13)$$

Это дифференциальное уравнение нам уже знакомо: оно имеет тот же вид, что и в случае простого гармонического движения [формула (14.3б)]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

где  $x$  – смещение от положения равновесия массы  $m$ , закрепленной на конце пружины с жесткостью  $k$ . В случае электромагнитных колебаний в качестве переменной в уравнение входит не координата  $x$ , а заряд  $Q$ . В разд. 14.2 было показано, что решение уравнения простого гармонического осциллятора имеет вид  $x = A \cos(\omega t + \phi)$ , где  $A$  – амплитуда,  $\omega$  – угловая частота колебаний ( $\omega = 2\pi f$ ), а  $\phi$  – начальная фаза. Поскольку эти два дифференциальных уравнения абсолютно идентичны, если отвлечься от названия переменных и констант, очевидно, что решение для  $Q$  в (31.13) также будет синусоидальным:

$$Q = Q_0 \cos(\omega t + \phi). \quad (31.14)$$

Мы уже знаем, что в случае простого гармонического осциллятора  $\omega = \sqrt{k/m}$  [см. (14.4)]; поскольку  $k/m$  – это коэффициент при  $x$  в (14.3б), а коэффициентом при  $Q$  в (31.13) является  $1/LC$ , следует ожидать, что в случае колебаний LC-контура

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (31.15)$$

где  $f$  – частота (в герцах). Чтобы убедиться в этом, подставим решение (31.14) в (31.13) с учетом того, что

$$d^2Q/dt^2 = -\omega^2 Q_0 \cos(\omega t + \phi):$$

$$-\omega^2 Q_0 \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{LC} Q_0 \cos(\omega t + \phi) = 0,$$

или

$$\left(-\omega^2 + \frac{1}{LC}\right) \cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Последнее равенство выполняется для любых  $t$ , только если  $-\omega^2 + 1/LC = 0$ , откуда и следует (31.15).

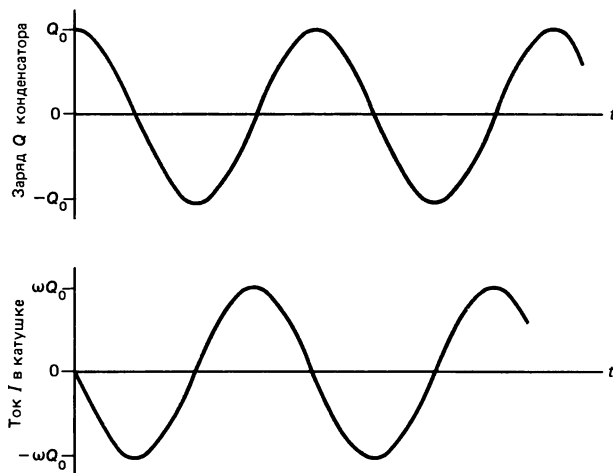
Формула (31.14) подтверждает, что заряд конденсатора в LC-контуре изменяется (осциллирует) по синусоидальному закону. В рассмотренном случае  $Q = Q_0$  при  $t = 0$ , поэтому начальная фаза  $\phi = 0$ .

Сила тока в катушке равна

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \phi), \quad (31.16)$$

т. е. также изменяется по синусоидальному закону. Максимальное значение силы тока  $I_{\text{макс}} = \omega Q_0 = Q_0/\sqrt{LC}$ . Графики изменения заряда и силы тока в соответствии с

**Рис. 31.6.** Графики изменения заряда  $Q$  и силы тока  $I$  в  $LC$ -цепочке. Период  $T = 1/f = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}$ .



формулами (31.15) и (31.16) представлены на рис. 31.6; обратите внимание на то, что они подтверждают наши качественные рассуждения, приведенные в начале этого раздела.

Рассмотрим теперь колебания в  $LC$ -контуре с точки зрения энергии. Энергия, запасенная электрическим полем конденсатора в произвольный момент времени  $t$ , равна [см. (25.5)]

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi);$$

в этот же момент энергия магнитного поля катушки составляет

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{L\omega^2 Q_0^2}{2} \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t + \phi)$$

[здесь мы воспользовались формулой (31.15)]. Если считать  $\phi = 0$ , то в моменты  $t = 0, t = T, t = 2T$  и т. д. (где  $T = 1/f = 2\pi/\omega$  есть период колебаний) вся энергия сосредоточена в электрическом поле конденсатора:  $U_E = Q_0^2/2C, U_B = 0$ . В моменты же  $t = T/2, t = 3T/2, t = 5T/2$  и т. д. вся энергия накапливается магнитным полем катушки,  $U_E = 0, U_B = Q_0^2/2C$ .

Полная энергия в любой момент времени равна

$$U = U_E + U_B = \frac{Q_0^2}{2C} [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{Q_0^2}{2C}.$$

Следовательно, полная энергия остается постоянной, т. е. энергия сохраняется.

