

В разд. 27.5, 31.4–31.6 мы уже рассматривали цепи, содержащие резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности в различных сочетаниях, но лишь при таких условиях, когда их подключали к источнику ЭДС постоянного тока или когда источники ЭДС вообще отсутствовали (как, например, при разряде конденсатора на резистор или в случае колебаний в  $LC$ - и  $RCL$ -контурах). В этой главе мы рассмотрим подключение таких цепей к источнику переменной ЭДС. Важность *цепей переменного тока* объясняется в первую очередь тем, что большое число генераторов переменного тока (см. разд. 30.5), вырабатывающих синусоидальное напряжение, производят основную часть всей электроэнергии в мире. Кроме того, любое изменяющееся во времени напряжение может быть представлено в виде суммы синусов и косинусов с различными частотами (разложение в ряд Фурье). Таким образом, важную роль играет поведение резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности в цепях синусоидального переменного тока.

### 32.1. Введение: цепи переменного тока

Коротко о переменном токе уже говорилось в разд. 26.7; мы видели, что для токов и напряжений, изменяющихся по синусоидальному закону, их эффективное (среднеквадратичное) значение связано с амплитудой соотношением

$$V_{\text{эфф}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Источник переменной ЭДС, обозначаемый на схемах символом  $\text{---}\ominus\text{---}$ , вырабатывает синусоидальную ЭДС с частотой  $f$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t = \mathcal{E}_0 \sin 2\pi f t, \quad (32.1)$$

где  $\mathcal{E}_0$  – пиковое (амплитудное) значение ЭДС. Естественно предположить, что сила тока в цепи также будет синусоидальной и с той же частотой (разд. 14.8). Далее

мы покажем, что это действительно так; однако сила тока может не совпадать по фазе с ЭДС, т. е.

$$I = I_0 \sin(\omega t + \phi). \quad (32.2)$$

Наша задача будет состоять в том, чтобы выразить пиковое значение силы тока  $I_0$  и фазу  $\phi$  через параметры цепи  $\mathcal{E}_0$ ,  $f$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .

Рассмотрим вначале, как ведут себя в цепи переменного тока резистор, конденсатор и катушка индуктивности, подключенные к источнику переменной ЭДС, изменяющейся согласно (32.1).

## 32.2. Резистор в цепи переменного тока

Если к источнику переменной ЭДС подключен только резистор ( $L = C = 0$ ), сила тока через резистор, согласно закону Ома, будет изменяться в соответствии с изменением ЭДС:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin \omega t, \quad (32.3a)$$

где  $V$  — напряжение на резисторе в данный момент и  $V = \mathcal{E}$  согласно правилу Кирхгофа ( $V_0 = \mathcal{E}_0$  — пиковое значение напряжения). Соответствующий график приведен на рис. 32.1, б, где напряжение показано сплошной линией, а сила тока — штриховой. Сила тока и напряжение изменяются в фазе, так что в (32.2)  $\phi = 0$ . Амплитудное значение силы тока равно

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}. \quad (32.3b)$$

Электрическая энергия переходит в резисторе в тепло (разд. 26.7), так что средняя тепловая мощность равна

$$\bar{P} = \overline{IV} = I_{\text{эфф}}^2 R = \frac{V_{\text{эфф}}^2}{R}.$$

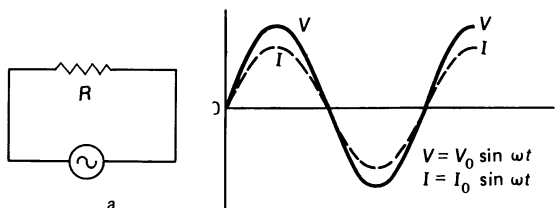


Рис. 32.1. Резистор в цепи переменного тока. Ток и напряжение на резисторе изменяются в фазе.

### 32.3. Конденсатор в цепи переменного тока

Когда конденсатор  $C$  непосредственно подключается к батарее, его обкладки быстро приобретают одинаковый по величине и противоположный по знаку заряд, но постоянный ток не течет через конденсатор<sup>1)</sup>. Если же конденсатор подключен к источнику переменной ЭДС (рис. 32.2, а; в рассматриваемой цепи  $R = L = 0$ ), то через конденсатор непрерывно течет переменный ток. Это может происходить, поскольку при включении напряжения переменного тока происходит перетекание заряда, так что одна обкладка заряжается отрицательно, а другая — положительно. Однако не успевает конденсатор полностью зарядиться, как полярность напряжения изменяется, и заряды начинают двигаться в противоположном направлении. Поэтому переменный ток в цепи течет непрерывно, пока к конденсатору приложено переменное напряжение.

Рассмотрим этот процесс более детально. Согласно правилу Кирхгофа, ЭДС источника в любой момент равна напряжению на обкладках конденсатора  $V = Q/C$ , где  $Q$  — заряд конденсатора в этот момент, т. е.

$$V = \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t.$$

Заряд  $Q$  на обкладках изменяется в фазе с напряжением. Но что же можно сказать о силе тока в цепи? В любой момент  $I = dQ/dt$  и

$$I = \frac{dQ}{dt} = \omega C \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (32.4a)$$

Пользуясь тригонометрическим тождеством  $\cos \theta = \sin(\theta + 90^\circ)$ , можно написать

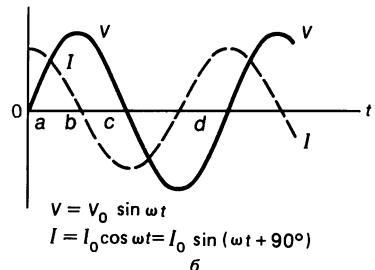
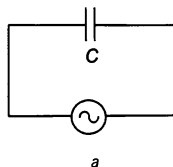
$$I = I_0 \sin(\omega t + 90^\circ), \quad (32.4б)$$

где

$$I_0 = \omega C \mathcal{E}_0 \quad (32.4в)$$

есть амплитудное значение силы тока, а фазовый угол

Рис. 32.2. Конденсатор в цепи переменного тока. Ток опережает напряжение на четверть периода, или на  $90^\circ$ . [Если принять  $I = I_0 \sin \omega t$ , как будет сделано в разд. 32.5, то  $V = V_0 \sin(\omega t - 90^\circ)$ .]



<sup>1)</sup> Если только конденсатор не обладает «утечкой». В противном случае постоянный ток утечки течет через конденсатор.

$\phi = 90^\circ$ . Графики силы тока  $I$  и напряжения  $V (= \mathcal{E}_0 \sin \omega t)$  на конденсаторе показаны на рис. 32.2, б; из графика, так же как из формулы (32.4а) или (32.4б), видно, что сила тока и напряжение *не совпадают* по фазе: *сила тока опережает напряжение на  $90^\circ$* , или на  $\pi/2$  радиан. Другими словами, сила тока достигает максимального значения на четверть периода раньше, чем напряжение. Можно также сказать, что напряжение отстает от силы тока по фазе на  $90^\circ$ .

Причину расхождения по фазе между силой тока и напряжением можно интуитивно понять следующим образом. В точке  $a$  на рис. 32.2, б, когда напряжение начинается расти, заряд на обкладках конденсатора равен нулю, поэтому заряд беспрепятственно течет к обкладкам и сила тока велика. Когда напряжение приближается к максимальному значению  $V_0$ , заряд, уже накопившийся на обкладках конденсатора, препятствует дальнейшему притоку заряда и сила тока в цепи падает до нуля (точка  $b$ ). Далее, когда напряжение  $V$  падает, накопившийся на обкладках заряд начинает уходить с пластин и сила тока возрастает (штриховая кривая), но уже в противоположном направлении; она достигает максимального отрицательного значения, когда напряжение достигает точки  $c$ . Таким образом, сила тока изменяется в соответствии со штриховой кривой на рис. 32.2, б, опережая напряжение на  $90^\circ$ . Вследствие того что напряжение и сила тока расходятся по фазе на  $90^\circ$ , потребляемая от источника мощность в среднем равна нулю и не происходит превращения энергии в другие формы. Действительно, от точки  $a$  до точки  $b$  напряжение на рис. 32.2, б возрастает от нуля до максимального значения; в это же время сила тока убывает от максимального значения до нуля. Среднее значение мощности  $VI$  на этом участке положительно. От точки  $b$  до точки  $c$  напряжение  $V$  положительно, а ток  $I$  отрицателен. Поэтому произведение  $VI$  отрицательно; оно в точности компенсирует положительный вклад первой четверти периода. Аналогичные соображения можно распространить и на остальную часть периода. Таким образом, средняя мощность за один полный цикл или за много циклов равна нулю. Энергия источника переходит в энергию электрического поля конденсатора, где и запасается, а затем поле уменьшается и энергия возвращается обратно источнику; потеря энергии в этом процессе не происходит. Для резистора же (рис. 32.1, б) сила тока всегда совпадает по фазе с напряжением и произведение  $VI$  не принимает отрицательных значений. Энергия отбирается от источника, но никогда не возвращается обратно: на резисторе электрическая энергия не запасается, а превращается в тепловую.

