

В XIX в. кульминацией развития электромагнитной теории стало предсказание и экспериментальное подтверждение способности электромагнитных полей распространяться в пространстве. Это достижение открыло возможности создания принципиально новых средств связи: вначале беспроводного телеграфа, а затем радио и телевидения. Теория привела также к важному заключению о том, что свет представляет собой электромагнитную волну.

Существование электромагнитных волн теоретически предсказал шотландский физик Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879), сумевший объединить в рамках блестящей теории описание всех явлений электричества и магнетизма.

В начале XIX в. Эрстед, Ампер и другие физики, развивая электромагнитную теорию, не пользовались концепциями электрического и магнитного полей. Представление о поле было введено несколько позднее Фарадеем. Однако эта концепция не находила широкого признания до тех пор, пока Максвелл не показал, что все электрические и магнитные явления могут быть описаны всего четырьмя уравнениями, содержащими электрическое и магнитное поля. Эти *уравнения Максвелла* так же фундаментальны, как и законы Ньютона; они позволяют описать все электромагнитные явления. Прежде чем перейти к обсуждению уравнений Максвелла и электромагнитных волн, мы должны изложить важную новую гипотезу, выдвинутую Максвеллом, и рассмотреть теорему Гаусса для магнитного поля. Этим вопросам посвящены первые два раздела.

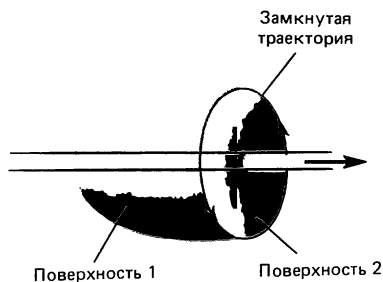
33.1. Ток смещения. Возникновение магнитного поля при изменении электрического поля

Эрстед обнаружил, что электрический ток создает магнитное поле; математически этот факт выражается законом Ампера (29.2):

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Согласно гипотезе Максвелла, существует и другая причина возникновения магнитного поля. Коль скоро в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея (гл. 30) изменение магнитного поля приводит к появле-

Рис. 33.1. Применение закона Ампера к двум различным поверхностям, натянутым на один и тот же замкнутый контур.

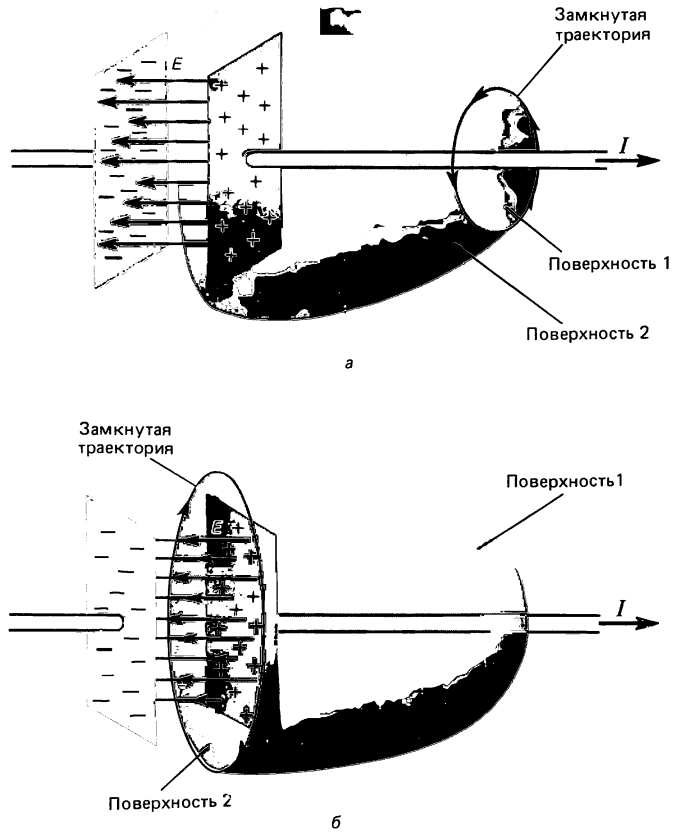


нию электрического поля, то должно быть справедливо и обратное: *изменение электрического поля должно сопровождаться возникновением магнитного поля*. Подчеркнем, что для Максвелла это было именно *гипотезой*, основанной на представлении о симметрии законов природы. Максвелл понимал, что эффект в большинстве случаев настолько мал, что будет трудно подтвердить его экспериментально.

Для обоснования своей гипотезы Максвелл использовал косвенное доказательство. Ход его рассуждений был приблизительно таков. Согласно закону Ампера, если разбить любой замкнутый контур на короткие отрезки dl , умножить длину каждого отрезка на величину параллельной компоненты индукции \mathbf{B} на этом отрезке и просуммировать (проинтегрировать) полученные произведения по всему контуру, то сумма (интеграл) будет равна произведению μ_0 на силу тока I , который пронизывает поверхность, ограниченную контуром интегрирования. Применяя закон Ампера для вычисления индукции магнитного поля прямолинейного проводника с током, мы считали, что ток пронизывает круг, ограниченный контуром в виде окружности. На рис. 33.1 этому случаю соответствует плоская «поверхность 1». Но с таким же успехом можно было бы рассматривать и «мешок», опирающийся на контур интегрирования («поверхность 2»), поскольку эту поверхность пронизывает такой же ток I . Иначе говоря, любую поверхность, опирающуюся на контур интегрирования, пронизывает один и тот же ток. Значит, сила тока, входящего в объем, ограниченный поверхностями 1 и 2, равна силе тока, выходящего из этого объема. Это утверждение, по существу, эквивалентно правилу Кирхгофа: оно гласит, что скорость втекания заряда в замкнутый объем равна скорости вытекания заряда из этого объема.

Рассмотрим теперь несколько иную ситуацию (рис. 33.2, а), в которой происходит разряд конденсатора. Для поверхности 1 закон Ампера выполняется, но для поверхности 2 он несправедлив, так как через поверхность 2 ток не протекает ($I = 0$). Вокруг проводника существует магнитное поле, и левая часть в законе Ампера не равна нулю, правая же часть обращается в нуль (в случае

Рис. 33.2. Конденсатор разряжается. Через поверхность 2 ток проводимости на обоих рисунках отсутствует. В выражение для закона Ампера необходимо ввести дополнительный член.



поверхности 2), так как сила тока равна $I = 0$. Аналогично обстоит дело и с замкнутым контуром на рис. 33.2, б, окружающим область электрического поля между пластинами конденсатора: поверхность 1 (но не поверхность 2) пронизывает ток и вдоль замкнутого контура существует магнитное поле. Однако оно существует лишь при условии, что заряд перетекает к пластине или от пластины; в этом случае электрическое поле между пластинами изменяется во времени. Максвелл разрешил проблему, связанную с отсутствием тока через поверхность 2, предположив, что изменяющееся электрическое поле между обкладками конденсатора эквивалентно электрическому току, который он назвал **током смещения** I_D (сегодня этот термин звучит довольно туманно). Обычный же ток называют **током проводимости** I . Закон Ампера теперь можно записать в виде

$$\oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_D). \quad (33.1)$$

Этот закон выполняется и для поверхности 2 на рис. 33.2, а

и b , где ток смещения I_D соответствует изменяющемуся электрическому полю¹⁾.

Силу тока смещения I_D можно выразить через изменяющееся электрическое поле между пластинами конденсатора на рис. 33.2. Заряд Q на конденсаторе емкостью C равен $Q = CV$, где V – разность потенциалов между обкладками. Вспомним также, что $V = Ed$, где d – (небольшое) расстояние между обкладками, а E – напряженность электрического поля между ними, и мы пренебрегаем краевыми эффектами поля. Емкость плоского конденсатора равна $C = \epsilon_0 A/d$, где A – площадь каждой пластины (гл. 25). С учетом этого получаем

$$Q = CV = \epsilon_0 \frac{A}{d} Ed = \epsilon_0 AE.$$

Мы видим, что если заряд на обкладке изменяется со скоростью dQ/dt , то и напряженность поля изменяется пропорционально. Продифференцировав последнее равенство, имеем

$$\frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt},$$

где dQ/dt – скорость, с которой заряд накапливается на обкладке конденсатора или покидает обкладку; иначе говоря, это ток, втекающий в конденсатор или вытекающий из него. Этот ток, втекающий в конденсатор, равен току смещения I_D между обкладками:

$$I_D = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt}, \quad (33.2)$$

или

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

где $\Phi_E = EA$ – поток напряженности электрического поля. Закон Ампера принимает вид

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (33.3)$$

В этой форме он включает гипотезу Максвелла о том, что магнитное поле создается не только обычным электрическим током, но и изменяющимся электрическим полем (изменяющимся потоком напряженности электрического

¹⁾ Заметим, что эта интерпретация изменяющегося электрического поля как тока смещения хорошо соответствует рассмотренной в гл. 32 картине прохождения переменного тока через конденсатор. Она позволяет также применять правило Кирхгофа к обкладке конденсатора: к обкладке течет ток проводимости, но с обкладки тока проводимости нет. Вместо этого с пластины «течет» ток смещения.