**Пример 31.6.** Конденсатор емкостью 1200 пФ заряжен от батареи до напряжения 500 В. В момент  $t = 0$  его отсоединя-

ют от батареи и подключают к катушке с индуктивностью 75 мГн. Определите а) начальный заряд конденсатора; б) макси-

мальную силу тока в контуре; в) частоту  $f$  и период колебаний  $T$ ; г) полную энергию колебаний.

**Решение.**

а)  $Q_0 = CV = (1,2 \cdot 10^9 \text{ Ф})(500 \text{ В}) = 6,0 \times 10^{-7} \text{ Кл}$ ; б) согласно (31.16),  $I_{\text{макс}} =$

$$\begin{aligned} &= \omega Q_0 = Q_0 / \sqrt{LC} = \\ &= (6,0 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}) / \sqrt{(1,2 \cdot 10^{-9} \text{ Ф})(0,075 \text{ Гн})} = \\ &= 63 \text{ мА}; \quad \text{в)} \quad f = \omega / 2\pi = 1 / (2\pi \sqrt{LC}) = \\ &= 17 \text{ кГц}; \quad T = 1/f = 6,0 \cdot 10^{-5} \text{ с}; \quad \text{г)} \quad U = \\ &= Q_0^2 / 2C = (6,0 \cdot 10^{-7} \text{ Кл})^2 / [2(1,2 \cdot 10^{-9} \text{ Ф})] = \\ &= 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

### 31.6. Колебательный контур с сопротивлением ( $RCL$ -контур)

Рассмотренный в предыдущем разделе колебательный контур идеализирован. Любая реальная цепь всегда обладает активным сопротивлением  $R$ ; поэтому мы перейдем к изучению  $RCL$ -контра (рис. 31.7).

Пусть вновь конденсатору сообщают начальный заряд  $Q_0$  и в момент  $t = 0$  замыкается выключатель. Так как цепь содержит сопротивление, следует ожидать, что часть энергии будет превращаться в тепло, и колебания не будут незатухающими, как в  $LC$ -контуре. Применяя правило Кирхгофа к этой цепи, получаем

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0.$$

Это уравнение совпадает с полученным нами в разд. 31.5 с дополнительным падением напряжения на резисторе  $IR$ . Так как  $I = dQ/dt$ ,

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0. \quad (31.17)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной  $Q$  имеет такой же вид, как и уравнение (14.16) гармонического осциллятора с затуханием:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

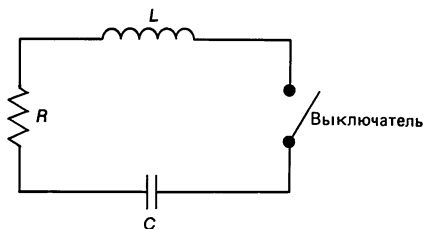
Следовательно, колебания  $RCL$ -контра можно анализировать по аналогии с результатами разд. 14.7 для затухающих гармонических колебаний. В системе либо могут происходить затухающие колебания (рис. 31.8, а; докритическое затухание), либо поведение системы может быть критическим (рис. 31.8, б) или сверхкритическим (рис. 31.8, в) — все зависит от соотношения между  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Сравнив уравнение (31.17) с уравнением затухающих гармонических колебаний, приведенным выше, мы видим, что между входящими в них константами можно установить следующее соответствие:

$L$  играет роль  $m$ ,

$R$  играет роль  $b$ ,

$1/C$  играет роль  $k$ .

Согласно разд. 14.7, в системе происходят затухающие

Рис. 31.7.  $RCL$ -контур.

колебания, если

$$b^2 < 4mk \quad (\text{докритическое затухание}).$$

Аналогично в случае электромагнитных колебаний затухание будет докритическим, если

$$R^2 < \frac{4L}{C}.$$

Если величина  $R$  мала по сравнению с  $\sqrt{4L/C}$ , то угловая частота  $\omega'$  равна

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (31.18)$$

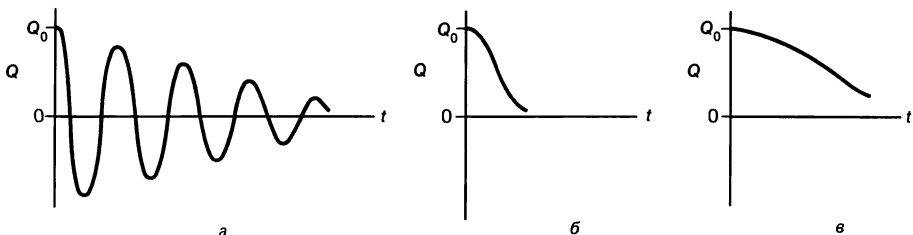
[ср. с (14.21)], а заряд  $Q$  изменяется во времени по закону

$$Q = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega't + \phi), \quad (31.19)$$

где  $\phi$  – начальная фаза [ср. с (14.20)].