Конденсатор в цепи переменного тока, подобно резистору, затрудняет перетекание заряда, так как на его обкладках накапливается заряд. Для резистора  $R$  пиковые

значения тока и напряжения связаны между собой законом Ома:

$$V_0 = I_0 R.$$

Аналогичное соотношение можно записать и для конденсатора:

$$V_0 = I_0 X_C, \quad (32.5a)$$

где с учетом (32.4в)

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (32.5б)$$

Величина  $X_C$  называется *реактивным емкостным сопротивлением* и измеряется в омах. Формула (32.5a) устанавливает связь между пиковыми значениями силы тока  $I$  и напряжения  $V$ ; она справедлива и для эффективных значений:  $V_{\text{эфф}} = I_{\text{эфф}} X_C$ . Однако ее *нельзя* рассматривать как связь между мгновенными значениями силы тока и напряжения, как в случае закона Ома, так как напряжение и сила тока расходятся по фазе и их пиковые значения достигаются не одновременно.

Зависимость емкостного сопротивления от емкости конденсатора и от частоты [формула (32.5б)] с физической точки зрения естественна: чем больше емкость  $C$ , тем больший заряд может накопиться на конденсаторе и тем меньше его противодействие перемещению заряда в цепи. Чем выше частота, тем короче время накопления заряда на обкладках и тем меньшее количество заряда, препятствующего его перемещению, успевает накопиться. Поэтому величина  $X_C$  обратно пропорциональна емкости и частоте  $\omega$ . Заметим, что при  $f = \omega/2\pi = 0$ , т. е. в случае источника постоянного тока  $X_C$  обращается в бесконечность, как и следовало ожидать: конденсатор не проводит постоянный ток.

**Пример 32.1.** Чему равны пиковое и эффективное (среднеквадратичное) значения силы тока в цепи на рис. 32.2, а, если  $C = 1,0$  мкФ и  $V_{\text{эфф}} = 120$  В при а)  $f = 60$  Гц; б)  $f = 6,0 \cdot 10^5$  Гц?

**Решение.** а)  $V_0 = \sqrt{2} V_{\text{эфф}} = 170$  В; тогда

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \\ &= \frac{1}{(6,28)(60 \text{ с}^{-1})(1,0 \cdot 10^{-6} \text{ Ф})} = 2,7 \text{ кОм}. \end{aligned}$$

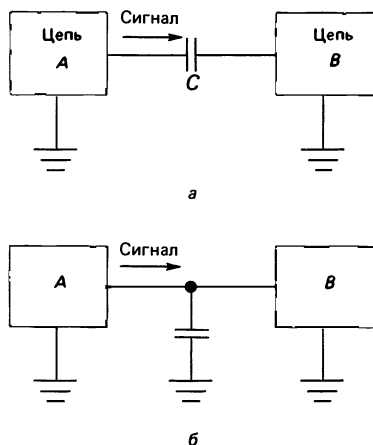
Следовательно,

$$I_0 = \frac{V_0}{X_C} = \frac{170 \text{ В}}{2,7 \cdot 10^3 \text{ Ом}} = 63 \text{ мА};$$

$$I_{\text{эфф}} = \frac{V_{\text{эфф}}}{X_C} = \frac{120 \text{ В}}{2,7 \cdot 10^3 \text{ Ом}} = 44 \text{ мА}.$$

б) При  $f = 6,0 \cdot 10^5$  Гц получим  $X_C = 0,27$  Ом, и тогда  $I_0 = 630$  А,  $I_{\text{эфф}} = 440$  А. Зависимость реактивного сопротивления от частоты  $f$  оказывается чрезвычайно существенной!

Рис. 32.3. Распространенные способы включения конденсатора.



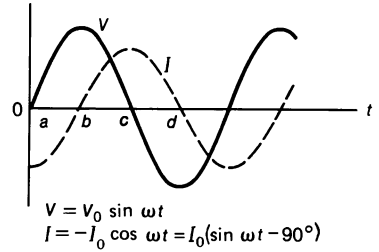
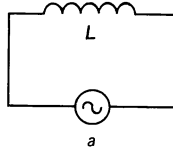
О некоторых применениях конденсаторов уже рассказывалось; приведем здесь еще два примера. На рис. 32.3, *а* иллюстрируется так называемая емкостная связь между двумя цепями *А* и *В*. Назначение конденсатора состоит в том, чтобы препятствовать передаче постоянного напряжения из цепи *А* в цепь *В*, но в то же время обеспечить более или менее беспрепятственное прохождение переменной составляющей сигнала. Если емкость *С* достаточно велика, переменная составляющая не будет значительно ослабляться. На рис. 32.3, *б* конденсатор также пропускает переменную составляющую и не пропускает постоянную. При таком включении цепи *А* и *В* связаны по постоянному току, переменная же составляющая уходит в землю через конденсатор, представляющий для нее небольшое сопротивление. Таким образом, на рис. 32.3, *б* конденсатор служит фильтром, ослабляющим переменную составляющую напряжения. Такое включение используют, когда необходимо сгладить изменения постоянного напряжения: любое резкое изменение напряжения не проходит из цепи *А* в цепь *В*. В электронных схемах подобное включение конденсаторов применяется очень часто.

## 32.4. Индуктивность в цепи переменного тока

На схеме рис. 32.4, *а* катушка с индуктивностью  $L$  подключена к источнику переменной ЭДС; емкостью катушки и ее сопротивлением мы пренебрегаем. ЭДС источника будет равна противо-ЭДС (ЭДС самоиндукции), возбуждаемой в катушке переменным током в соответствии с формулой (31.7). Следовательно,

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = 0,$$

**Рис. 32.4.** Катушка индуктивности в цепи переменного тока. Ток отстает от напряжения на четверть периода, или на  $90^\circ$ . [Если принять  $I = I_0 \sin \omega t$ , как будет сделано в разд. 32.5, то  $V = V_0 \sin(\omega t + 90^\circ)$ .]



или

$$L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t.$$

Чтобы найти силу тока, выразим из последнего равенства  $dI$ :

$$dI = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \sin \omega t dt$$

и проинтегрируем:

$$I = -\frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos \omega t. \quad (32.6a)$$

Поскольку  $\cos \theta = -\sin(\theta - 90^\circ)$ , полученное выражение можно переписать в виде

$$I = I_0 \sin(\omega t - 90^\circ), \quad (32.6b)$$

где

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}. \quad (32.6в)$$

Таким образом, пиковое значение силы тока равно  $I_0 = \mathcal{E}_0/\omega L$ , а фазовый угол  $\phi = -90^\circ$ . Графики напряжения и силы тока представлены на рис. 32.4, б. Видно, что сила тока отстает по фазе от напряжения на  $90^\circ$  (или, что то же самое, напряжение опережает по фазе силу тока на  $90^\circ$ ).

Попробуем разобраться в физических причинах расхождения по фазе силы тока и напряжения. Так как напряжение на катушке равно

$$V = L \frac{dI}{dt},$$

сила тока растет быстрее всего в тот момент, когда напряжение максимально, т. е.  $V = V_0$ . Быстрее всего сила тока уменьшается, когда  $V = -V_0$ . Эти два момента соответствуют точкам  $b$  и  $d$  на графике зависимости напряжения от времени (рис. 32.4, б). Из того же равенства следует, что точки  $a$  и  $c$ , где  $V = 0$ ,  $dI/dt = 0$ , и сила тока не меняется, — это точки максимальной и минимальной силы тока  $I$ .

Поскольку сила тока и напряжение сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $90^\circ$ , средняя мощность, рассеиваемая катушкой, равна нулю, как и в случае конденсатора. Энергия от источника поступает в катушку, где запасается ее магнитным полем, а когда поле убывает, энергия возвращается источнику.

Таким образом, в среднем только резистор потребляет энергию источника тока и рассеивает ее.