поля). Хотя формула (33.3) получена нами для частного случая, она справедлива и в общем случае, хотя обычно, как уже говорилось, ток смещения (которому отвечает второй член в правой части) очень мал¹⁾.

Пример 33.1. Площадь круглых пластин конденсатора емкостью 30 пФ с воздушным зазором равна $A = 100 \text{ см}^2$. Конденсатор заряжается от батареи с напряжением 70 В через резистор 2,0 Ом. В момент подключения батареи электрическое поле между пластинами изменяется наиболее быстро. Рассчитайте для этого момента: а) силу тока смещения между обкладками конденсатора; б) скорость изменения электрического поля между пластинами. в) Вычислите индукцию магнитного поля, обусловленную изменяющимся электрическим полем. Поле E в пространстве между пластинами считайте однородным в любой момент времени и равным нулю за пределами конденсатора.

Решение. а) Как показано в разд. 27.5, заряд конденсатора в RC -цепочке проис-

ходит по закону

$$Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}),$$

где \mathcal{E} – ЭДС батареи. Чтобы найти ток при $t = 0$, продифференцируем это равенство и подставим численные значения $\mathcal{E} = 70 \text{ В}$, $C = 30 \text{ пФ}$, $R = 2,0 \text{ Ом}$:

$$\left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{C\mathcal{E}}{RC} e^{-t/RC} \right|_{t=0} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{70 \text{ В}}{2,0 \text{ Ом}} = 35 \text{ А}.$$

Скорость изменения заряда в конденсаторе равна силе тока, который течет в этот момент в цепи. Такую же величину имеет и сила тока смещения, $I_D = 35 \text{ А}$.

б) По формуле (33.2)

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{I_D}{\epsilon_0 A} = \\ &= \frac{35 \text{ А}}{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2)(1,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2)} = \\ &= 4,0 \cdot 10^{14} \text{ В/м} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

в) Будем считать без доказательства, что силовые линии индукции \mathbf{B} перпендикулярны \mathbf{E} и в силу симметрии представляют собой окружности (рис. 33.3); с такой симметрией мы уже сталкивались в обратной ситуации, когда электрическое поле создавалось изменяющимся магнитным полем (разд. 30.4; см. рис. 30.6). Применим закон Ампера в форме (33.3) к области между обкладками, где сила тока проводимости $I = 0$:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

В качестве контура интегрирования возьмем окружность радиусом r , совпадающую с силовой линией индукции магнит-

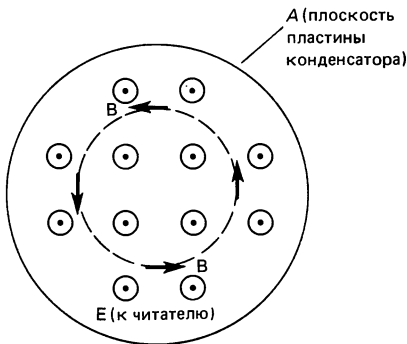


Рис. 33.3. К примеру 33.1. Вектор \mathbf{E} направлен к читателю; силовые линии индукции магнитного поля \mathbf{B} – окружности (одна из них показана штриховой линией).

¹⁾ В действительности в правой части существует и третий член, который описывает магнитное поле, создаваемое магнитными материалами (сила тока намагничивания I_M ; разд. 29.9). Для его учета μ_0 надо заменить на μ . Нас, однако, интересуют главным образом ситуации, когда магнитные материалы отсутствуют. При наличии диэлектрика величина ϵ_0 заменяется на $\epsilon = K\epsilon_0$ (разд. 25.5).

ного поля. При $r \leq R$ (где R – радиус пластины)

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (\pi r^2 E) = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt},$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt} \quad [r \leq R].$$

За пределами конденсатора $E = 0$ ($r > R$), и

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (\pi R^2 E) = \mu_0 \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt},$$

или

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt} \quad (r \geq R).$$

Значение B максимально при $r = R$ и равно

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R}{2} \frac{dE}{dt} = \\ &= \frac{1}{2} (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м/А}) \times \\ &\times (8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2) (5,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}) \times \\ &\times (4,0 \cdot 10^{14} \text{ В/м} \cdot \text{с}) = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}, \end{aligned}$$

поскольку $R = \sqrt{A/\pi} = 5,6$ см. Это очень слабое поле, и продолжительность его существования очень мала (постоянная времени $RC = 6,0 \cdot 10^{-11}$ с), поэтому измерить его крайне трудно.

33.2. Теорема Гаусса для магнитного поля

Чтобы перейти наконец к уравнениям Максвелла, нам осталось только сформулировать теорему Гаусса для магнитного поля. Как уже говорилось в гл. 30, при индукции магнитного поля \mathbf{B} магнитный поток Φ_B через поверхность определяется как

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A},$$

где поверхность, по которой берется интеграл, может быть как замкнутой, так и незамкнутой. Интеграл по замкнутой поверхности, т.е. поверхности, ограничивающей какой-либо объем, записывается в виде

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}.$$

В случае электрического поля (разд. 23.2) поток напряженности Φ_E через замкнутую поверхность равен полному заряду Q , заключенному внутри поверхности, деленному на ε_0 [формула (23.4)]:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

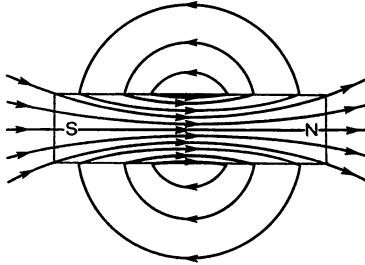
Это утверждение называют *теоремой Гаусса для электрического поля*.

Аналогичное соотношение может быть записано и для магнитного поля. Однако, как уже говорилось выше, несмотря на интенсивные поиски, изолированные магнитные заряды (магнитные монополи) до сих пор с уверенностью не обнаружены. Поэтому *теорема Гаусса для магнитного поля* записывается в виде

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (33.4)$$

Это равенство отражает тот факт, что из замкнутого объема выходит столько же силовых линий индукции

Рис. 33.4. Силовые линии индукции магнитного поля магнитного стержня.



магнитного поля, сколько входит в него. Действительно, если магнитных зарядов не существует, то не существует и «источников» и «стоков», на которых могли бы начинаться или заканчиваться силовые линии, подобно тому как силовые линии напряженности электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Силовые линии индукции магнитного поля должны быть непрерывными; у магнитного стержня, например, индукция магнитного поля \mathbf{B} существует как снаружи, так и внутри него, и силовые линии индукции магнитного поля \mathbf{B} образуют замкнутые контуры (рис. 33.4).

33.3. Уравнения Максвелла

Теперь мы полностью готовы к тому, чтобы выписать все четыре уравнения Максвелла: все они уже знакомы нам по последним 12 главам. В отсутствие диэлектриков и магнетиков уравнения Максвелла имеют вид

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (33.5a)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (33.5b)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (33.5b')$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (33.5g)$$

Первые два уравнения Максвелла – это просто теорема Гаусса соответственно для электрического [гл. 23, формула (23.4)] и магнитного [разд. 33.2, формула (33.4)] полей. Третье – закон электромагнитной индукции Фарадея [гл. 30, формула (30.6)], и четвертое – закон Ампера, обобщенный Максвеллом (разд. 33.1).

Уравнения Максвелла имеют следующий смысл: 1) обобщенный закон Кулона, связывающий электрическое поле с его источниками, электрическими зарядами; 2) математическое выражение факта отсутствия изолированных магнитных зарядов: силовые линии магнитного поля непрерывны (замкнуты) в отличие от силовых линий электрического поля, которые начинаются или заканчиваются на электрических зарядах; 3) изменение магнит-

ного поля порождает электрическое поле; 4) магнитное поле создается электрическим током или изменяющимся электрическим полем.

Уравнения Максвелла выражают основные законы электромагнетизма. Они столь же фундаментальны, как и три закона движения и закон всемирного тяготения Ньютона в механике. В некотором смысле уравнения Максвелла даже более фундаментальны, так как в отличие от законов Ньютона они справедливы и в релятивистском случае (гл. 39). Уравнения Максвелла, в которых сведены воедино все законы электромагнетизма, являются одним из величайших триумфов человеческой мысли.

В предыдущих главах мы видели, что электрическое и магнитное поля можно рассматривать по отдельности, если они не изменяются во времени. Если же поля изменяются во времени, то по отдельности их рассматривать уже нельзя: изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле, а изменение электрического поля приводит к возникновению магнитного поля. Важным следствием этого оказывается возникновение электромагнитных волн.

