

Опыт Юнга с интерференцией от двух щелей обеспечил прочную основу волновой теории света. Однако общее признание волновая теория получила лишь благодаря детальному изучению дифракции более чем через десятилетие.

Мы уже бегло упоминали о дифракции при изучении волн на поверхности воды (разд. 15.9) и в связи с обсуждением волновой природы света (разд. 36.1). Напомним, что под дифракцией понимают огибание волнами препятствий. Рассмотрим теперь дифракцию более подробно.

Определенный период в истории волновой теории света неразрывно связан с именем Огюстена Френеля (1788–1827). В 1819 г. он представил Парижской Академии наук волновую теорию света, которая предсказывала и объясняла явления интерференции и дифракции. Почти сразу же Симон Пуассон (1781–1840) обратил внимание на одно следствие теории Френеля, противоречащее интуитивным представлениям: согласно волновой теории Френеля, если свет от точечного источника падает на непрозрачный диск, то в результате дифракции на краях диска в центре тени должно возникать светлое пятно вследствие усиливающей интерференции (рис. 37.1). Такое предсказание казалось весьма неправдоподобным. Но когда предложенный Пуассоном эксперимент осуществил Франсуа Араго, в самом центре тени он обнаружил светлое пятно! Это послужило убедительным доказательством справедливости волновой теории.

На рис. 37.2,а представлена тень от монеты, освещаемой (почти) точечным источником (в данном случае лазером). В центре наблюдается светлое пятно. Обратите внимание на то, что за пределами тени наблюдаются светлые и темные полосы. Они напоминают интерферен-

Рис. 37.1. Если свет – волна, то в центре тени, отбрасываемой непрозрачным диском, освещенным точечным источником монохроматического света, должно появиться светлое пятно.

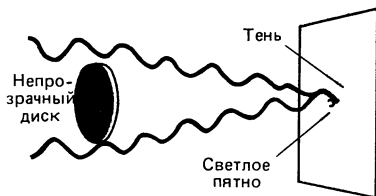
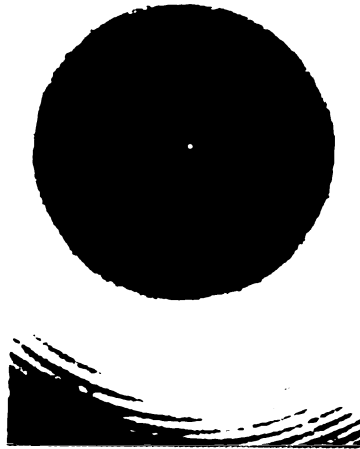
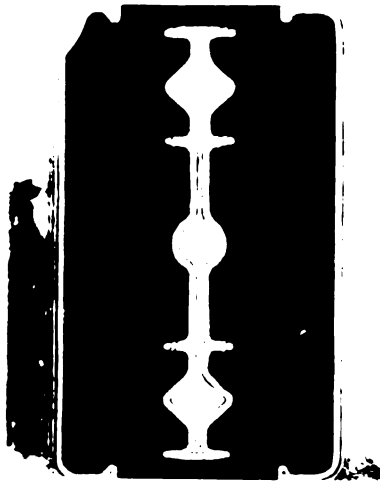


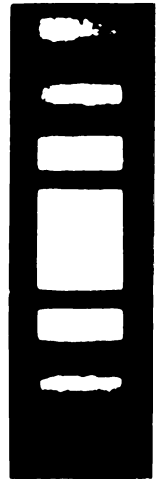
Рис. 37.2. Дифракция на мелкой монете (а) (из работы: *Rinard P. M.*, *Am. J. Phys.*, 1976, *v.* 44, *p.* 70; воспроизводится с разрешения); на лезвии бритвы (б) (из книги: *Sears F. M.* *Optics*.—Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1949, Figure 9-8; воспроизводится с разрешения); на одной щели, освещенной почти точечным источником монохроматического света (в) (из книги: *Cagnet M.*, *Françon M.*, *Thierr J. C.* *Atlas of Optical Phenomena*.—Berlin: Springer-Verlag, 1962).