Как и в случае конденсатора, можно написать соотношение между пиковыми значениями силы тока и напряжения на катушке:

$$V_0 = I_0 X_L. \quad (32.7a)$$

Величина  $X_L$  называется *реактивным индуктивным сопротивлением*; с учетом (32.6в)

$$X_L = \omega L. \quad (32.7б)$$

Реактивное индуктивное сопротивление также измеряется в омах. Выражение (32.7а) устанавливает связь между пиковыми или эффективными значениями  $V$  и  $I$  ( $V_{\text{эфф}} = I_{\text{эфф}} X_L$ ), но оно не выполняется для мгновенных значений силы тока и напряжения, поскольку  $V$  и  $I$  не совпадают по фазе.

С точки зрения физики можно понять, почему величина  $X_L$  пропорциональна  $L$  и  $\omega$ . Из соотношения  $V = -L di/dt$  следует, что, чем больше  $L$ , тем меньше изменение силы тока  $dI$  за время  $dt$ , а следовательно, и сила тока  $I$  в любой момент будет меньше при данной частоте. Следовательно,  $X_L \sim L$ . Чем выше частота, тем быстрее изменяется магнитный поток в катушке. Поскольку ЭДС индукции в этом случае остается равной приложенной ЭДС источника, сила тока должна быть меньше. Поэтому, чем выше частота, тем больше реактивное сопротивление, т.е.  $X_L \sim \omega L$ . Это согласуется и с тем, что при нулевой частоте (постоянный ток) ЭДС самоиндукции не возникает, и реактивное сопротивление равно нулю.

Любопытно заметить, что у катушки индуктивности реактивное сопротивление возрастает с повышением частоты, а у конденсатора падает.

**Пример 32.2.** Катушка обладает сопротивлением  $R = 1,00$  Ом и индуктивностью  $L = 0,300$  Гн. Определите силу тока в катушке, если к ней приложено напряжение а) 120 В постоянного тока; б) 120 В (эффективное значение) переменного тока с частотой 60 Гц.

**Решение.** а) Реактивное индуктивное сопротивление равно нулю (так как частота

равна нулю), поэтому по закону Ома

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120 \text{ В}}{1,00 \text{ Ом}} = 120 \text{ А}.$$

б) Реактивное индуктивное сопротивление равно

$$X_L = 2\pi fL = (6,28)(60,0 \text{ с}^{-1})(0,300 \text{ Гн}) = 113 \text{ Ом}.$$



По сравнению с этой величиной активным сопротивлением можно пренебречь, и

$$I_{\text{эфф}} = \frac{V_{\text{эфф}}}{X_L} = \frac{120 \text{ В}}{113 \text{ Ом}} = 1,06 \text{ А}.$$

[Могло возникнуть искушение заключить, что полный импеданс равен  $113 \text{ Ом} + 1 \text{ Ом} = 114 \text{ Ом}$ . Это означало бы, что примерно 1% напряжения, или

около 1 В, падает на активном сопротивлении; на индуктивность же приходится 119 В. Хотя на резисторе действительно падает около 1 В (эффективное значение), остальное в этом утверждении *несправедливо* из-за сдвига фазы между силой тока и напряжением на индуктивности. Об этом речь пойдет в следующем разделе.]

## 32.5. Переменный ток в RCL-цепочке

Рассмотрим теперь цепь, содержащую последовательно соединенные все три элемента: резистор  $R$ , катушку индуктивности  $L$  и конденсатор  $C$  (рис. 32.5). Полученные результаты будут справедливы и в случае цепи, содержащей два из указанных элементов, если положить при необходимости  $R = 0$ ,  $L = 0$  или  $C = \infty$ . Пусть  $V_R$ ,  $V_L$  и  $V_C$  — падения напряжения на соответствующих элементах цепи в *данный момент* времени;  $V_{R0}$ ,  $V_{L0}$  или  $V_{C0}$  — *пиковые* значения напряжений на резисторе, катушке и конденсаторе. Фазовые соотношения между силой тока и напряжением на каждом из элементов будут такими же, как для каждого элемента в отдельности:  $V_R$  совпадает по фазе с током,  $V_L$  опережает ток на  $90^\circ$ ,  $V_C$  отстает от тока на  $90^\circ$ . И в любой момент ЭДС источника  $\mathcal{E}$  (или  $V$ ) равна сумме напряжений на отдельных элементах:

$$\mathcal{E} = V = V_R + V_L + V_C. \quad (32.8)$$

Однако поскольку эти напряжения расходятся по фазе, среднеквадратичные (эффективные) значения (которые обычно измеряет вольтметр переменного тока) не будут в сумме равны эффективному напряжению источника. Аналогично сумма пиковых значений  $V_{R0} + V_{L0} + V_{C0}$  *не будет* равна пиковому напряжению источника  $\mathcal{E}_0$ .

Рассмотрим работу цепочки более подробно. Нас интересует импеданс (полное сопротивление) цепи в целом, а также разность фаз между напряжением источника и током в цепи и эффективное значение силы тока. Будем считать, что мгновенное значение силы тока одинаково во всех точках цепи [это допущение оправданно, если частота не слишком высока и соответствующая длина волны ( $c/f$ , где  $c$  — скорость света) намного больше геометрических размеров цепи].

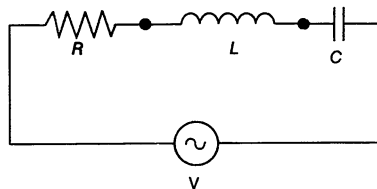
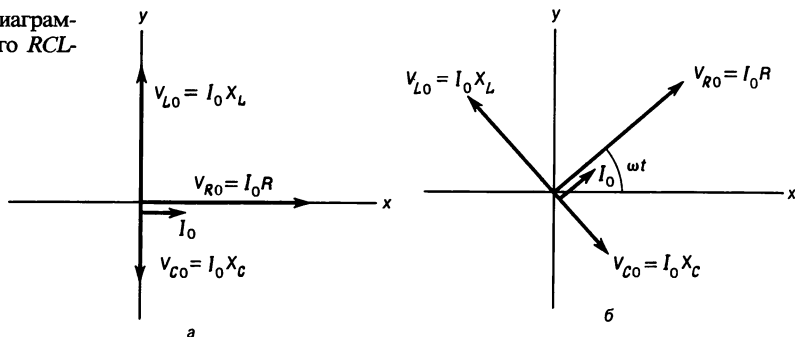


Рис. 32.5. Последовательный RCL-контур.

Рис. 32.6. Векторная диаграмма для последовательного  $RCL$ -контура.



Можно было бы переписать (32.8) в виде дифференциального уравнения [подставляя  $V_C = Q/C$ ,  $V_R = IR = (dQ/dt)R$ ,  $V_L = Ldi/dt = Ld^2Q/dt^2$ ] и решить его. Но мы воспользуемся более простым и физически более наглядным методом *векторных диаграмм*. Каждое напряжение представляется в виде вектора (стрелки) в прямоугольной системе координат  $xu$ ; длина вектора характеризует величину пикового напряжения на соответствующем элементе цепи:

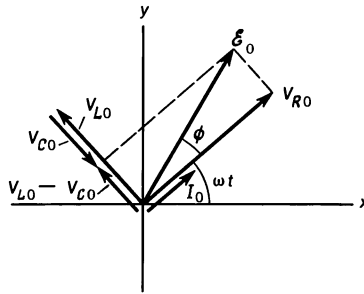
$$V_{R0} = I_0 R, \quad V_{L0} = I_0 X_L, \quad V_{C0} = I_0 X_C.$$

Угол между вектором и осью  $x$  равен сдвигу фазы напряжения относительно тока. Для удобства начальную фазу тока положим равной нулю:

$$I = I_0 \sin \omega t.$$

Обратите внимание на то, что ранее в этой главе мы записывали ЭДС в виде  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$  и определяли силу тока  $I$  для каждого элемента цепи. Но сейчас, при анализе последовательной  $RCL$ -цепочки, удобнее выбрать вид силы тока, поскольку мгновенная сила тока в любой момент одинакова во всех точках цепи. Таким образом, мы приняли  $I = I_0 \sin \omega t$  и затем определим  $V$  для этого значения. (Подобный выбор, естественно, не отражается на физической стороне дела.) Итак, при  $t = 0$  сила тока  $I = 0$ , и вектор, представляющий  $I_0$ , расположен вдоль оси  $x$  и направлен в сторону положительных значений  $x$  (рис. 32.6, а). Напряжение на резисторе всегда совпадает по фазе с током, и вектор  $V_{R0}$  также будет направлен вдоль оси  $x$  в положительном направлении (при  $t = 0$ ). Поскольку напряжение на катушке  $V_L$  опережает ток по фазе на  $90^\circ$ , вектор  $V_{L0}$  при  $t = 0$  расположен в положительном направлении оси  $y$ ;  $V_C$  отстает по фазе от тока на  $90^\circ$ , и вектор  $V_{C0}$  направлен вдоль оси  $y$  в сторону отрицательных значений  $y$  (рис. 32.6, а). Представим теперь, что вся диаграмма вращается с угловой скоростью  $\omega$ ; тогда спустя время  $t$  каждая стрелка повернется на угол  $\omega t$  (рис. 32.6, б). Проекция каждого вектора на ось  $y$  будет характеризовать падение напряжения на каждом элемен-

Рис. 32.7. Векторная диаграмма для последовательного RCL-контура;  $\mathcal{E}_0$  – результирующий вектор ЭДС.