33.4. Генерация электромагнитных волн

Согласно Максвеллу, изменяющееся электрическое поле порождает в пустом пространстве магнитное поле. На этом основании Максвелл пришел к следующему заключению. Если изменяющееся магнитное поле приводит к появлению электрического поля, то электрическое поле также будет изменяться. Это изменение электрического поля приведет в свою очередь к появлению изменяющегося магнитного поля и т. д. Анализируя свои уравнения, Максвелл обнаружил, что конечным итогом подобной связи изменяющихся полей будет появление волны, которая содержит электрическое и магнитное поля и способна распространяться в пустом пространстве! Попытаемся качественно разобраться в том, как возникает

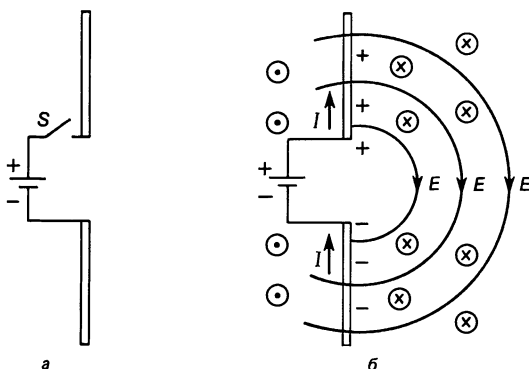


Рис. 33.5. Поля, создаваемые зарядами, движущимися в проводниках. Поле E и индукция магнитного поля B распространяются в пространстве с конечной скоростью.

подобная **электромагнитная волна** (количественный анализ будет проведен в следующем разделе).

Рассмотрим «антенну» из двух проводящих стержней (рис. 33.5, *а*). Допустим, что стержни через ключ соединены с клеммами батареи. При замыкании ключа верхний стержень быстро приобретает положительный заряд, а нижний — отрицательный. Силовые линии электрического поля показаны на рис. 33.5, *б*. Пока заряды перемещаются к стержням, в антенне течет электрический ток I (стрелка указывает направление тока положительных зарядов). Электрический ток создает магнитное поле; силовые линии индукции магнитного поля представляют собой окружности, охватывающие стержни антенны; на рисунке вектор индукции \mathbf{B} направлен к плоскости страницы справа от стержней (\otimes) и от плоскости страницы слева (\odot). Насколько далеко эти поля распространяются в пространстве? В статическом случае они уходили бы в бесконечность. Однако при замыкании ключа эти поля быстро возникают вблизи стержней, но для того, чтобы достичь удаленных точек, потребуется время: и электрическое, и магнитное поля обладают энергией, а энергия не может переноситься с бесконечно большой скоростью.

Этот пример служит иллюстрацией того, что электрическому и магнитному полям, чтобы достигнуть уда-

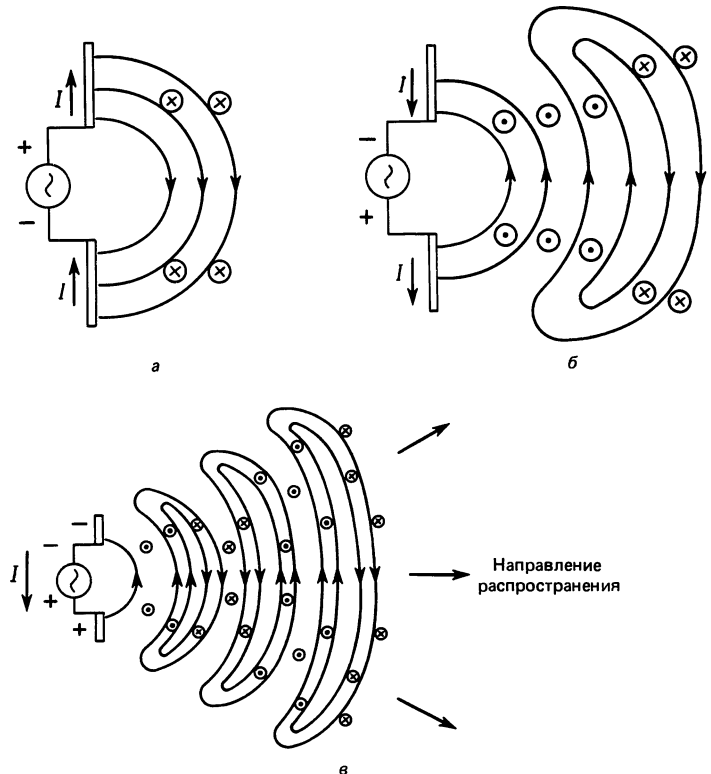


Рис. 33.6. Последовательные картины электрического и магнитного полей, распространяющихся от вибратора, соединенного с источником переменного тока.

ленных точек, требуется время. Представим себе теперь более интересную ситуацию. Предположим, что антенна подключена к генератору переменного тока (рис. 33.6). (В этом случае она называется электрическим дипольным вибратором: в любой момент времени в антенне существует разделение положительных и отрицательных зарядов, и ее дипольный момент осциллирует.) На рис. 33.6, *a* антенна только что подключена к генератору; на стержнях стал накапливаться заряд, и картины полей выглядят, как на рис. 33.5. Знаки $+$ и $-$ соответствуют полярности зарядов на стержнях. Стрелки указывают направление тока. Электрическое поле изображено силовыми линиями в плоскости рисунка, а магнитное поле, согласно правилу правой руки, направлено к плоскости страницы (\otimes) или от нее (\odot). На рис. 33.6, *б* ЭДС генератора проходит через максимум и начинает убывать; ток в антенне течет в противоположном направлении, и его магнитное поле направлено в противоположную сторону. Однако существовавшие до этого поля внезапно не исчезают: они распространяются в пространстве. Поскольку направление вновь возникших полей противоположно прежнему, силовые линии полей «замыкаются» и образуют замкнутые контуры. Спустя некоторое время эта картина силовых линий принимает вид, показанный на рис. 33.6, *в* (обратите внимание на изменение масштаба). Силовые линии полей продолжают распространяться от вибратора. Магнитные силовые линии также замкнуты, но на рисунке этого не видно, так как они расположены перпендикулярно плоскости рисунка.

Поля продолжают распространяться в пространстве, удаляясь от антенны. (Они распространяются во все стороны, а не только вправо, как показано на рис. 33.6.) Напряженность электрического поля и индукция магнитного поля максимальны в направлениях, перпендикулярных направлению колебаний заряда в вибраторе; вдоль направления колебаний заряда – над и под антенной – поля обращаются в нуль.

Из рис. 33.6 можно сделать несколько выводов. Во-первых, в любой точке векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения. Во-вторых, поля изменяют свое направление в пространстве: в одних точках вектор \mathbf{B} направлен к плоскости страницы, в других – от нее; аналогично ведет себя и вектор \mathbf{E} . Напряженность электрического поля (и индукция магнитного поля) изменяется от максимума в одном направлении до нуля и возрастает до максимума в другом направлении. Электрическое и магнитное поля находятся в фазе, т.е. они достигают максимума и обращаются в нуль в одних и тех же точках.

Если ЭДС генератора изменяется по синусоидальному закону, то и напряженность электрического поля, и индукция магнитного поля будут изменяться по синусои-

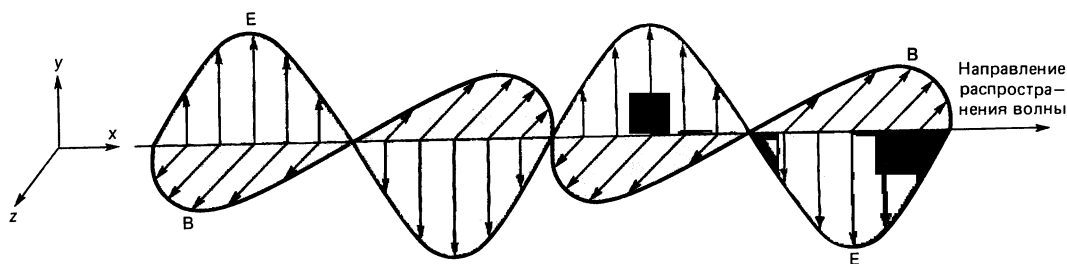


Рис. 33.7. Пространственное распределение напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в электромагнитной волне. Векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Вся картина перемещается в направлении, перпендикулярном \mathbf{E} и \mathbf{B} .