Колебательные контуры играют важную роль во многих электронных устройствах: в радиоприемниках и телевизорах с их помощью настраиваются на нужную станцию, в магнитофонах имеется генератор с колебательным контуром для создания переменного «тока подмагничивания» при записи и т. п. Поскольку реальный колебательный контур всегда обладает сопротивлением, генератор колебаний, как правило, нуждается в периодической подкачке энергии, чтобы восполнить потери энергии, выделяющейся на сопротивлении контура в виде тепла.

Рис. 31.8. Изменение заряда  $Q$  во времени в  $RCL$ -контуре при докритическом (а), критическом (б) и сверхкритическом (в) затухании.



**Пример 31.7.** В момент  $t = 0$  замыкается цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки с индуктивностью  $L = 40$  мГн, резистора  $R = 3,0$  Ом и заряженного конденсатора  $C = 4,8$  мкФ.

а) Покажите, что в этом контуре будут происходить колебания. б) Определите частоту колебаний. в) За какое время начальная амплитуда колебаний заряда уменьшится наполовину? г) Чему равно амплитудное значение силы тока? д) При каком значении  $R$  колебания в контуре не возникают?

**Решение.** а) Затухание будет докритическим, если  $R^2 < 4L/C$ . Это условие выполнено:  $R^2 = 9,0 \text{ Ом}^2$  меньше  $4L/C = 4(0,040 \text{ Гн})/(4,8 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}) = 3,3 \cdot 10^4 \text{ Ом}^2$ , поэтому в контуре будут возбуждаться колебания. б) Так как величина  $R$  мала по сравнению с  $L/C$ , можно воспользоваться формулой (31.18):

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 2,3 \cdot 10^3 \text{ Гц.}$$

в) Согласно (31.19), амплитуда уменьшится вдвое, когда

$$e^{-\frac{R}{2L}t} = \frac{1}{2},$$

или

$$t = \frac{2L}{R} \ln 2 = 18 \text{ мс.}$$

г) Чтобы найти  $I$ , продифференцируем (31.19):

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \left( -\frac{R}{2L} \cos \omega't - \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin \omega't \right)$$

(так как  $\omega' \approx \sqrt{1/LC}$ ). Поскольку  $R$  много меньше  $\sqrt{4L/C}$  (см. п. «а»), членом  $\cos \omega't$  можно пренебречь, и тогда

$$I \approx -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega't.$$

Начальная амплитуда силы тока равна  $Q_0/\sqrt{LC}$ ; численное значение найти невозможно, так как мы не знаем  $Q_0$ . д) Чтобы затухание было критическим или сверхкритическим, должно быть

$$R^2 \geq 4L/C = 3,3 \cdot 10^4 \text{ Ом}^2,$$

откуда  $R$  должно быть больше 180 Ом.

### Заключение

Изменение тока в катушке будет возбуждать ЭДС индукции в расположенной поблизости другой катушке. *Взаимная индуктивность* (коэффициент взаимной индукции)  $M$  определяется как коэффициент пропорциональности между ЭДС индукции  $\mathcal{E}_2$  во второй катушке и скоростью изменения силы тока в первой:  $\mathcal{E}_2 = -M dl_1/dt$ . В изолированной катушке изменяющийся ток возбуждает ЭДС самоиндукции (противо-ЭДС); катушка обладает индуктивностью (*коэффициентом самоиндукции*)  $L$ :  $\mathcal{E} = -L dl/dt$ . ЭДС самоиндукции катушки индуктивности проявляется в виде реактивного сопротивления (*импеданса*) переменному току.

Энергия, накопленная катушкой индуктивности  $L$ , когда в ней течет ток  $I$ , составляет  $\frac{1}{2} LI^2$ . Эта энергия сосредоточена в магнитном поле катушки индуктивности. Плотность энергии любого магнитного поля с индукцией  $B$  равна  $\frac{1}{2} (B^2/\mu)$ , где  $\mu$  – магнитная проницаемость данной области пространства.

При последовательном соединении индуктивности  $L$  и сопротивления  $R$  с источником ЭДС сила тока в цепи возрастает по экспоненциальному закону  $1 - e^{-t/\tau}$ , где  $\tau = L/R$  – постоянная времени, и приближается к максимальному значению  $I = V/R$ . Если батарею внезапно отключить от цепи, оставив цепь замкнутой, сила тока будет



уменьшаться по экспоненциальному закону  $e^{-t/\tau}$  с той же постоянной времени  $\tau$ .