те цепи в момент времени  $t$ . Например, проекция  $V_{R0}$  на ось  $y$  равна  $V_{R0} \sin \omega t = I_0 R \sin \omega t = IR$ , проекции  $V_{L0}$  и  $V_{C0}$  соответственно равны  $V_{L0} \cos \omega t = V_{L0} \sin(\omega t + 90^\circ)$  и  $-V_{C0} \cos \omega t = V_{C0} \sin(\omega t - 90^\circ)$ , что согласуется с полученными ранее результатами<sup>1)</sup>. Сохранение разности фаз  $90^\circ$  между векторами обеспечивает правильность фазовых соотношений. Хотя это обстоятельство убеждает в действенности метода векторных диаграмм, нас в действительности интересует вопрос, каким образом складывать напряжения.

Сумма проекций трех векторов на ось  $y$  равна проекции их суммы. Но сумма проекций в любой момент равна мгновенному падению напряжения на всей цепи, которое совпадает с ЭДС источника  $\mathcal{E}$ . Поэтому векторная сумма трех векторов равна пиковому значению ЭДС источника  $\mathcal{E}_0$ . На рис. 32.7 видно, что вектор  $\mathcal{E}_0$  составляет угол  $\phi$  с  $V_{R0}$  и  $I_0$ . Вектор  $\mathcal{E}_0$  вращается вместе с другими векторами, и мгновенное значение ЭДС  $\mathcal{E}$  (проекция  $\mathcal{E}_0$  на ось  $y$ ) равно

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \phi).$$

Мы видим, что напряжение источника сдвинуто по фазе относительно силы тока в цепи на угол  $\phi$ <sup>2)</sup>.

Проведенный анализ позволяет сделать ряд полезных выводов. Во-первых, можно определить полный импеданс  $Z$  цепи с помощью соотношений

$$\mathcal{E}_{\text{эфф}} = I_{\text{эфф}} Z \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_0 = I_0 Z. \quad (32.9)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что выражения (32.3а), (32.4б), (32.6б) описывают силу тока при условии, что ЭДС источника имеет нулевую начальную фазу:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ . Если бы вместо этого мы приняли начальную фазу силы тока равной нулю,  $I = I_0 \sin \omega t$ , как сделано в этом разделе, то напряжения на резисторе, катушке и конденсаторе давались бы выражениями  $V_R = IR = I_0 R \sin \omega t$ ;  $V_L = L(dI/dt) = \omega L I_0 \cos \omega t = I_0 X_L \sin(\omega t + 90^\circ)$ ;  $V_C = Q/C = (1/C) \times \int I dt = -(I_0/\omega C) \cos \omega t = I_0 X_C \sin(\omega t - 90^\circ)$ . Именно эти результаты получены выше с помощью векторной диаграммы.

<sup>2)</sup> Для проверки можно положить  $R = C = 0$ ; тогда  $\phi = 90^\circ$  и  $\mathcal{E}_0$  опережает ток на  $90^\circ$ , как и должно быть в случае одной лишь индуктивности. Если цепь содержит только конденсатор ( $R = L = 0$ ), то  $\phi = -90^\circ$  и  $\mathcal{E}_0$  отстает от тока на  $90^\circ$ , как и должно быть в случае одной лишь емкости.

Из рис. 32.7 следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2} = \sqrt{I_0^2 R^2 + (I_0 X_L - I_0 X_C)^2} = \\ &= I_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \end{aligned}$$

и с учетом (32.9)

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \quad (32.10a)$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (32.10b)$$

Последними равенствами определяется полный импеданс цепи. Из рис. 32.7 можно найти и сдвиг фаз  $\phi$ :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{V_{L0} - V_{C0}}{V_{R0}} = \frac{I_0 (X_L - X_C)}{I_0 R} = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad (32.11a)$$

или

$$\cos \phi = \frac{V_{R0}}{\mathcal{E}_0} = \frac{I_0 R}{I_0 Z} = \frac{R}{Z}. \quad (32.11b)$$

Обратите внимание на то, что на рис. 32.7  $X_L > X_C$ , и ток в цепи отстает по фазе от напряжения источника на угол  $\phi$ ; если бы  $X_C > X_L$ , то значение  $\phi$  в (32.11) оказалось бы меньше нуля, и это означало бы, что ток опережает по фазе напряжение источника.

Наконец, определим выделяющуюся в цепи мощность. Ранее мы уже видели, что мощность рассеивается только на активном сопротивлении; на реактивном сопротивлении катушки или конденсатора мощность не рассеивается. Следовательно (см. также разд. 26.7), средняя мощность  $\bar{P} = I_{\text{эфф}}^2 R$ . Но, согласно (32.11b),  $R = Z \cos \phi$ , откуда

$$\bar{P} = I_{\text{эфф}}^2 Z \cos \phi = I_{\text{эфф}} \mathcal{E}_{\text{эфф}} \cos \phi. \quad (32.12)$$

Множитель  $\cos \phi$  называется *коэффициентом мощности* цепи. Для чисто активного сопротивления  $\cos \phi = 1$  и  $\bar{P} = I_{\text{эфф}} \mathcal{E}_{\text{эфф}}$ . Для чисто реактивного сопротивления (емкостного или индуктивного)  $\cos \phi = 0$  и рассеиваемая мощность равна нулю.

Выводы этого анализа подлежат экспериментальной проверке и полностью подтверждаются экспериментом.

В начале настоящего раздела мы произвольно выбрали начальную фазу тока равной нулю, так что  $I = I_0 \sin \omega t$ . С точки зрения физики важна не начальная фаза, а разность фаз между током и напряжением. Если выбрать вместо этого

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

как в разд. 32.1–32.4, то сила тока будет описываться выражением

$$I = I_0 \sin (\omega t - \phi),$$

где  $\phi$  и  $I_0$  имеют те же значения, что и согласно формулам (32.9)–(32.11).

**Пример 32.3.** Пусть в схеме на рис. 32.5  $R = 25 \text{ Ом}$ ,  $L = 30 \text{ мГн}$  и  $C = 12 \text{ мкФ}$ ; цепь подключена к источнику переменного напряжения  $90 \text{ В}$  (эффективное значение) с частотой  $500 \text{ Гц}$ . Рассчитайте а) силу тока в цепи; б) показания вольтметра на каждом из элементов цепи (эффективное значение падения напряжения); в) сдвиг фаз  $\phi$ ; г) мощность, рассеиваемую в цепи.

**Решение.** а) Найдем вначале по отдельности индуктивное и емкостное сопротивления при частоте  $500 \text{ с}^{-1}$ :

$$X_L = 2\pi fL = 94 \text{ Ом},$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = 27 \text{ Ом}.$$

Полный импеданс равен

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \\ &= \sqrt{(25 \text{ Ом})^2 + (94 \text{ Ом} - 27 \text{ Ом})^2} = \\ &= 72 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Согласно (32.9),

$$I_{\text{эфф}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{эфф}}}{Z} = \frac{90 \text{ В}}{72 \text{ Ом}} = 1,25 \text{ А}.$$

б) Эффективные значения падения напряжения на каждом из элементов равны  $(V_R)_{\text{эфф}} = I_{\text{эфф}}R = (1,25 \text{ А})(25 \text{ Ом}) = 31 \text{ В}$ ;  
 $(V_L)_{\text{эфф}} = I_{\text{эфф}}X_L = 117 \text{ В}$ ;  
 $(V_C)_{\text{эфф}} = I_{\text{эфф}}X_C = 34 \text{ В}$ .