дальному закону. Строго говоря, это справедливо в точках, достаточно удаленных от источника; вблизи антенны (в так называемом ближнем поле) картина полей оказывается довольно сложной. Нас интересуют поля на достаточном удалении от антенны (поля излучения); именно этой ситуации и соответствует картина, изображенная на рис. 33.6, в. Здесь, правда, невозможно усмотреть синусоидальный характер изменения удаленных полей или полей излучения, так как изображены только силовые линии. На рис. 33.7 показано изменение *напряженности* электрического поля и *индукции* магнитного поля в пространстве в фиксированный момент времени; видно, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} перпендикулярны друг другу и направлению распространения.

Электромагнитные волны представляют собой *поперечные* волны (гл. 15) и аналогичны другим типам волн. Однако в электромагнитной волне происходят колебания *полей*, а не вещества, так в случае волн на воде или в натянутом шнуре.

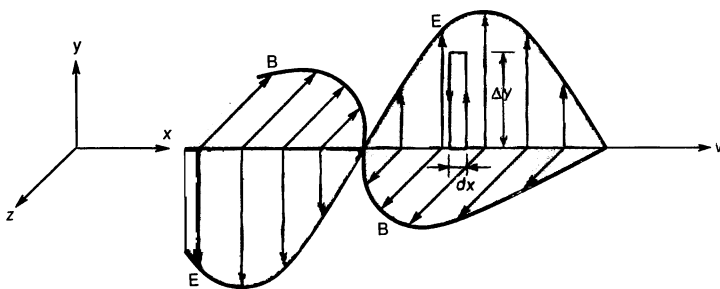
Таким образом, электромагнитные волны генерируются колеблющимися, т.е. движущимися с ускорением, электрическими зарядами. Справедливо и общее утверждение: движущийся с ускорением *электрический заряд испускает электромагнитные волны*.

33.5. Электромагнитные волны и уравнения Максвелла. Скорость распространения электромагнитных волн

Покажем теперь, каким образом существование электромагнитных волн следует из уравнений Максвелла. В этом выводе поражает предсказание не только существования электромагнитных волн, но и той скорости, с которой они должны распространяться.

Рассмотрим область пустого пространства, *свободную от электрических зарядов и токов проводимости*; в такой области вдали от источника волновой фронт (силовые линии на рис. 33.6, в) можно считать плоским на достаточно обширной площади. Такие волны называют *плоскими*: в любой момент времени электрическое и магнитное поля однородны в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Пусть в выбранной сис-

Рис. 33.8. Применение закона Фарадея к малому прямоугольному контуру в плоскости электрических колебаний $(\Delta y)(dx)$.



теме координат плоская волна распространяется вдоль оси x со скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, вектор \mathbf{E} направлен по оси y , а вектор \mathbf{B} — по оси z (рис. 33.7).

Бегущую синусоидальную волну с длиной λ и частотой f , как показано в гл. 15, можно представить в виде

$$E = E_y = E_0 \sin(kx - \omega t), \quad (33.6)$$

$$B = B_z = B_0 \sin(kx - \omega t),$$

где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f, \quad f\lambda = \frac{\omega}{k} = v \quad (33.7)$$

и v — скорость распространения волны. Хотя волну для наглядности можно представлять синусоидальной, в дальнейшем это предположение нам почти не понадобится.

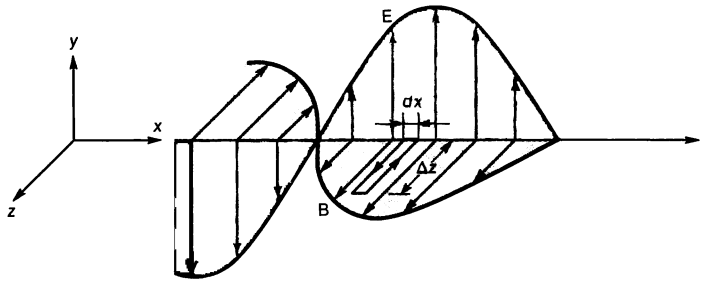
Рассмотрим небольшой прямоугольник в плоскости колебаний электрического вектора \mathbf{E} (рис. 33.8). Пусть этот прямоугольник имеет конечную высоту Δy и очень малую ширину dx . Применим к нему закон электромагнитной индукции Фарадея [третье уравнение Максвелла (33.5 е)]¹⁾:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Посмотрим вначале, что представляет собой интеграл по

¹⁾ Чтобы убедиться в том, что направления \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{v} соответствуют показанным на рисунке, следует применить правило Ленца к прямоугольному контуру. Изменяющийся магнитный поток через этот контур, согласно закону Фарадея, порождает электрическое поле. В рассматриваемой ситуации поток B сквозь контур уменьшается (волна движется вправо), и направление электрического поля, противодействующего этому изменению, соответствует большему значению E в правой части контура и меньшему значению E слева (тогда воображаемый ток был бы направлен против часовой стрелки и его магнитное поле противодействовало бы уменьшению Φ_B ; конечно, никакого тока здесь нет). Таким образом, \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{v} имеют именно такие направления; \mathbf{v} совпадает по направлению с векторным произведением $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Рис. 33.9. Применение четвертого уравнения Максвелла к малому прямоугольнику в плоскости $(\Delta z)(dx)$.



замкнутому контуру. Вдоль коротких сторон прямоугольника (длиной dx) вектор \mathbf{E} перпендикулярен к $d\mathbf{l}$, поэтому $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Далее, если E — напряженность электрического поля вдоль левой стороны прямоугольника, то вдоль правой стороны напряженность будет несколько больше: $E + dE$. Итак, если обойти контур против часовой стрелки, то

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (E + dE)\Delta y - E\Delta y = dE\Delta y.$$

Скорость изменения магнитного потока через прямоугольник равна

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt} dx \Delta y,$$

поскольку площадь контура $(dx)(\Delta y)$ не изменяется. Возвращаясь к закону Фарадея, получаем

$$dE\Delta y = -\frac{dB}{dt} dx \Delta y,$$

или

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}.$$

Заметим, что E и B являются функциями координаты x и времени t , поэтому следует использовать частные производные:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (33.8)$$

где $\partial E/\partial x$ обозначает производную E по x при фиксированном t , а $\partial B/\partial t$ — производную B по t при фиксированном x .

В дополнение к (33.8) можно получить и другое важное соотношение между E и B . Для этого рассмотрим малый прямоугольник в плоскости колебаний вектора индукции магнитного поля \mathbf{B} длиной Δz и шириной dx (рис. 33.9) и применим к нему четвертое уравнение Максвелла (обобщенный закон Ампера):

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

(где мы положили $I = 0$, поскольку токи проводимости отсутствуют). Вдоль коротких сторон $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = 0$, так как вектор \mathbf{V} перпендикулярен $d\mathbf{l}$. Пусть B — индукция магнитного поля вдоль левой стороны прямоугольника длиной Δz ; тогда вдоль правой стороны индукция магнитного поля равна $B + dB$. Вновь проинтегрируем против часовой стрелки и получим

$$\oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = B\Delta z - (B + dB)\Delta z = -dB\Delta z.$$

Обратимся теперь к правой части четвертого уравнения Максвелла:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} dx \Delta z.$$

Приравнявая полученные выражения, имеем

$$-dB\Delta z = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} dx \Delta z,$$

или

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (33.9)$$

где мы сразу воспользовались записью в частных производных.

С помощью уравнений (33.8) и (33.9) можно получить соотношение между величинами E и B и скоростью v . Сейчас нам пригодится предположение о синусоидальном изменении \mathbf{E} и \mathbf{B} в представлении (33.6). Взяв соответствующие производные от (33.6) и подставив их в (33.8), находим

$$kE_0 \cos(kx - \omega t) = \omega B_0 \cos(kx - \omega t),$$

или

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = v,$$

поскольку $v = \omega/k$ [см. (33.7) или (15.12)]. А так как E и B изменяются в фазе друг с другом, они связаны соотношением

$$\frac{E}{B} = v \quad (33.10)$$

в любой точке пространства, где v — скорость волны. Подставляя производные от (33.6) в (33.9), получаем

$$kB_0 \cos(kx - \omega t) = \mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0 \cos(kx - \omega t),$$

или

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{k} = \mu_0 \varepsilon_0 v.$$

Но, согласно (33.10), $B_0/E_0 = 1/v$, так что

$$\mu_0 \epsilon_0 v = \frac{1}{v}$$

или

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (33.11)$$

Таким образом, скорость распространения электромагнитной волны в вакууме постоянна и не зависит от длины волны или частоты.

Этот важный результат можно получить и не пользуясь предположением о синусоидальности волны с помощью формул (33.8) и (33.9). Возьмем производную по t от (33.9):

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

и производную по x от (33.8):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x}.$$

В оба полученные соотношения входит $\partial^2 B / \partial t \partial x$, поэтому можно написать

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \quad (33.12a)$$

Взяв другие производные от (33.8) и (33.9), получим аналогичное соотношение для B :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}. \quad (33.12b)$$

Уравнения (33.12a и 33.12b) совпадают по виду с *волновым уравнением* для плоской волны, распространяющейся в направлении x :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(разд. 15.4). Скорость электромагнитной волны дается соотношением

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

в согласии с (23.11). Мы видим, что из уравнений Максвелла естественным образом следует тот факт, что E и B подчиняются уравнению для волны, распространяющейся со скоростью $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Именно на этом основании Максвелл предсказал существование электромагнитных волн.