Сила тока в  $LC$ -контуре (или заряд на конденсаторе) изменяется по синусоидальному закону, неопределенно долго совершая простые гармонические колебания. Сила тока в  $RCL$ -контуре (или заряд на конденсаторе), в котором конденсатор в начальный момент был заряжен, либо совершает затухающие колебания, либо испытывает критическое и сверхкритическое затухание.

## Вопросы

1. Для передачи слабого сигнала на расстояние используют экранированный кабель, в котором токонесущая жила закрыта изоляцией, а затем цилиндрическим проводником. Для чего необходим этот экран?
2. Почему два провода, по которым течет переменный ток, стараются располагать близко друг к другу?
3. Первичная обмотка трансформатора в телефонной линии имеет сопротивление  $0,10 \text{ Ом}$ ; к ней приложено напряжение переменного тока  $2400 \text{ В}$ . Можете ли вы оценить силу тока в первичной обмотке? Будет ли это  $24000 \text{ А}$ ? Объясните.
4. Трансформатор, рассчитанный на включение в сеть переменного тока напряжением  $120 \text{ В}$ , часто сгорает, если на него подают постоянное напряжение  $120 \text{ В}$ . Почему? (Подсказка: активное сопротивление первичной обмотки обычно очень мало.)
5. Как следует расположить две круглые плоские катушки, чтобы их взаимная индуктивность была а) максимальной; б) минимальна (не разнося их на большое расстояние)?
6. Если бы две катушки на рис. 31.1 были соединены электрически, обладали бы они взаимной индуктивностью?
7. Представьте себе, что вторая катушка с  $N_2$  витками на рис. 31.2 сдвинута к одному из концов соленоида. Как это повлияет на взаимную индуктивность?
8. Если у соленоида имеется железный сердечник, будет ли его индуктивность  $L$  постоянной? Объясните ответ. Что вы можете сказать о взаимной индуктивности обмоток трансформатора с железным сердечником?
9. Для создания однородных магнитного и электрического полей используются соответственно длинный тонкий соленоид и конденсатор с пластинами большой площади и узким зазором. Постарайтесь найти как можно больше аналогий и различий в этих устройствах.
10. Подразумевает ли взаимная индуктивность наличие самоиндукции? Объясните.
11. Где индуктивность единицы длины соленоида больше: в середине или у торцов?
12. Какую форму следует придать отрезку провода заданной длины, чтобы его индуктивность была максимальной? Минимальной?
13. Если направление тока в батарее совпадает с ее ЭДС, энергия батареи уменьшается; если же направление тока противоположно ЭДС, то энергия батареи увеличивается (батарея заряжается). Справедливо ли это для катушки индуктивности?
14. Где плотность энергии максимальна: у торцов соленоида или в его середине?
15. Два соленоида обладают одинаковыми длиной и площадью поперечного (круглого) сечения. Обмотки обоих соленоидов плотно намотаны, но у одного более толстым проводом, чем у другого. У какого из соленоидов будет больше индуктивность? постоянная времени?
16. Влияет ли ЭДС батареи на рис. 31.4, а на время, за которое сила тока в  $LR$ -цепочке достигает а) заданной доли максимального значения; б) заданного значения?
17. В цепи с большой постоянной времени течет стационарный ток. При размыкании цепи могут возникнуть представляющие иногда опасность большая искра или электрическая дуга. Объясните.
18. Два круглых витка (не связанных электрически) расположены один за другим, и вы смотрите вдоль линии, соединяющей их центры. К ближайшему витку подключается батарея, и ток в нем течет против часовой стрелки. а) В каком направлении потечет индукционный ток в дальнем витке? б) Как долго он длится? в) Как изменится длительность индукционного тока, если удвоить диаметр провода? Витков?
19. В момент, когда батарея подключается к  $RL$ -цепочке на рис. 31.4, а, ЭДС на катушке индуктивности максимальна, хотя сила тока в ней равна нулю. Объясните.
20. Объясните возникновение в соленоиде с замкнутыми между собой концами обмотки колебаний, как в  $LC$ -контуре. Откуда берется емкость?

21. За счет чего поддерживаются колебания в  $LC$ -контуре после полного разряда конденсатора?
22. Всегда ли в  $RCL$ -контуре (рис. 31.7) сила тока через катушку индуктивности равна силе тока через резистор?
23. Может ли катушка индуктивности вообще не иметь активного сопротивления? Может ли катушка индуктивности не иметь емкости? Может ли конденсатор не обладать индуктивностью? Может ли резистор не обладать индуктивностью?
24. Обсудите физическую причину, по которой  $L$  ведет себя подобно  $m$ ,  $R$  подобно  $b$ ,  $1/C$  подобно  $k$ , на основе аналогии колебаний в  $RCL$ -контуре и гармонического движения с затуханием.
25. Катушка индуктивности, конденсатор и (небольшое) сопротивление соединены параллельно. В момент  $t = 0$  сила тока  $I$  в цепи равна нулю, а заряд конденсатора равен  $Q_0$ . Как будет изменяться заряд  $Q$  во времени?