Отметим, что сумма эффективных значений *не равна* эффективному напряжению источника ( $90 \text{ В}$ ); более того, падение напряжения на индуктивности *превышает* напряжение источника. Это обусловлено тем, что падения напряжений на элементах сдвинуты относительно друг друга по фазе. При этом, конечно, мгновенные значения напряжения в любой момент времени суммируются; так может происходить, поскольку в любой момент одно напряжение может оказаться отрицательным и компенсировать другое, большее положительное напряжение. Эффективные значения напряжения по определению всегда положительны. в)  $\cos \phi = R/Z = 25 \text{ Ом}/72 \text{ Ом} = 0,35$ , откуда  $\phi = 70^\circ$ . г)  $P = I_{\text{эфф}}V_{\text{эфф}} \cos \phi = (1,25 \text{ А})(90 \text{ В})(0,35) = 39 \text{ Вт}$ .

## 32.6. Резонанс в цепях переменного тока

Эффективное значение силы тока в  $RCL$ -цепочке равно [см. (32.9) и (32.106)]

$$I_{\text{эфф}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{эфф}}}{Z} = \frac{\mathcal{E}_{\text{эфф}}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (32.13)$$

Поскольку реактивное сопротивление индуктивностей и емкостей зависит от частоты  $f$ , сила тока в  $RCL$ -цепочке будет зависеть от частоты питающего напряжения. Из формулы (32.13) следует, что сила тока в цепи максимальна при частоте, отвечающей

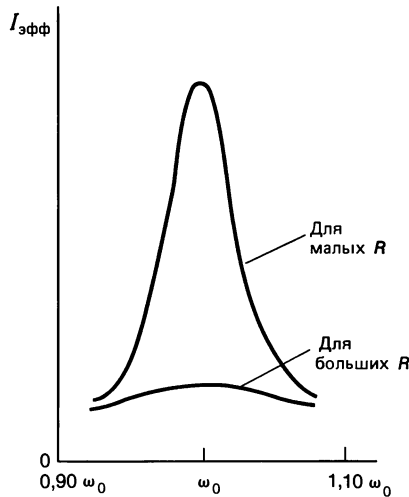
$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0.$$

Выражая отсюда  $\omega$ , получаем решение  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (32.14)$$

Когда  $\omega = \omega_0$ , в цепи наблюдается *резонанс*. На этой частоте  $X_C = X_L$ , поэтому импеданс соответствует чисто

Рис. 32.8. Зависимость тока в  $RCL$ -контуре от частоты при двух значениях сопротивления  $R$ . Резонанс наблюдается на частоте  $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .



активному сопротивлению и  $\cos \phi = 1$ . Зависимость  $I_{\text{эфф}}$  от  $\omega$  показана на рис. 32.8 для фиксированных значений  $\mathcal{E}_0$ ,  $L$  и  $C$  и двух разных значений  $R$ . Чем меньше  $R$ , тем выше и острее резонанс. Если величина  $R$  мала по сравнению с  $X_L$  и  $X_C$ , мы приходим к  $LC$ -контур, который рассматривался в разд. 31.5.

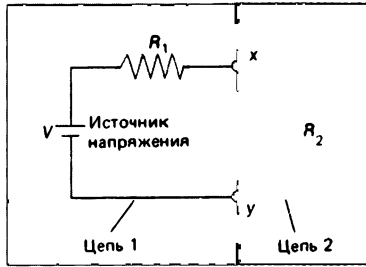
Резонанс в электрической цепи аналогичен механическому резонансу (гл. 14). Поступающая в систему энергия в резонансе максимальна, будь то электрический резонанс, колебания груза на пружине или раскачивание ребенка на качелях (разд. 14.8). В случае резонанса в электрической цепи это следует из равенства (32.12): при резонансе,  $\cos \phi = 1$ , значение  $I_{\text{эфф}}$  максимально. При постоянном значении  $\mathcal{E}_{\text{эфф}}$  максимальна и мощность в резонансе. График зависимости мощности от частоты имеет максимум аналогично силе тока на рис. 32.8.

На электрическом резонансе основано много схем. В радиоприемниках и телевизорах резонансный контур используется для настройки на станцию. В контур поступают сигналы, содержащие широкий набор частот, однако сила в контуре становится значительной только при частотах, близких к его резонансной частоте или совпадающих с ней. Для настройки на разные станции либо емкость, либо индуктивность контура делают переменными.

### \* 32.7. Согласование импедансов

Обычно электрические цепи соединяют между собой. Например, телевизионная антенна подключается к телевизору, магнитофонная приставка подключается к усилителю, усилитель соединяется с динамиком; электроды для

Рис. 32.9. Выход цепи 1 соединен с входом цепи 2.



снятия электрокардиограммы или электроэнцефалограммы подключаются к усилителю или самописцу. Во многих случаях важно передать из одной цепи в другую как можно большую мощность с минимальными потерями. Это достигается согласованием выходного импеданса одной цепи с входным импедансом другой.

Покажем, что это действительно так, на простом примере цепей, содержащих только активные сопротивления. На рис. 32.9 источник в цепи 1 может представлять собой блок питания, выход усилителя, сигнал от антенны, лабораторный датчик, электроды, подключенные к телу пациента.  $R_1$  представляет собой сопротивление этой цепи, включая внутреннее сопротивление источника;  $R_1$  называется выходным сопротивлением (выходным импедансом) цепи 1. Выход цепи 1 (клеммы  $x$  и  $y$ ) соединен с входом цепи 2. Цепь 2 может быть очень сложной, но для любой цепи можно определить эквивалентное сопротивление. Оно представлено на схеме резистором  $R_2$ , характеризующим входной импеданс.

Мощность, вводимая в цепь 2, равна  $P = I^2 R_2$ , где  $I = V/(R_1 + R_2)$ . Таким образом,

$$P = I^2 R_2 = \frac{V^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Разделив числитель и знаменатель в правой части на  $R_1$ , получим

$$P = \frac{V^2 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{R_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2}.$$

Вопрос заключается в следующем: если сопротивление источника  $R_1$ , то каким должно быть сопротивление  $R_2$ , чтобы обеспечить поступление в цепь 2 максимальной мощности? Для ответа продифференцируем  $P$  по  $R_2$  и приравняем производную нулю:

$$0 = \frac{dP}{dR_2} = \frac{V^2 (1 - R_2/R_1)}{R_1^2 (1 + R_2/R_1)^3}.$$

Это выражение может обращаться в нуль только при

условии  $1 - R_2/R_1 = 0$ , или

$$R_2 = R_1.$$

Таким образом, передаваемая мощность будет максимальной, когда *выходной импеданс* одной цепи равен *входному импедансу* второй. Это и есть *согласование импедансов*.

В цепи переменного тока, содержащей емкости и индуктивности, необходимо учитывать фазы, и поэтому анализ усложняется. Однако вывод остается прежним: чтобы обеспечить максимальную передачу мощности из одной цепи в другую, необходимо согласовать импедансы ( $Z_2 = Z_1$ ). Кроме того, следует принимать во внимание возможность значительного искажения сигнала. Например, подключение второй цепи может создать в первой резонанс или, наоборот, вывести ее из резонанса.

Отсутствие надлежащего согласования импедансов может лишить результаты измерений всякого смысла. При конструировании аппаратуры эти требования обычно учитываются. Однако бывали случаи, когда исследователи, соединив различные блоки без согласования импедансов, делали при этом «открытия». После провозглашения подобного «открытия» оказывалось, что наблюдаемые эффекты возникали из-за рассогласования импедансов и вовсе не связаны с предполагаемыми новыми явлениями.

В некоторых случаях для преобразования импедансов используют трансформаторы, которые обеспечивают их согласование с другими цепями. Если  $Z_s$  – импеданс вторичной обмотки, а  $Z_p$  – импеданс первичной обмотки, то  $V_s = I_s Z_s$  и  $V_p = I_p Z_p$  (где  $V$  и  $I$  – пиковые или эффективные значения) и

$$\frac{Z_p}{Z_s} = \frac{V_p I_s}{V_s I_p} = \left( \frac{N_p}{N_s} \right)^2$$

[см. формулы (30.8) и (30.9)]. Таким образом, с помощью трансформатора можно изменять входной или выходной импеданс устройства. Такие согласующие трансформаторы (выходные трансформаторы) используются в некоторых низкочастотных усилителях; вторичная обмотка выходного трансформатора нередко имеет несколько выводов, соответствующих импедансам 4, 8, 16 Ом, что позволяет подключить к нему динамик любого типа.