Оценим из (33.11) скорость электромагнитной волны

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2)(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{м}/\text{А})} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Это замечательный результат. Он в точности совпадает с измеренным значением скорости света.

33.6. Свет как электромагнитная волна. Шкала электромагнитных волн

Расчет, проведенный в конце предыдущего раздела, привел нас к результату, полученному в свое время и Максвеллом: скорость распространения электромагнитных волн равна $3,00 \cdot 10^8$ м/с и совпадает с экспериментально измеренной скоростью света.

Лет за шестьдесят до Максвелла было показано, что свет ведет себя подобно волне (мы обсудим это в гл. 36). Но никто не мог сказать, что это за волна, т.е. что колеблется в этой волне. Основываясь на своих вычислениях скорости распространения электромагнитных волн, Максвелл утверждал, что свет представляет собой электромагнитную волну. Эта точка зрения вскоре получила признание и других ученых, однако полностью она утвердилась лишь после того, как электромагнитные волны были зарегистрированы на опыте. Впервые электромагнитные волны удалось генерировать и наблюдать в лаборатории Генриху Герцу (1857–1894) в 1887 г., через восемь лет после смерти Максвелла. Герц использовал прибор с искровым промежутком (вibrator Герца), в котором на короткое время возникали колебания заряда; при этом генерировались электромагнитные волны с частотой порядка 10^9 Гц. Он зарегистрировал эти волны на некотором расстоянии от вибратора с помощью проволочного витка, в котором переменное магнитное поле падающей электромагнитной волны возбуждало ЭДС индукции. Позднее было показано, что эти волны распространяются со скоростью света $3,00 \cdot 10^8$ м/с и обладают всеми свойствами света, т.е. отражаются, преломляются и интерферируют. Единственное отличие от света состояло в том, что они были невидимы. Опыты Герца явились убедительным подтверждением теории Максвелла.

Длины волн видимого света были измерены в первом десятилетии прошлого века – задолго до того, как возникло предположение, что свет представляет собой электромагнитную волну. Свету соответствовал диапазон длин волн от $4,0 \cdot 10^{-7}$ до $7,5 \cdot 10^{-7}$ м, или от 400 до 750 нм. Соответствующие частоты можно найти из формул (15.1) или (33.7):

$$f\lambda = c.$$

Здесь через c обозначена скорость света, $c = 3,00 \cdot 10^8$ м/с; f и λ — соответственно частота и длина волны. Скорость света является универсальной постоянной, характеризующей распространение электромагнитных волн в пустом пространстве; поэтому ее обозначают специальным символом c . Из приведенного равенства нетрудно найти, что частоты видимого света лежат в интервале от $4,0 \cdot 10^{14}$ до $7,5 \cdot 10^{14}$ Гц.

Однако видимый свет представляет собой лишь одну из разновидностей электромагнитного излучения. Как уже говорилось, в опытах Герца генерировались электромагнитные волны гораздо более низкой частоты — порядка 10^9 Гц. Такие волны относят к *радиоволнам*: в наши дни именно с их помощью передаются радио- и телевизионные сигналы. Электромагнитные волны, или электромагнитное излучение, генерируются и регистрируются в широком диапазоне частот. Отдельные участки спектра электромагнитного излучения имеют свои названия, приведенные на рис. 33.10. Этот рисунок дает представление о **шкале электромагнитных волн**.

Радиоволны и микроволны генерируются с помощью электронных устройств (рис. 33.6); волны с более высокими частотами при помощи электроники получить крайне трудно. Эти и другие типы электромагнитного излучения испускаются в ряде естественных процессов, таких как излучение атомов, молекул, атомных ядер (об этом подробнее говорится в дальнейшем). В общем случае электромагнитные волны испускаются в результате ускорения электронов или других заряженных частиц, например при колебании электронов в антенне (рис. 33.6). Рентгеновское излучение испускается при резком торможении электронов, движущихся с большой скоростью, при попадании на металлическую мишень (гл. 41). Даже видимый свет от обычной лампы накаливания обусловлен ускорением электронов в раскаленной нити. Далее мы встретимся с различными типами электромагнитных волн. Здесь же упомянем, что инфракрасное (ИК) излучение, которому в спектре электромагнитного излучения соответствует участок сразу за длинноволновой границей видимого света, является основным переносчиком тепла от Солнца. Солнце излучает не только видимый свет, но также и значи-



Рис. 33.10. Спектр электромагнитного излучения.

тельное количество инфракрасного (ИК) и ультрафиолетового (УФ) излучения. Молекулы, входящие в состав кожного покрова человека, «резонируют» на инфракрасных частотах; поэтому именно инфракрасное излучение преимущественно поглощается и тем самым согревает нас.

Пример 33.2. Рассчитайте длину волны электромагнитного излучения с частотой а) 60 Гц и б) 1240 кГц.

или 5000 км. Одна длина волны покрывает Соединенные Штаты от побережья до побережья!

Решение. а) По формуле $c = \lambda f$ имеем

$$\text{б) } \lambda = \frac{3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{1,24 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}} = 240 \text{ м.}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{60 \text{ с}^{-1}} = 5,0 \cdot 10^6 \text{ м,}$$

33.7. Энергия электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга

Электромагнитные волны несут с собой в пространстве энергию. Эта энергия заключена в распространяющихся электрическом и магнитном полях. В гл. 25 [формула (25.6)] было показано, что плотность энергии электрического поля E равна $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, где u_E — энергия единицы объема электрического поля (Дж/м³). Аналогично плотность энергии магнитного поля [формула (31.9)] равна $u_B = \frac{1}{2} B^2 / \mu_0$. Таким образом, полная плотность энергии в той области пространства, где находится электромагнитная волна, равна

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (33.13)$$

В этом равенстве E — напряженность электрического поля, а B — индукция магнитного поля волны в произвольный момент времени в данной точке пространства. Поскольку $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 1/c$ и $B = E/c$ [формулы (33.10) и (33.11)], можно выразить полную плотность энергии только через напряженность электрического поля:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \mu_0 E^2}{\mu_0}, \quad (33.14a)$$

$$u = \epsilon_0 E^2,$$

или только через индукцию магнитного поля:

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 c^2 B^2 = \epsilon_0 B^2 / \epsilon_0 \mu_0. \quad (33.14b)$$

$$u = \frac{B^2}{\mu_0},$$

или через их произведение:

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E c B = \epsilon_0 E B / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad (33.14в)$$

$$u = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E B.$$

Заметим, что полная плотность энергии складывается из двух равных по величине вкладов, соответствующих плотностям энергии электрического и магнитного полей. Формулы (33.14) характеризуют плотность энергии в любой момент времени в любой точке пространства.

Определим энергию, переносимую волной в единицу времени через единичную площадку (плотность потока энергии электромагнитного излучения). Эту векторную величину обычно называют *вектором Пойнтинга*¹⁾ S [по имени английского физика Джона Пойнтинга (1852–1914), близкого друга и коллеги Дж. Дж. Томсона] и измеряют в ваттах на квадратный метр ($\text{Вт}/\text{м}^2$). Направление вектора S совпадает с направлением переноса энергии, т.е. с направлением распространения электромагнитной волны. Пусть волна проходит через площадку A , перпендикулярную оси x , как показано на рис. 33.11. За время dt волна сместится вправо на расстояние $dx = cdt$, где c – скорость волны. Энергия, прошедшая за время dt через площадку A , заключена в объеме $dV = Adx = Acdt$. Плотность энергии равна $u = \epsilon_0 E^2$, где E – напряженность электрического поля в этом объеме в данный момент времени. Полная энергия dU , заключенная в объеме dV , равна произведению плотности энергии u на объем dV : $dU = udV = (\epsilon_0 E^2)(Acdt)$. Следовательно, плотность потока энергии, проходящего через площадку A за время dt , равна

$$S = \frac{1}{A} \frac{dU}{dt} = \epsilon_0 c E^2. \quad (33.15)$$

Поскольку $E = cB$ и $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, это равенство можно записать в виде

$$S = \epsilon_0 c E^2 = \frac{cB^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}.$$

Вектор S совпадает по направлению со скоростью v которая перпендикулярна B и E , и поэтому для вектора

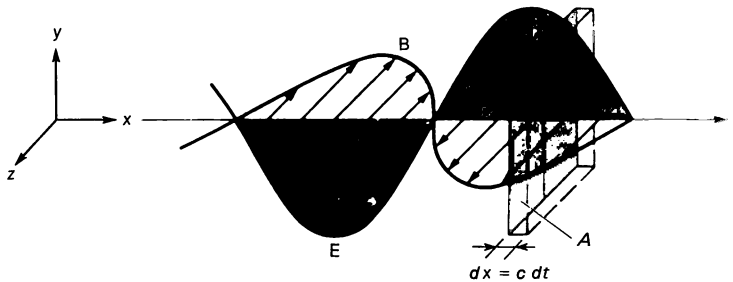


Рис. 33.11. Перенос энергии электромагнитной волной через площадку A .