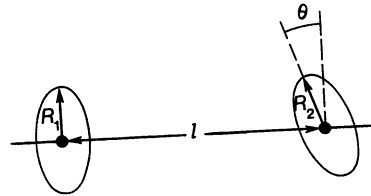


Рис. 31.10.

- катушке равномерно убывает от 4,0 А до нуля за 80 мс. Определите а) ЭДС индукции во второй катушке; б) взаимную индуктивность  $M$ .
3. (II) Небольшая тонкая катушка, содержащая  $N_2$  витков площадью  $A_2$ , помещена внутрь длинного соленоида вблизи его центра. Длина соленоида  $L$ , площадь сечения  $A_1$ , число витков  $N_1$ . Выразите взаимную индуктивность как функцию угла  $\theta$  между плоскостью малой катушки и осью соленоида.
4. (II) Длинный прямоугольный проводник и небольшая прямоугольная рамка лежат в одной плоскости (рис. 31.9). Выразите их взаимную индуктивность через  $l_1$ ,  $l_2$  и  $w$ , считая проводник очень длинным по сравнению с  $l_2$  и  $w$  и остальные части цепи удаленными на большое расстояние по сравнению с  $l_2$  и  $w$ .
5. (II) Определите взаимную индуктивность единицы длины двух длинных соленоидов, вложенных друг в друга, если их радиусы равны  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_2 < r_1$ ), а число витков на единицу длины равно  $n_1$  и  $n_2$ .
6. (II) Определите взаимную индуктивность  $M$  двух небольших катушек с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , находящихся друг от друга на расстоянии  $l$ , большом по сравнению с  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 31.10). Выразите зависимость  $M$  от угла между плоскостями катушек  $\theta$ . Линия, соединяющая центры катушек, перпендикулярна плоскости катушки 1. Что если это предположение не выполняется?

### Задачи

#### Раздел 31.1

1. (I) Пусть диаметр второй катушки в примере 31.1 (рис. 31.2) вдвое больше диаметра соленоида, но катушка соосна с соленоидом. Чему равна взаимная индуктивность? (Соленоид считайте очень длинным.)
2. (II) Катушка длиной 44 см содержит 500 витков, намотанных на железный сердечник (среднее значение  $\mu = 2000\mu_0$ ), на котором имеется и вторая катушка с 200 витками. Радиус каждой катушки 2,0 см. Сила тока в первой

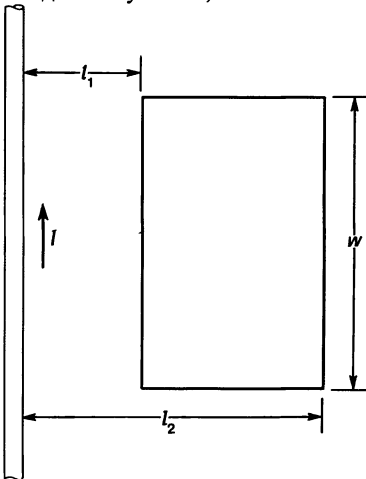


Рис. 31.9.

#### Раздел 31.2

7. (I) Чему равна ЭДС индукции, если в катушке с индуктивностью 130 мГн сила тока равномерно возрастает от 20,0 до 28,0 мА за 140 мс?
8. (I) Чему равна индуктивность  $L$  катушки диаметром 5,7 см и длиной 1,2 м, содержащей 20 000 витков?
9. (I) Чему равна индуктивность катушки, ЭДС самоиндукции которой равна 6,50 В, при изменении силы тока от  $-12,0$  до 23,0 мА за 11,0 мс?
10. (I) Чему равна индуктивность коаксиального кабеля длиной 30 м, внутренний и внешний проводники которого имеют радиусы соответственно 2,0 и 4,0 мм?

11. (I) На катушке с индуктивностью 0,320 Гн возбуждается ЭДС самоиндукции 35 В при увеличении силы тока за 2,0 мс от 0 до  $I_0$ . Чему равно значение  $I_0$ ?

12. (II) Сколько витков у катушки длиной 8,0 см и диаметром 2,2 см, если ее индуктивность составляет 0,25 мГн? Сколько витков должно быть у катушки с такой же индуктивностью при наличии железного сердечника ( $\mu = 10^3 \mu_0$ )?

13. (II) Радиус внешнего проводника коаксиального кабеля равен 3,0 мм. Каким должен быть радиус внутреннего проводника, чтобы индуктивность кабеля не превышала 40 нГн на 1 м?