На вход некоторых приборов (например, осциллографа) подают лишь напряжение сигнала, мощность же сигнала может быть очень малой. В этом случае нет проблемы передачи максимальной мощности, и входной импеданс таких приборов может быть высоким. При высоком входном сопротивлении прибор отбирает очень малую силу тока и не вносит искажений в исследуемую цепь. Это часто бывает важно с точки зрения проведения эксперимента.



## \* 32.8. Поражение электрическим током. Токи утечки

Удар электрическим током может быть опасен для здоровья и даже для жизни. Тяжесть поражения зависит от силы тока, продолжительности его действия и от того, по какому пути ток протекает в теле человека. Особенно чувствительны к действию тока сердце и мозг, так как возможно нарушение их деятельности.

Большинство людей ощущают электроток при силе тока около 1 мА. Сила тока в несколько миллиампер вызывает болевые ощущения, но редко бывает опасна для здорового человека. Однако сила тока выше 10 мА вызывает резкое сокращение мышц, и человек может оказаться не в силах освободиться от источника тока (например, неисправного прибора или проводов). В этом случае может произойти остановка дыхания; сделанное своевременно искусственное дыхание может вернуть человека к жизни. Если ток свыше 70 мА проходит в области сердца, сердечная мышца начинает беспорядочно сокращаться и нарушается нормальное кровообращение. Это явление называется фибрилляцией сердца; вовремя не прекращенная фибрилляция приводит к смерти. Как ни странно, при значительно большей силе тока (порядка 1 А) поражения могут быть не столь серьезными и смертельный исход менее вероятен<sup>1)</sup>.

Сила тока зависит от электрического сопротивления тела. Внутренние ткани обладают очень низким сопротивлением, так как внутриклеточная жидкость содержит ионы и хорошо проводит электрический ток. Однако сухая кожа имеет высокое сопротивление. При сухой коже сопротивление тела составляет от  $10^4$  до  $10^6$  Ом; влажная кожа может уменьшить сопротивление до  $10^3$  Ом и ниже. При хорошем контакте с землей через тело человека, прикоснувшегося мокрой рукой к проводу, находящемуся под напряжением 120 В, может пройти ток силой

$$I = \frac{120 \text{ В}}{1000 \text{ Ом}} = 120 \text{ мА}.$$

Как уже говорилось, такая сила тока может оказаться смертельной.

По отношению к переменному току человеческое тело можно рассматривать как параллельно соединенные резистор и конденсатор. Постоянный ток идет только через «резистор», и, если активное сопротивление тела велико, ток будет небольшим. Переменный же ток идет и через активное, и через емкостное сопротивления; поскольку они параллельны, полный импеданс меньше чисто активного сопротивления и сила тока при данном  $V_{\text{эфф}}$  будет больше, чем в случае постоянного тока. Сопро-

<sup>1)</sup> По-видимому, при поражении сильным током происходит полная остановка сердца; после прекращения действия тока нормальная деятельность сердца возобновляется. Начавшуюся же фибрилляцию очень трудно остановить.

твление человеческого тела переменному току с частотой 60 Гц может быть вдвое меньше, чем постоянному току. Поэтому переменный ток более опасен.

Опасность представляют и *токи утечки* – токи, текущие по неожиданным путям. Обычно они возникают из-за емкостных и индуктивных связей. Например, электрический провод внутри настольной лампы образует конденсатор, второй обкладкой которого является металлический корпус лампы. Заряды, движущиеся в одном проводнике, притягивают или отталкивают заряды другого. По правилам техники безопасности сила тока утечки не должна превышать 1 мА; обычно такая сила тока безопасна. Однако даже такой ток утечки может оказаться роковым, например для клинического больного, в сердце которого вживлены электроды, соединенные через аппаратуру с землей. В этом случае ток может пройти через сердце, не разветвляясь по телу. Если при контакте через кожу рук (когда через сердце течет очень слабый ток) фибрилляция сердца (быстрое нерегулярное сокращение мышц) может наступить при токе выше 70 мА, то были случаи, когда при непосредственном контакте с сердцем фибрилляция начиналась при ничтожном токе в 0,02 мА. Таким образом, из-за токов утечки для пациента с вживленными электродами даже простое прикосновение к электрической лампе может оказаться опасным.

## Закключение

Емкость и индуктивность в цепях переменного тока обладают реактивным сопротивлением (*импедансом*)  $X$ , аналогичным активному сопротивлению. Реактивное сопротивление емкости и индуктивности определяется по аналогии с  $R$  в законе Ома как коэффициент пропорциональности между напряжением и силой тока (эффективными или пиковыми значениями): для конденсатора  $V_0 = I_0 X_C$ , для катушки индуктивности  $V_0 = I_0 X_L$ . Емкостное реактивное сопротивление конденсатора уменьшается с повышением частоты:  $X_C = 1/\omega C$ ; индуктивное сопротивление катушки увеличивается с повышением частоты:  $X_L = \omega L$ . В то время как сила тока через резистор всегда совпадает по фазе с напряжением, ток через катушку индуктивности отстает по фазе на  $90^\circ$  от напряжения, а ток через конденсатор опережает напряжение по фазе на  $90^\circ$ .

В последовательной  $RCL$ -цепочке полный импеданс  $Z$  определяется из соотношения, аналогичного закону Ома:  $\mathcal{E}_0 = I_0 Z$  или  $\mathcal{E}_{\text{эфф}} = I_{\text{эфф}} Z$ ;  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ . Сдвиг фазы между током и напряжением  $\phi$  в цепи переменного тока дается соотношением  $\cos \phi = R/Z$ . Мощность в такой цепочке рассеивается только на резисторе:  $\bar{P} = I_{\text{эфф}}^2 R = I_{\text{эфф}}^2 Z \cos \phi$ .

Резонанс в последовательном  $RCL$ -контуре происхо-

дит на частоте  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ . Эффективное значение силы тока в цепи максимально, когда частота приложенного напряжения равна резонансной частоте  $\omega_0$ . Чем меньше сопротивление  $R$ , тем выше и острее резонанс.

## Вопросы

1. При каких условиях импеданс  $RCL$ -цепочки минимален?
2. Почему можно предполагать, что частота тока в  $RCL$ -цепочке равна частоте приложенной ЭДС?
3. Почему на диаграмме напряжений в цепи переменного тока напряжения изображаются векторами, хотя известно, что разность потенциалов не является векторной величиной?
4. Если в  $RCL$ -цепочке  $X_L > X_C$ , то ее называют «преимущественно индуктивной»; если  $X_C > X_L$ , то ее называют «преимущественно емкостной». Чем объяснить подобную терминологию? В частности, говорят ли что-нибудь эти названия об относительной величине емкости и индуктивности на данной частоте?
5. Переходят ли результаты, полученные в разд. 32.5, к ожидаемому пределу, когда  $\omega$  приближается к нулю? Что представляет собой этот предел?
6. Представьте себе, что генератор переменного тока нагружен на  $RCL$ -цепочку. Откуда поступает энергия? Во что она превращается? Как влияют значения  $R$ ,  $L$  и  $C$  на энергию, поступающую от генератора?
7. Обсудите применимость обоих правил Кирхгофа (разд. 27.3) к цепям переменного тока, содержащим несколько контуров.
8. Может ли мгновенная выходная мощность генератора переменного тока, нагруженного на  $RCL$ -цепочку, принимать отрицательные значения? Объясните.
9. Можно ли, зная коэффициент мощности  $\cos \phi$ , определить, опережает по фазе ток в  $RCL$ -цепочке напряжение источника или отстает от него?
10. Если бы  $\cos \phi$  оказался меньше нуля, то, согласно (32.12),  $\bar{P} < 0$ . Может ли так быть? Может ли  $\cos \phi$  принимать отрицательные значения? Объясните.
11. Зависит ли коэффициент мощности  $\cos \phi$  от частоты? Зависит ли от частоты мощность, рассеиваемая в  $RCL$ -цепочке?
12. Соответствует ли угол  $\phi$  сдвигу фаз между а)  $\mathcal{E}_0$  и  $I_0$ ; б)  $\mathcal{E}$  и  $I$ ; в)  $\mathcal{E}_{\text{эфф}}$  и  $I_{\text{эфф}}$ ? Выберите правильный ответ.
13. Какой смысл имеет знак  $\phi$  (плюс или минус)? Выбирается ли он по соглашению или фиксируется правилами?
14. Опишите кратко, как частота питающего

- напряжения влияет на величину а) чисто активного сопротивления; б) чисто емкостного сопротивления; в) чисто индуктивного сопротивления; г) импеданса  $RCL$ -цепочки вблизи резонанса (при малом  $R$ ); д) импеданса  $RCL$ -цепочки вдали от резонанса (при малом  $R$ ).
15. Что происходит в  $RCL$ -контуре, если  $R \rightarrow 0$  на частоте а) резонанса; б) вблизи резонанса; в) вдали от резонанса. Происходит ли в каждом случае рассеяние энергии? Обсудите превращение энергии в каждом из случаев.
  16. Можно ли, зная  $\cos \phi$ , сделать вывод о том, наблюдается в цепи резонанс или нет?
  17. Резонансный  $LC$ -контур часто называют *колебательным контуром*. Что колеблется в этом контуре?
  18. То, что происходит в  $RCL$ -контуре при резонансе, очень напоминает затухающие гармонические колебания. Однако резонансная угловая частота тока  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  [см. (32.13)] совпадает с резонансной частотой контура без затухания ( $R = 0$ , разд. 31.5), в то время как резонансная частота для механических колебаний с затуханием отличается от резонансной частоты без затухания. Нет ли здесь противоречия? Объясните. (Подсказка: установите, какая величина в каждом из этих случаев совершает колебания.)