¹⁾ В отечественной литературе вектор S часто называют вектором Умова–Пойнтинга, отмечая этим вклад Николая Алексеевича Умова (1846–1915), который ввел в 1874 г. понятия скорости и направления движения энергии, потока плотности энергии. – *Прим. перев.*

Пойнтинга можно написать

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (33.16)$$

Формула (33.15) дает *мгновенное* значение плотности потока энергии электромагнитной волны. Часто бывает необходимо знать *среднее* значение за длительный промежуток времени. Если E и B изменяются по синусоидальному закону, то среднеквадратичное значение, как и для синусоидальных токов и напряжений, равно $\bar{E}^2 = E_0^2/2$, где E_0 – *амплитудное* (максимальное) значение напряженности E . Поэтому среднее значение вектора Пойнтинга равно

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} B_0^2 = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}, \quad (33.17)$$

где B_0 – амплитудное значение индукции магнитного поля.

Пример 33.3. Плотность потока солнечного излучения, падающего на границу земной атмосферы, равна 1350 Вт/м^2 . Определите амплитудные значения E и B , считая, что весь поток создается единственной электромагнитной волной.

Решение. По формуле (33.17) $\bar{S} = 1350 \text{ Дж/с} \cdot \text{м}^2 = \epsilon_0 c E_0^2/2$, откуда

$$\begin{aligned} E_0 &= \sqrt{\frac{2\bar{S}}{\epsilon_0 c}} = \\ &= \sqrt{\frac{2(1350 \text{ Дж/с} \cdot \text{м}^2)}{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2)(3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с})}} = \\ &= 1,01 \cdot 10^3 \text{ В/м}. \end{aligned}$$

По формуле (33.10)

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1,01 \cdot 10^3 \text{ В/м}}{3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}.$$

Как видно из этого примера, численное значение B очень мало по сравнению с значением E ; это различие обусловлено лишь выбором соответствующих единиц и способом их определения. Как мы уже видели, энергия электромагнитной волны поровну распределена между электрическим и магнитным полями.

* 33.8. Уравнения Максвелла и электромагнитные волны в материальной среде

В присутствии диэлектриков и (или) магнетиков уравнения Максвелла должны быть несколько видоизменены. Примем для простоты, что среда однородна и изотропна (т. е. обладает одинаковыми свойствами по всем направлениям), а относительная диэлектрическая проницаемость K и относительная магнитная проницаемость K_m представляют собой константы. Тогда в уравнениях Максвелл-

ла (33.5) ϵ_0 следует заменить на $\epsilon = K\epsilon_0$, а μ_0 – на $\mu = K_m\mu_0$; заряд Q в (33.5а) должен обозначать только свободные заряды (гл. 25 и 29).

Скорость распространения электромагнитной волны в этом случае равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}}, \quad (33.18)$$

где c – скорость света в пустом пространстве. Поскольку для большинства диэлектриков $K_m \approx 1$, а K всегда больше единицы, скорость света в среде всегда меньше, чем в вакууме.

В идеальном проводнике ($\rho = 0$) электрическое поле не может существовать (наличие электрического поля привело бы к возникновению бесконечно большого тока). Поэтому электромагнитная волна не может проникнуть в идеальный проводник и испытывает полное отражение. Действительно, отполированные металлические поверхности хорошо отражают электромагнитные волны и не прозрачны для электромагнитного излучения. В реальный проводник электромагнитные волны проникают на небольшую глубину ($\rho \neq 0$), и возникающие при этом электрические токи приводят к поглощению части энергии волны.

* 33.9. Передающие линии

Рассмотрим длинную передающую линию, например пару параллельных проводников или коаксиальную кабель, к одному из концов которой подключен источник ЭДС. Другой конец может быть соединен с электрическим или электронным прибором либо с антенной. Пусть в момент $t = 0$ проводники передающей линии соединяются с клеммами источника постоянной ЭДС V_0 . Проводники не смогут мгновенно приобрести заряд по всей длине. Сила тока и напряжение тоже не могут мгновенно приобрести установившееся значение по всей длине линии. В действительности граница между заряженной и незаряженной частями проводника, как показано на рис. 33.12, а, перемещается от источника с конечной скоростью v . Если проводники находятся в вакууме (или воздухе) и обладают нулевым сопротивлением, эта скорость равна скорости света в пустом пространстве c . Аналогичным образом напряжение между двумя проводниками в зависимости от расстояния x имеет вид «ступеньки» (рис. 33.12, б), которая перемещается вдоль линии со скоростью c . Процесс представляет собой распространение «импульса» вдоль передающей линии. Если заменить источник постоянной ЭДС источником синусоидальной ЭДС с частотой f , то по передающей линии будет распространяться синусоидаль-

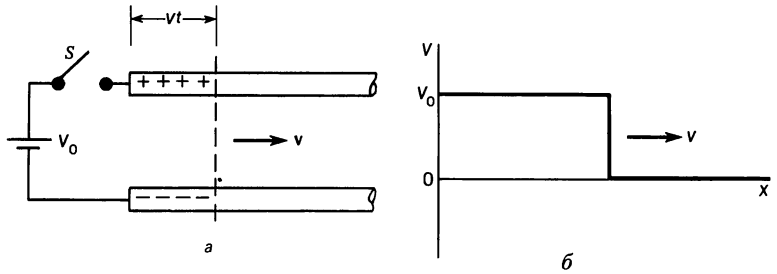


Рис. 33.12. *a* – заряд движется со скоростью v (в вакууме при нулевом электрическом сопротивлении $v = c$) вдоль передающей линии после подключения к источнику постоянной ЭДС V_0 . Штриховой линией показан «волновой фронт»; *b* – график разности потенциалов между проводниками в момент t .

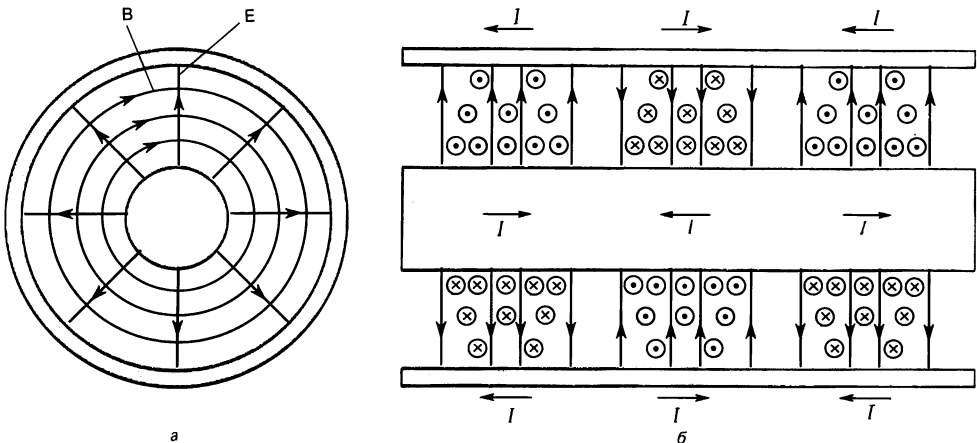
ная волна с длиной

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

если проводники имеют нулевое сопротивление и находятся в вакууме. Пространство между проводниками в коаксиальном кабеле заполнено диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью K , поэтому в соответствии с (33.18) скорость распространения волны уменьшается в K раз. В случае линии переменного тока с частотой 60 Гц длина волны $\lambda = (3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с}) / (60 \text{ с}^{-1}) = 5000 \text{ км}$, так что синусоидальное распределение напряжения в линии удастся заметить разве что на длине трансконтинентальной линии электропередач. На более высоких частотах, таких как радиочастоты, синусоидальная картина проявляется на значительно более коротких расстояниях.

Рис. 33.13. Поперечное (*a*) и продольное (*b*) сечения коаксиального кабеля. Силовые линии электрического поля направлены радиально, силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности. Стрелками показано направление тока в проводниках.