14. (II) а) Покажите, что если в двух контурах (например, в двух катушках на рис. 31.1) текут токи  $I_1$  и  $I_2$ , то пронизывающие их магнитные потоки будут равны  $\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$  и  $\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$ . б) Выведите формулу для ЭДС индукции каждой катушки, выразив ее через скорость изменения силы тока в катушках.

15. (II) Провод, которым была плотно обмотана обмотка соленоида, используют в плотной обмотке другого соленоида вдвое меньшего диаметра. Во сколько раз различаются индуктивности этих соленоидов?

16. (II) Катушка обладает электрическим сопротивлением 2,50 Ом и индуктивностью 0,418 Гн. Чему равна разность потенциалов на ее клеммах, если сила тока в данный момент составляет 8,00 А и возрастает со скоростью 4,50 А/с?

17. (II) а) Покажите, что индуктивность  $L$  тороидальной катушки (рис. 29.10) радиусом  $R$ , содержащей  $N$  витков радиусом  $r$ , равна

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 r^2}{2R},$$

если  $R \gg r$ . Поле внутри тора однородно (верно ли это на самом деле?). Согласуется ли полученный результат с формулой для индуктивности соленоида? Должно ли существовать это согласие? б) Рассчитайте индуктивность  $L$  большого тора, если диаметр витков равен 2,0 см, а диаметр всего кольца 50 см. Поле внутри тора однородно. Обмотка содержит 300 витков.

18. (II) а) Если пренебречь взаимной индуктивностью, чему равна индуктивность двух катушек, соединенных последовательно? б) Параллельно? в) Как влияет на результат взаимная индукция (взаимное расположение двух катушек)?

19. (II) Покажите, что индуктивность тора с прямоугольным сечением (рис. 31.11) дается формулой

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

где  $N$  – полное число витков, а  $R_1$ ,  $R_2$  и  $h$  показаны на чертеже. (Подсказка: пользуясь законом Ампера, определите индукцию  $B$  как функцию  $r$  внутри тора, а затем проинтегрируйте.)

20. (II) Два параллельных прямолинейных тонких провода диаметром  $r$  каждый находятся на расстоянии  $l$  друг от друга и подают ток в схему, находящуюся на некотором удалении. Пренебрегая полем внутри каждого проводника, покажите, что индуктивность единицы их длины равна  $(\mu_0/\pi) \ln [(l-r)/r]$ .

21. (II) Разность потенциалов на клеммах катушки равна 15,5 В, когда сила тока в катушке составляет 360 мА и изменяется со скоростью 240 мА/с. Спустя некоторое время разность потенциалов составляет 6,2 В, а сила тока равна 300 мА и уменьшается со скоростью 180 мА/с. Определите индуктивность и активное сопротивление катушки.

22. (III). По длинному прямолинейному проводу течет ток  $I$ , равномерно распределенный по сечению проводника  $A$ . а) Определите индуктивность единицы длины, обусловленную только полем внутри проводника. б) Сможете ли вы рассчитать индуктивность, обусловленную полем вне проводника? Если да, то сделайте это. Обсудите полученный ответ.

23. (III) а) Покажите, что полная индуктивность двух катушек, соединенных последовательно и помещенных близко друг к другу, равна

$$L = L_1 + L_2 \pm M,$$

где  $L_1$  и  $L_2$  – индуктивности катушек, а  $M$  – коэффициент взаимной индукции. Объясните смысл знака  $\pm$ . б) Как можно уменьшить  $M$  до нуля или почти до нуля? в) Определите полную индуктивность двух катушек, соединенных параллельно, пренебрегая взаимной индуктивностью. Как изменится ответ, если взаимной индуктивностью пренебречь нельзя?

### Раздел 31.3

24. (I) Индукция магнитного поля соленоида (без сердечника) длиной 10 см и диаметром 2,0 см равна 0,50 Тл. Оцените приблизительно энергию магнитного поля соленоида.

25. (I) Какая энергия запасена в катушке с индуктивностью 400 мГн в момент, когда сила тока в ней составляет 2,0 А?

26. (I) Считая среднюю индукцию магнитного поля Земли равной  $0,50 \cdot 10^{-4}$  Тл, определите энергию магнитного поля, заключенного в шаровом слое от 0 до 10 км над поверхностью Земли.

27. (I) Сильные магнитные и электрические поля, достижимые в лабораторных условиях,

обычно составляют 2,0 Тл и  $1,0 \cdot 10^4$  В/м. а) Определите плотность энергии таких полей и сравните полученные значения. б) При какой напряженности электрического поля плотность энергии будет такой же, как у магнитного поля с индукцией 2,0 Тл?

28. (I) В плоской электромагнитной волне (гл. 33) электрическое и магнитное поля связаны соотношением  $E = cB$ , где  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  — скорость света. В каком соотношении находятся энергии электрического и магнитного полей в такой волне?