## Задачи

### Разделы 32.1 – 32.4

1. (I) На какой частоте реактивное сопротивление катушки с индуктивностью 20,0 мГн равно 880 Ом?
2. (I) На какой частоте реактивное сопротивление конденсатора емкостью 14,0 мкФ равно 28,2 кОм?
3. (I) Постройте график зависимости импеданса конденсатора емкостью 1,6 мкФ от частоты в пределах от 10 до 1000 Гц.
4. (I) Постройте график зависимости импеданса катушки с индуктивностью 2,0 мГн от частоты в пределах от 100 до 10 000 Гц.
5. (I) Найдите импеданс и эффективное значение силы тока в катушке с индуктивностью 16,0 мГн, подключенной к источнику переменного напряжения 400 В (эфф.) с частотой 33,3 кГц. Сопротивлением можно пренебречь.
6. (II) Покажите, что если сила тока  $I =$

$= I_0 \sin \omega t$ , то напряжение а) на конденсаторе описывается выражением  $V_C = -V_{C0} \cos \omega t = V_{C0} \sin(\omega t - 90^\circ)$ ; б) на катушке индуктивности  $V_L = V_{L0} \cos \omega t = V_{L0} \sin(\omega t + 90^\circ)$ , где  $V_{C0} = I_0/\omega C$  и  $V_{L0} = I_0 \omega L$ .

7. (II) а) Чему равен импеданс конденсатора емкостью 0,025 мкФ с хорошей изоляцией, который подключен к источнику напряжения 2,1 кВ (эфф.) с частотой 200 Гц? б) Чему равны пиковое значение силы тока и частота?

8. (II) Чему равна индуктивность  $L$  первичной обмотки трансформатора, если при включении ее в сеть 110 В, 60 Гц сила тока в этой обмотке составляет 2,2 А? (Во вторичной обмотке тока нет.)

9. (II) В последовательной  $LR$ -цепочке ( $R = 160$  Ом,  $L = 0,85$  мГн) течет ток  $I = 3,1 \cos 377t$  (где  $I$  выражается в амперах,  $t$  – в секундах). Какая мощность в среднем рассеивается в контуре?

10. (II) Конденсатор включен параллельно нагрузке (как на рис. 32.3, б), чтобы отфильтровать паразитные высокочастотные наводки, но в то же время не ослабить ток промышленной частоты 60 Гц. Пусть цепь  $B$  на рис. 32.3, б представляет собой заземленный резистор  $R = 200$  Ом и конденсатор  $C = 2,3$  мкФ. Какой процент тока будет течь через конденсатор на землю на частоте а) 60 Гц; б) 60 000 Гц?

11. (II) Пусть цепь  $B$  на рис. 32.3, а представляет собой резистор  $R = 200$  Ом и конденсатор  $C = 2,0$  мкФ. Будет ли конденсатор препятствовать току с частотой 60 Гц и в то же время пропускать высокочастотный ток с частотой 60 000 Гц? Чтобы проверить это, вычислите падение напряжения на  $R$  при напряжении сигнала 30 мВ на частоте а) 60 Гц; б) 60 000 Гц.

## Раздел 32.5

12. (I) Резистор 2,1 кОм и конденсатор 2,8 мкФ подключены последовательно к источнику переменного напряжения. Вычислите импеданс цепи а) на частоте 60 Гц; б) на частоте 60 000 Гц.

13. (I) Резистор 4,0 кОм и катушка индуктивности 6,1 мГн подключены последовательно к источнику переменного напряжения. Рассчитайте импеданс цепи а) на частоте 60 Гц; б) на частоте 30 000 Гц.

14. (I) Ток силой 70 мА от сети 120 В, 60 Гц, протекающий через тело человека в течение 1 с, может оказаться смертельным. Каким должен быть импеданс человеческого тела, чтобы сила тока достигла этой величины?

15. (I) Постройте векторную диаграмму, ана-

логичную приведенной на рис. 32.7, для случая  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ .

16. (II) а) Чему равно эффективное значение силы тока в  $RC$ -цепочке ( $R = 4,7$  кОм,  $C = 0,20$  мкФ), включенной в сеть 120 В, 60 Гц? б) Чему равен сдвиг фаз между напряжением и током? в) Какая мощность рассеивается в цепочке? г) Чему равны эффективные значения падения напряжения на  $R$  и  $C$ ?

17. (II) а) Чему равно эффективное значение силы тока в последовательной  $LR$ -цепочке ( $R = 65,0$  Ом,  $L = 50,0$  мГн), включенной в сеть 120 В, 60 Гц? б) Чему равен сдвиг фаз между напряжением и током? в) Какая мощность рассеивается в цепочке? г) Чему равны эффективные значения падения напряжения на  $L$  и  $R$ ?

18. (II) К  $RCL$ -цепочке ( $L = 12,0$  мГн,  $R = 2,0$  кОм,  $C = 0,30$  мкФ) приложено напряжение  $V = 8,1 \sin 754t$  ( $V$  измеряется в вольтах,  $t$  – в секундах). а) Определите импеданс и сдвиг фаз. б) Какая мощность рассеивается в цепочке? в) Чему равны эффективные значения силы тока и напряжения на каждом элементе цепи?

19. (II) Электрическая цепь содержит два элемента, причем неизвестно, что это – резистор, конденсатор или катушка индуктивности. Когда цепь подключают к цепи 120 В, 60 Гц, сила тока в ней составляет 8,1 А и опережает по фазе напряжение на  $13^\circ$ . Какие элементы входят в цепь и каковы их номиналы?

20. (II) Катушка индуктивности 35 мГн с активным сопротивлением 2,0 Ом соединена последовательно с конденсатором 20 мкФ и источником напряжения 45 В, 60 Гц. Определите а) эффективное значение силы тока; б) сдвиг фаз; в) мощность, рассеиваемую в этой цепи.

21. (II) Катушка с индуктивностью 23 мГн и сопротивлением 0,80 Ом подключена к конденсатору  $C$  и источнику напряжения с частотой 360 Гц. Каковую емкость должен иметь конденсатор  $C$ , чтобы напряжение и сила тока совпадали по фазе?

22. (II) Чему равно сопротивление катушки, если ее импеданс составляет 225 Ом, а реактивное сопротивление 20 Ом?

23. (II) Покажите, что если  $I = I_0 \cos \omega t$ , то для  $RCL$ -цепочки на рис. 32.5  $V_R = I_0 R \cos \omega t$ ,  $V_L = I_0 \omega L \cos(\omega t + \pi/2)$  и  $V_C = (I_0/\omega C) \cos(\omega t - \pi/2)$ , где  $\omega = 2\pi f$ .

24. (II) Пусть для  $RCL$ -цепочки на рис. 32.5  $I = I_0 \sin \omega t$  и  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \phi)$ . Используя формулу для мощности  $P = I\mathcal{E}$ , покажите, пользуясь этими выражениями, что средняя мощность  $\bar{P} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos \phi$ , подтвердив тем самым выражение (32.12).

25. (II) Если  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ , то чему равно среднее значение  $\mathcal{E}$  а) за половину периода; б) за

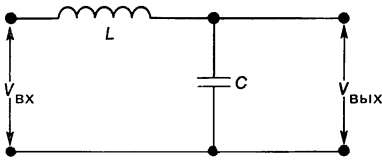


Рис. 32.10.