На рис. 33.13 показано распределение электрического и магнитного полей по коаксиальному кабелю, проводники которого имеют нулевое сопротивление и находятся в вакууме. В действительности картина полей может быть гораздо более сложной; на рисунке изображена простейшая ситуация. Силовые линии электромагнитного поля направлены вдоль радиуса, а силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности.



Подобные системы анализируются либо методом эквивалентных схем, либо с точки зрения бегущей волны; и в том и в другом случае анализ оказывается очень сложным. Заметим только, что кабель как электрическая цепь обладает индуктивностью и емкостью; заряд и ток распространяются в кабеле со скоростью c (направления токов в проводниках показаны на рисунке стрелками с буквой I). С волновой точки зрения электрическое и магнитное поля распространяются подобно плоской волне со скоростью c в ограниченном пространстве между проводниками. Когда волна достигает конца передающей линии, где к линии подключена какая-либо схема или электронный прибор, волна частично отражается, если только линия не нагружена на чисто активное сопротивление определенной величины. Значение сопротивления, при котором отражения волны не происходит, называется *волновым сопротивлением* линии; на практике используются кабели с различным волновым сопротивлением. Типичное волновое сопротивление коаксиального кабеля составляет 50 Ом^1 .

Для передачи сверхвысокочастотных электромагнитных волн (микроволн) используют *волноводы*. Волновод представляет собой полый металлический проводник (обычно прямоугольного сечения). Анализ распространения волны в волноводе чрезвычайно сложен; даже в вакууме скорость волны в волноводе не равна скорости света c .

* 33.10. Дифференциальная форма уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла могут быть записаны и в другой форме, которая часто оказывается более удобной, чем уравнения (33.5). Обычно этот вопрос рассматривается в курсах теоретической физики: мы включили его лишь для полноты изложения.

Сформулируем вначале без доказательства две теоремы векторного анализа. Первая из них — это *теорема Гаусса*, или *теорема источника*, которая связывает интеграл по поверхности от произвольной векторной функции \mathbf{F} с интегралом от дивергенции этой функции по объему, заключенному внутри замкнутой поверхности:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Поверхность A Объем V

Оператор ∇ (набла) — это *градиент*, который в декартовых

¹⁾ Волновое сопротивление двухпроводной линии равно $Z = \sqrt{L/C}$, где C и L — емкость и индуктивность единицы длины линии. — Прим. перев.

координатах определяется как

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Величина

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

называется *дивергенцией* вектора \mathbf{F} .

Вторая теорема — это *теорема Стокса*, которая связывает интеграл по замкнутому контуру с интегралом по поверхности, опирающейся на этот контур:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.$$

Контур Поверхность A

Векторное произведение $\nabla \times \mathbf{F}$ называется *вихрем* (*ротором*) \mathbf{F} (о векторном произведении см. разд. 10.1).

Пользуясь этими теоремами, мы можем получить уравнения Максвелла в пустом пространстве в дифференциальной форме. Применим теорему Гаусса к левой части уравнения (33.5a) (закону Гаусса):

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \int \nabla \cdot \mathbf{E} dV.$$

Заряд Q можно выразить через интеграл по объему от плотности заряда ρ : $Q = \int \rho dV$. Тогда

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV.$$

Правая и левая части этого равенства представляют собой интегралы по одному и тому же объему; чтобы равенство выполнялось для объема *любых* размеров и формы, подинтегральные выражения должны быть равны между собой:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (33.19a)$$

Это дифференциальная форма теоремы Гаусса для электрического поля. Проведя аналогичные действия со вторым уравнением Максвелла $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$, получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (33.19b)$$

Теперь применим теорему Стокса к левой части третьего уравнения Максвелла:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}.$$

Так как магнитный поток $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$, получим

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

(где $\partial/\partial t$ — частная производная, поскольку \mathbf{B} может зависеть также от координаты). В обеих частях теперь стоят

интегралы по одной и той же поверхности; чтобы равенство выполнялось для любой поверхности, даже самой малой, необходимо

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (33.19\text{в})$$

Это третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме. Наконец, применим теорему Стокса к последнему уравнению Максвелла:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Учитывая, что $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$, получаем

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}.$$

Силу тока проводимости I можно выразить с помощью (26.8) через плотность тока \mathbf{j} :

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A},$$

и четвертое уравнение Максвелла принимает вид

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}.$$

Чтобы это равенство выполнялось для любой поверхности A независимо от ее размеров и формы, подынтегральные выражения должны быть равны между собой:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (33.19\text{г})$$

Итак, уравнения (33.19) представляют собой уравнения Максвелла в дифференциальной форме в пустом пространстве. Обе формы уравнений Максвелла приведены в табл. 33.1.

Таблица 33.1. Уравнения Максвелла в пустом пространстве

| Интегральная форма | Дифференциальная форма |
|---|--|
| $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ | $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ |
| $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$ | $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ |
| $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ | $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{dt}$ |
| $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ | $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ |

ла. Он основывался на уже известных фактах, дополнив их гипотезой о том, что изменяющееся электрическое поле приводит к возникновению магнитного поля. Уравнения Максвелла имеют вид

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Первые два уравнения представляют собой теорему Гаусса для электрического и магнитного полей; третье – закон электромагнитной индукции Фарадея, четвертое – дополненный Максвеллом закон Ампера.

Теория Максвелла предсказала испускание поперечных *электромагнитных волн* при ускоренном движении электрических зарядов; электромагнитные волны распространяются в пространстве со скоростью света c . Направления колебаний электрического и магнитного полей в электромагнитной волне перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны.

После экспериментального обнаружения электромагнитных волн в конце XIX в. представление о том, что свет является электромагнитной волной (хотя и с гораздо более высокой частотой, чем волны, с которыми проводились опыты в лаборатории), получило всеобщее признание. *Спектр (шкала) электромагнитного излучения* охватывает очень широкий диапазон длин волн – радиоволны, микроволны, видимый свет, рентгеновское и гамма-излучение; все они распространяются в пространстве со скоростью $c = 3,00 \cdot 10^8$ м/с.

Энергия, переносимая электромагнитной волной, характеризуется вектором Пойнтинга $\mathbf{S} = (1/\mu_0)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$, который определяет плотность потока энергии электромагнитной волны (энергию, переносимую через единицу площади за единицу времени), где E и B – мгновенные значения напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в пустом пространстве.

Вопросы

1. Как направлен ток смещения на рис. 33.2 (конденсатор разряжается)?
2. Представьте, что вы смотрите вдоль вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} в момент, когда напряженность возрастает. Как направлены силовые линии индукции магнитного поля: по часовой стрелке или против? А если вектор \mathbf{E} направлен к вам и величина E убывает?
3. Почему магнитное поле, обусловленное током смещения в конденсаторе, обнаружить го-

раздо труднее, чем магнитное поле, обусловленное током проводимости?

4. Имеются ли достаточные основания называть член $\mu_0 \epsilon_0 d\Phi_E/dt$ в (33.3) «током»?
5. Напряженность электрического поля в электромагнитной волне, распространяющейся на север, колеблется в направлении восток – запад. Укажите направление колебаний индукции магнитного поля этой волны.
6. Является ли звук электромагнитной волной? Если нет, то что это за волна?
7. Может ли электромагнитная волна распространяться в абсолютном вакууме? А звуковая волна?

8. В чем сходство и различие между светом и звуком?

9. Что имеет большую длину волны: сигналы радио- и телевизионных станций или видимый свет?

10. Частоты радиовещания на УКВ намного выше, чем частоты средневолновых станций. На основании того, что говорилось в гл. 15 о дифракции, объясните, почему приему средневолновых станций меньше мешают препятствия в виде холмов или зданий на пути распространения радиоволн.

11. Каким участкам электромагнитного спектра соответствуют электромагнитные волны с длиной волны 10^3 км? 1 км? 1 м? 1 см? 1 мм? 1 мкм?

12. Какой вывод можно сделать из формулы (32.2) относительно разности фаз между током на электростанции и током у потребителя на расстоянии 200 км?

13. Может ли различие в длине проводов, соединяющих звуковые колонки со стереоусилителем, привести к запаздыванию звука, излучаемого одной из колонок? Объясните.

14. Загорается ли люстра одновременно с поворотом выключателя? Объясните.

* 15. Укажите на рис. 33.13, b знак заряда на каждом из проводников в момент, изображенный на рисунке.

* 16. Покажите направление тока проводимости в различных точках каждого проводника на рис. 33.12. Ответ поясните.

Задачи

Раздел 33.1

(I) Рассчитайте силу тока смещения I_D между квадратными пластинами конденсатора со стороной 1,0 см, если напряженность электрического поля изменяется со скоростью $3,0 \cdot 10^6$ В/м·с.

2. (I) В некоторый момент сила тока в проводах, соединенных с пластинами плоского конденсатора, составила 2,8 А. С какой скоростью изменяется напряженность электрического поля в конденсаторе с пластинами в форме квадрата со стороной 1,00 см?