29. (II) Чему равна плотность энергии в центре витка радиусом 8,0 см, по которому течет ток 30 А?

30. (II) Рассчитайте плотности энергии электрического и магнитного полей у поверхности медного проводника диаметром 3,0 мм, по которому течет ток 15 А.

31. (II) Определите плотность энергии внутри тора на рис. 31.11 как функцию  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ), а затем интегрированием по объему найдите полную энергию магнитного поля внутри тороидальной катушки с  $N$  витками, в которых течет ток  $I$ .

32. (II) Определите полную энергию магнитного поля в пространстве между внешним и внутренним проводниками, приходящуюся на единицу длины коаксиального кабеля [воспользуйтесь формулой (31.9) и проинтегрируйте по объему]. Сравните полученный ответ с результатом примера 31.4.

### Раздел 31.4

33. (I) Выразите через постоянную времени  $LR$ -цепочки на рис. 31.4, а время, после которого напряжение на резисторе упадет до 1,0% своего первоначального значения.

34. (I) Через какое время (выраженное в постоянных времени) сила тока на рис. 31.4, б достигнет а) 10%; б) 1,0%; в) 0,1% максимального значения?

35. (II) Куда кроме катушки поступает в примере 31.5 мощность от батареи? Подтвердите расчетом, что энергия сохраняется.

36. (II) Определите  $dI/dt$  при  $t = 0$  (в момент подключения батареи) в цепи на рис. 31.4, а и покажите, что если сила тока будет продолжать нарастать с такой же скоростью, то она достигнет максимального значения за время, равное одной постоянной времени.

37. (II) Ток в  $RL$ -цепочке возрастает от нуля до половины максимального значения за 1,56 мс. Определите а) постоянную времени цепочки; б) сопротивление  $R$ , если  $L = 310$  Гн.

38. (II) Два соленоида с плотной намоткой имеют одинаковые длину и площадь круглого

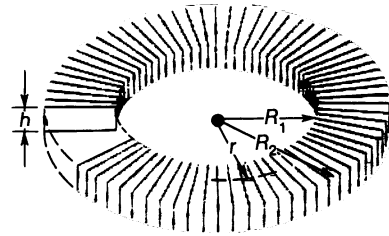


Рис. 31.11. Тор прямоугольного сечения, по катушке которого, содержащей  $N$  витков, течет ток  $I$ .

поперечного сечения. Соленоид 1 намотан вдвое более тонким проводом, чем соленоид 2. а) Чему равно отношение их индуктивностей? б) Чему равно отношение их постоянных времени (если в цепи нет других сопротивлений)?

39. (II) а) Определите энергию, накопленную катушкой  $L$ , как функцию времени для  $RL$ -цепочки, изображенной на рис. 31.4, а. б) За какое время (выраженное через постоянную времени) энергия магнитного поля достигнет 99% максимального значения?

40. (II) Определите в цепи на рис. 31.12 силу тока через каждый из резисторов ( $I_1, I_2, I_3$ ) а) в момент замыкания ключа; б) спустя большое время после замыкания ключа; в) в момент размыкания ключа после длительного замыкания; г) спустя длительное время после размыкания ключа.

### Раздел 31.5

41. (I) Переменный конденсатор настройки радиоприемника с амплитудной модуляцией имеет емкость 1500 пФ, когда приемник настроен на станцию, работающую на частоте 550 кГц. а) Какой должна быть емкость для настройки контура на станцию, работающую на частоте

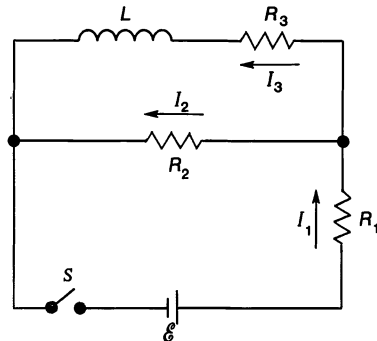


Рис. 31.12.

1600 кГц? б) Чему равна индуктивность (по предположению постоянная) контура?

42. (I) а) Выразите заряд  $Q$  конденсатора  $LC$ -контура как функцию времени, если  $Q = 0$ ,  $I = I_0$  при  $t = 0$ . б) Как на практике обеспечить такие начальные условия?

43. (I) Пользуясь определениями фарада и генри, покажите, что  $1/\sqrt{LC}$  имеет размерность  $c^{-1}$ .

44. (II) Конденсатор емкостью 660 пФ заряжен до напряжения 100 В и быстро переключен на катушку с индуктивностью 75 мГн. Определите а) частоту колебаний; б) амплитуду силы тока; в) максимальную энергию магнитного поля.