целый период? Как эти величины соотносятся с эффективным значением  $\mathcal{E}_{\text{эфф}}$ ?

26. (II) При подключении катушки индуктивности к батарее с напряжением 45 В через катушку течет ток 2,8 А. При ее подключении к источнику переменного напряжения 120 В, 60 Гц сила тока через катушку равна 4,6 А (эффективное значение). Определите индуктивность и активное сопротивление катушки.

27. (II) а) Перепишите (32.8) в виде дифференциального уравнения с зарядом  $Q$  в качестве переменной, полагая  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ . б) Покажите, что этому уравнению удовлетворяет решение вида  $Q = Q_0 \sin(\omega t + \phi)$ . в) Выразите  $Q_0$  и  $\phi$  через  $\mathcal{E}_0$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $C$  и  $\omega$ . г) Продифференцируйте уравнение, полученное в п. «а», и выведите уравнение для силы тока  $I$ . д) Проверьте подстановкой решение в виде  $I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$  и выразите  $I_0$  и  $\phi$  через параметры, указанные в п. «в».

28. (III) *Фильтр.* На рис. 32.10 показана схема простого фильтра, предназначенного для того, чтобы с минимальным ослаблением передавать постоянное напряжение и в то же время по возможности убрать переменную составляющую (например, наводки с частотой 60 Гц, способные создавать «фон переменного тока» в стереоаппаратуре). Пусть  $V_{\text{вх}} = V_1 + V_2$ , где  $V_1$  – постоянное напряжение, а  $V_2 = V_{20} \sin \omega t$ ; сопротивлением цепи можно пренебречь. а) Определите силу тока через конденсатор, его амплитуду и фазу (считайте  $R = 0$  и  $X_L > X_C$ ). б) Покажите, что переменная составляющая  $V_{2\text{вых}}$  выходного напряжения равна  $Q/C$ , где  $Q$  – заряд на конденсаторе в данный момент времени; определите амплитуду и фазу  $V_{2\text{вых}}$ . в) Покажите, что ослабление переменной составляющей максимально, если  $X_C \ll X_L$ , и вычислите отношение амплитуды переменной составляющей напряжения на выходе и на входе. г)

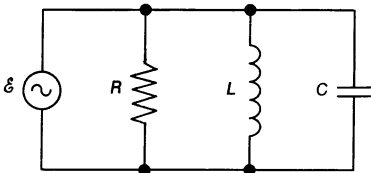


Рис. 32.11.

Сравните постоянные напряжения на выходе и на входе.

29. (II) Покажите, что при замене индуктивности  $L$  в фильтре на рис. 32.10 на большое сопротивление  $R$  переменная составляющая будет по-прежнему сильно ослабляться, а постоянная составляющая сохраняться при условии, что напряжение постоянной составляющей на входе велико, а сила тока (и мощность) мала.

30. (III) Резистор  $R$ , конденсатор  $C$  и катушка индуктивности  $L$  подключены параллельно к источнику переменного напряжения  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$  (рис. 32.11). Определите зависимость от времени силы тока (включая амплитуду и фазу) а) через резистор; б) через катушку индуктивности; в) через конденсатор. г) Определите амплитуду и фазу полной силы тока, отбираемой от источника. д) Определите полный импеданс цепи  $Z = \mathcal{E}_0/I_0$ . е) Чему равен коэффициент мощности?

### Раздел 32.6

31. (I) Конденсатор емкостью 1200 пФ соединен с катушкой, имеющей индуктивность 16,0 мкГн и сопротивление 2,00 Ом. Чему равна резонансная частота контура?

32. (I) Чему равна резонансная частота  $RCL$ -контура в примере 32.3? Какую среднюю мощность отбирает контур от источника на этой частоте?

33. (II) В  $RCL$ -контуре  $L = 2,15$  мГн и  $R = 120$  Ом. а) Какой должна быть емкость  $C$ , чтобы резонансная частота составила 33,0 кГц? б) Чему равна максимальная сила тока при резонансе, если пиковое значение приложенного напряжения составляет 136 В? в) На каких частотах сила тока в контуре составляет половину максимальной?

34. (II) Чему равно пиковое значение силы тока в предыдущей задаче, если емкость конденсатора выбрана такой, что резонансная частота контура вдвое превышает частоту приложенного напряжения 33,0 кГц?

35. (II) а) Покажите, что колебания заряда  $Q$  на конденсаторе в  $RCL$ -контуре происходят с амплитудой

$$Q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega R)^2 + \left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2}}$$

б) При какой угловой частоте  $\omega'$  амплитуда  $Q_0$  максимальна? в) Сравните полученные результаты со случаем затухающих гармонических колебаний (см. также вопрос 18).

36. (II) Покажите, что ширина острого резонанса, определяемая разностью частот, на

которых  $I = \frac{1}{2}I_0$ , дается выражением  $\Delta\omega \approx \sqrt{3R/L}$ .

37. (II) а) Выразите среднюю мощность  $P$ , рассеиваемую в  $RCL$ -контуре, через  $L$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $\omega$  и  $\mathcal{E}_0$ . б) На какой частоте рассеиваемая мощность максимальна? в) Получите приближенное выражение для ширины  $\Delta\omega$  резонанса средней мощности, если  $\Delta\omega$  определяется как разность угловых частот, на которых средняя мощность  $\bar{P}$  равна половине максимального значения. Считайте резонанс острым.

38. (II) Добротность  $Q$  резонансного контура определяется как отношение напряжения на конденсаторе (или на катушке индуктивности) к напряжению на резисторе при резонансе. Чем выше значение  $Q$ , тем острее резонанс. а) Покажите, что  $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$ . б) Какими должны быть значения  $L$  и  $R$ , чтобы  $Q = 1000$  на резонансной частоте  $f_0 = 2,0$  МГц, если  $C = 0,018$  мкФ? в) Чему равна добротность  $Q$  контура в примере 32.3?

39. (II) Резонансная частота контура, содержащего конденсатор емкостью 120 пФ, должна быть равна 18,0 МГц. Катушку индуктивности предполагается изготовить из изолированного провода длиной 12 м и диаметром 1,1 мм в виде соленоида с плотной намоткой без сердечника. Сколько витков должна иметь катушка?

### Раздел 32.7

\* 40. (I) Выходной импеданс усилителя ЭКГ равен 18 000 Ом. К усилителю с помощью трансформатора необходимо подключить громкоговоритель с сопротивлением 8,0 Ом. Каким должно быть отношение числа витков в первичной и вторичной обмотках трансформатора?

\* 41. (I) Усилитель низкой частоты имеет клеммы для подключения нагрузки 4, 8 и 16 Ом. К каким клеммам следует подключать параллельно два громкоговорителя по 8 Ом?

### Раздел 32.8

\* 42. (II) Известны случаи, когда сила тока 0,02 мА вызывала фибрилляцию сердца у пациента с вживленными электродами. а) При какой емкости по отношению к проводнику, находящемуся под напряжением 120 В, 60 Гц, ток утечки достигает указанной величины? б) Какую площадь должны иметь проводники, находящиеся на расстоянии 2 мм один от другого, чтобы образованный ими конденсатор имел такую емкость? Реальна ли подобная ситуация?

Задачи с использованием программируемого калькулятора<sup>1)</sup>

\* 43. (III) Последовательная  $RCL$ -цепочка ( $L = 110$  мГн,  $R = 150$  Ом,  $C = 200$  мкФ) подключена к источнику переменного напряжения 150 В (эффективное значение) регулируемой частоты. Покажите, что эта цепочка описывается дифференциальным уравнением вида

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

Составьте программу для интегрирования этого уравнения и построения графика  $I$  при напряжении источника  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ . Определите резонансную частоту  $\omega_0$  для данной цепи, положите  $\omega = \omega_0/2$  и постройте зависимость  $I(t)$  на протяжении примерно десяти периодов, начиная от  $t = 0$ ; при  $t = 0$   $I = 0$  и  $dI/dt = 0$ . Обратите внимание на «переходные процессы», предшествующие установлению стационарной картины колебаний тока. Объясните наблюдаемые явления.

\* 44. (III) Решите задачу 43 при  $\omega = \omega_0$ . Если вы уже решили задачу 43, сравните полученные результаты.

\* 45. (III). Решите задачу 43 при  $\omega = 2\omega_0$ . Если вы уже решили задачу 43, сравните полученные результаты.

<sup>1)</sup> См. разд. 2.10.