3. (II) Покажите, что сила тока смещения в плоском конденсаторе может быть записана в виде $I_D = CdV/dt$, где V – мгновенное значение напряжения на обкладках.

4. (II) Скорость накопления заряда на круглых обкладках плоского конденсатора емкостью 12,0 пФ составляет 12,0 мКл/с. Чему равна индукция магнитного поля на расстоянии 15,0 см по радиусу от центра конденсатора, если радиус обкладок равен 0,600 см?

5. (II) а) Покажите, что индукция магнитного

поля вне обкладок конденсатора в примере 33.1 имеет величину

$$B = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi r},$$

где I_D – сила тока смещения. б) Объясните, почему эта формула совпадает с выражением для индукции магнитного поля, создаваемого прямолинейным проводником с током. в) Сравните значения индукции магнитного поля между обкладками конденсатора с ее значением вблизи проводника (радиусом 2 мм), по которому к конденсатору подводится ток. Почему эти значения столь различны?

6. (II) Круглые пластины радиусом $R = 3,5$ см воздушного конденсатора находятся на расстоянии $d = 2,0$ мм друг от друга. Конденсатор подключен к источнику переменной ЭДС с частотой 60 Гц, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. Амплитуда силы тока смещения равна 35 мкА. Определите а) амплитуду силы тока проводимости I ; б) величину \mathcal{E}_0 ; в) максимальное значение $d\Phi_E/dt$ между пластинами. Искривлением силовых линий у краев пластин можно пренебречь.

Раздел 33.3

7. (II) Если бы существовали магнитные монополи, то какие из уравнений Максвелла пришлось бы изменить и каким был бы их новый вид? (Обозначьте магнитный заряд монополя через Q_m по аналогии с электрическим зарядом Q .)

Разделы 33.5 и 33.6

8. (I) В электромагнитной волне, распространяющейся на запад, плоскость колебаний индукции магнитного поля B вертикальна. Частота колебаний индукции магнитного поля равна 180 кГц, а среднеквадратичное значение индукции составляет $8,65 \cdot 10^{-9}$ Тл. В каком направлении колеблется электрическое поле? Чему равны частота колебаний и среднеквадратичное значение напряженности электрического поля?

9. (I) Радиостанция с частотной модуляцией вещает на частоте 90,5 МГц. Чему равна соответствующая длина волны? б) Средневолновая станция принимается, когда стрелка на шкале радиоприемника стоит против цифры 1550. Чему равна длина волны, на которой работает эта станция?

10. (II) Выведите волновое уравнение (33.126) для индукции магнитного поля B .

11. (II) Электрическое поле в плоской электромагнитной волне изменяется по закону $E_x = E_0 \cos(kz + \omega t)$, $E_y = E_z = 0$. Определите а) величину и направление B ; б) направление распространения волны.

Раздел 33.7

12. (I) Амплитуда напряженности электрического поля E в электромагнитной волне равна 38 мВ/м. Чему равно среднеквадратичное значение плотности потока энергии, переносимой этой волной?

13. (I) Среднеквадратичное значение индукции магнитного поля в электромагнитной волне равно $2,50 \cdot 10^{-9}$ Тл. Какую энергию переносит эта волна ежесекундно через 1 м^2 ?

14. (I) Какая энергия переносится за 1 ч через площадку $1,0 \text{ см}^2$ электромагнитной волной, в которой среднеквадратичное значение напряженности электрического поля E равно 25 В/м?

15. (I) Чему равна объемная плотность энергии солнечного излучения в расчете на 1 м^3 вблизи поверхности Земли?

16. (II) Луч лазера мощностью 5,0 мВт имеет диаметр 2,0 мм. Чему равны среднеквадратичные значения E и B в луче лазера?

17. (II) Оцените среднюю мощность излучения Солнца, пользуясь тем фактом, что плотность потока энергии, приходящей к Земле на границе атмосферы, равна 1350 Вт/м^2 .

18. (II) Точечный источник испускает равномерно по всем направлениям световую энергию со средней мощностью P_0 на фиксированной частоте f . Покажите, что амплитудное значение напряженности электрического поля в этой волне равно

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 c P_0}{2\pi r^2}}.$$

19. (II) Чему равны E_0 и B_0 волны на расстоянии 10 м от источника света мощностью 100 Вт? Считайте, что лампа излучает свет равномерно по всем направлениям на единственной частоте.

20. (II) Вертикальная антенна радиостанции мощностью 35 кВт излучает по всем направлениям электромагнитную волну. а) Чему равна интенсивность сигнала (в единицах Вт/м^2) на расстоянии 20,0 км от передающей антенны? б) Чему равно среднеквадратичное значение напряженности электрического поля E в этой точке, когда станция работает на полную мощность? в) Чему равна ЭДС, возбуждаемая в вертикальной автомобильной антенне длиной 1,0 м? г) Какова должна быть мощность станции, чтобы ее сигнал имел такую интенсивность на удалении 100 км? (Эта мощность превышает разрешенную в США мощность радиопередающих станций.)

21. (II) УКВ-антенна длиной 1,80 м ориентирована параллельно электрическому вектору E электромагнитной волны. Какой должна быть напряженность электрического поля E , чтобы

возбудить в антенне ЭДС 1,0 мВ (среднеквадратичное значение)? Какова плотность потока энергии электромагнитной волны?

22. (II) Чему равно среднеквадратичное значение ЭДС, возбуждаемой в антенне, которая представляет собой катушку диаметром 0,50 см, содержащую 600 витков, если электромагнитная волна имеет частоту 940 кГц и плотность потока энергии в области антенны равна $2,0 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/м}^2$?

23. (II) а) Покажите, что при заряде конденсатора вектор Пойнтинга S направлен к его центру (имеется в виду плоский конденсатор с круглыми пластинами, как в примере 33.1). б) Проинтегрируйте S по цилиндрической поверхности, ограничивающей воздушный зазор конденсатора, и покажите, что приток энергии к конденсатору равен скорости, с которой увеличивается энергия электростатического поля внутри конденсатора [см. (25.6)]. Искривлением силовых линий на краях обкладок можно пренебречь.

24. (II) По цилиндрическому проводнику радиусом r , имеющему проводимость σ , течет постоянный ток I , однородно распределенный по сечению проводника. а) Определите E внутри проводника. б) Определите B снаружи проводника. в) Определите вектор Пойнтинга S на поверхности проводника и покажите, что он направлен внутрь проводника нормально к поверхности. г) Проинтегрируйте S по поверхности проводника и покажите, что мощность электромагнитной энергии, поступающей в проводник через его боковую поверхность, равна электрической мощности $I^2 R$, рассеиваемой внутри проводника. (Таким образом, поступающую в проводник энергию можно рассматривать скорее как электромагнитную энергию, входящую через его боковую поверхность, чем как электрическую энергию, входящую с его концов.)

* Раздел 33.9

25. (I) До кого скорее доходит звук голоса певца: до зрителя на балконе, удаленном на 50 м от сцены, или до радиослушателя на расстоянии 3000 км, приложившего ухо к приемнику? Насколько скорее? Считайте, что микрофон находится на расстоянии нескольких сантиметров от певца; температура воздуха в зале 20°C .

* 26. (II) Изобразите картину силовых линий электрического и магнитного полей вокруг двухпроводной передающей линии (рис. 33.12, а).

* 27. (II) Покажите в нескольких точках направление тока смещения на рис. 33.13, б в указанный на рисунке момент.

28. (II) а) Применив закон Ампера на рис. 33.13 к замкнутому контуру, concentричному с проводниками кабеля и проходящему между ними, покажите, что указанные на рисунке направления токов согласуются с картиной магнитного поля. б) Найдите зависимость B от силы тока и от расстояния до середины кабеля.

* 29. (II) К концу длинной передающей линии, лишенной сопротивления, приложена ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin 2\pi ft$, где $\mathcal{E}_0 = 20$ В и $f = 5,0 \cdot 10^7$ Гц. Определите, по какому закону зависит разность потенциалов V между проводниками линии а) от времени в точке на расстоянии

$x = 2,0$ м от источника; б) от координаты x в момент $t = 2,0$ с.

30. (III) Внутренний проводник коаксиального кабеля на рис. 33.13 имеет радиус R_1 , а внешний R_2 . К одному концу кабеля подключена батарея с ЭДС V_0 , другой конец нагружен на резистор R . Определите в области между проводниками ($R_1 < r < R_2$) а) \mathbf{E} ; б) \mathbf{B} ; в) \mathbf{S} . г) Проинтегрируйте \mathbf{S} и покажите, что энергия переносится в пустом пространстве (между R_1 и R_2), а соответствующая мощность равна V^2/R . Удивителен ли этот результат?