45. (II) В  $LC$ -контуре  $Q = Q_0$ ,  $I = 0$  при  $t = 0$ . а) Через какую долю периода  $T$ , считая от  $t = 0$ , энергия впервые распределится поровну между катушкой и конденсатором? б) Каким в этот момент будет заряд конденсатора?

### Раздел 31.6

46. (II) Через какое время полная энергия колебаний в  $RCL$ -контуре уменьшится до половины начального значения? (См. рис. 31.7; считайте, что  $R \ll \sqrt{4L/C}$ .)

47. (II) Какое сопротивление надо ввести в  $LC$ -контур ( $L = 200$  мГн,  $C = 1200$  пФ), чтобы изменить частоту колебаний на 0,10%? Увеличится или уменьшится частота колебаний?

48. (II) В  $RCL$ -контуре за один период колебаний в тепло переходит 3,5% энергии. Чему равна величина  $R$ , если  $L = 80$  мГн и  $C = 1,00$  мкФ?

49. (II) а) Выведите временную зависимость энергии  $U = U_E + U_B$ , запасенной электрическим и магнитным полями, для  $RCL$ -контура с докритическим затуханием. Выразите энергию через начальный заряд  $Q_0$  на конденсаторе. б) Покажите, как величина  $dU/dt$  связана с мощностью, выделяющейся в резисторе ( $I^2 R$ ).

50. (II) а) Продифференцировав (31.17), получите дифференциальное уравнение для силы тока  $I$  в  $RCL$ -контуре (рис. 31.7). б) Получите общее решение для  $I$ , если цепь замыкается в момент  $t = 0$ , когда заряд конденсатора равен  $Q_0$ . Считайте  $R \ll \sqrt{4L/C}$ . в) Сравните полученный результат с п. «г» примера 31.7 и обратите внимание на имеющиеся различия. г) Какие осложнения возникнут, если  $R$  будет намного меньше  $\sqrt{4L/C}$ ; например, если  $R \approx \sqrt{L/C}$ ?

51. (II) Пользуясь формулой (31.19) с  $\phi = 0$ , покажите, что сила тока  $I$  в  $RCL$ -контуре с малым затуханием изменяется по закону

$$I \approx -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega't + \delta), \text{ где}$$

$$\delta = \arctg \frac{R}{2L\omega'}$$

52. (II) Покажите, что начальная фаза  $\phi$  в формуле (31.19) равна

$$\phi = \text{arccotg} \left( \frac{4L}{R^2 C} \right)^{1/2},$$

если  $I = 0$  при  $t = 0$  в схеме на рис. 31.7; считайте  $R^2 \ll 4L/C$ .

53. (III) Покажите, что тепловые потери энергии в  $RCL$ -контуре со слабым затуханием ( $R^2 \ll 4L/C$ ) за один период колебаний равны приблизительно

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{2\pi R}{L\omega} = \frac{2\pi}{Q}.$$

Параметр  $Q = L\omega/R$  называется *добротностью* (показателем добротности, *качеством*) контура и характеризует затухание: чем выше  $Q$ , тем слабее затухание и тем меньшая подкачка энергии требуется для поддержания колебаний.

54. (III) К  $RCL$ -цепочке на рис. 31.7 подключена батарея с напряжением  $V$ . В момент  $t = 0$  ключ замыкается. Считая затухание сверхкритическим ( $R^2 \gg 4L/C$ ), определите зависимость силы тока от времени и постройте график. Сравните полученный результат с результатом для  $RC$ -цепочки ( $L = 0$ ). Реальные  $RC$ -цепи всегда обладают индуктивностью, поэтому результат этой задачи больше соответствует действительности, чем результат для безындукционной  $RC$ -цепочки.

\* Задачи с использованием программируемого калькулятора<sup>1)</sup>

\*55. (III) Для цепи, описанной в примере 31.7, проведите численное интегрирование для силы тока  $I (= dQ/dt)$  и заряда на конденсаторе  $Q$  и постройте графики от  $t = 0$  до  $t = 3,0$  мс. Пусть  $Q = 3,50 \cdot 10^{-4}$  Кл при  $t = 0$ . Добейтесь точности 2% или лучше.<sup>1)</sup>

\*56. (III) а) При каком значении  $R$  затухание в цепи на рис. 31.7 будет критическим? б) Для найденного значения  $R$  вновь решите задачу 55 (см. примечание). в) Решите задачу 55 для вдвое меньшего значения  $R$ .

\*57. (III) Пусть конденсатор в цепи из примера 31.7 вначале не заряжен, и в момент  $t = 0$  в цепь последовательно включается батарея с напряжением 12,0 В. С помощью численного интегрирования постройте график временной зависимости силы тока  $I$  от  $t = 0$  до  $t = 5,0$  мс.

<sup>1)</sup> См. разд. 2.10 и задачи 64 и 67 в гл. 14.