а



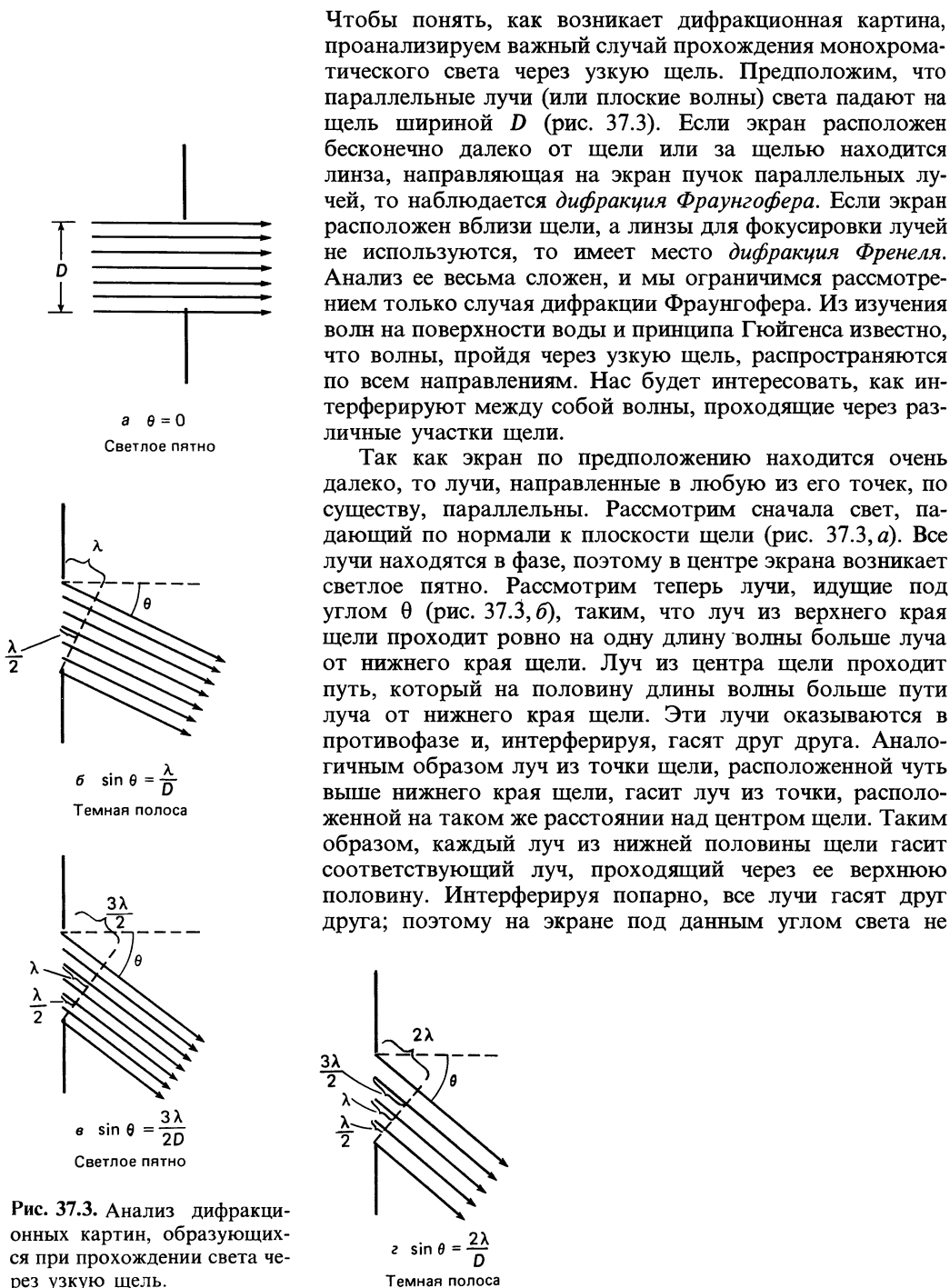
б



в

ционные полосы при интерференции от двух щелей. Но в действительности эти полосы возникают при интерференции волн, которые дифрагируют на различных участках диска; вся картина носит название *дифракционной*. Подобная картина возникает при освещении точечным источником любого объекта с резкими краями, как показано на рис. 37.2, б и в. Мы не всегда замечаем дифракционные картины, так как в большинстве случаев источники, с которыми приходится иметь дело в повседневной жизни, оказываются не точечными и свет от различных участков таких источников смазывает картину.

## 37.1 Дифракция на одной щели



Чтобы понять, как возникает дифракционная картина, проанализируем важный случай прохождения монохроматического света через узкую щель. Предположим, что параллельные лучи (или плоские волны) света падают на щель шириной  $D$  (рис. 37.3). Если экран расположен бесконечно далеко от щели или за щелью находится линза, направляющая на экран пучок параллельных лучей, то наблюдается *дифракция Фраунгофера*. Если экран расположен вблизи щели, а линзы для фокусировки лучей не используются, то имеет место *дифракция Френеля*. Анализ ее весьма сложен, и мы ограничимся рассмотрением только случая дифракции Фраунгофера. Из изучения волн на поверхности воды и принципа Гюйгенса известно, что волны, пройдя через узкую щель, распространяются по всем направлениям. Нас будет интересовать, как интерферируют между собой волны, проходящие через различные участки щели.

Так как экран по предположению находится очень далеко, то лучи, направленные в любую из его точек, по существу, параллельны. Рассмотрим сначала свет, падающий по нормали к плоскости щели (рис. 37.3, а). Все лучи находятся в фазе, поэтому в центре экрана возникает светлое пятно. Рассмотрим теперь лучи, идущие под углом  $\theta$  (рис. 37.3, б), таким, что луч из верхнего края щели проходит ровно на одну длину волны больше луча от нижнего края щели. Луч из центра щели проходит путь, который на половину длины волны больше пути луча от нижнего края щели. Эти лучи оказываются в противофазе и, интерферируя, гасят друг друга. Аналогичным образом луч из точки щели, расположенной чуть выше нижнего края щели, гасит луч из точки, расположенной на таком же расстоянии над центром щели. Таким образом, каждый луч из нижней половины щели гасит соответствующий луч, проходящий через ее верхнюю половину. Интерферируя попарно, все лучи гасят друг друга; поэтому на экране под данным углом света не

будет. Угол  $\theta$ , при котором происходит гасящая интерференция, как видно из рис. 37.3, б, удовлетворяет соотношению  $\lambda = D \sin \theta$ , откуда

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{D} \quad [\text{первый минимум}]. \quad (37.1)$$

Интенсивность света максимальна при  $\theta = 0^\circ$  и убывает до минимума (с интенсивностью, равной нулю) при угле  $\theta$ , задаваемом соотношением (37.1).

Рассмотрим теперь больший угол  $\theta$ , такой, что луч из верхнего края щели проходит путь, на  $(\frac{3}{2})\lambda$  превышающий путь луча из нижнего края щели (рис. 37.3, в). В этом случае лучи из нижней трети щели, попарно интерферируя, гасят лучи из средней трети, так как в каждой паре лучи оказываются в противофазе. Но свет из верхней трети щели все же достигнет экрана, и под данным углом  $\theta$  на экране возникнет светлое пятно, но не столь яркое, как центральное пятно, соответствующее  $\theta = 0^\circ$ . При еще большем угле  $\theta$ , таком, что луч из верхнего края щели проходит путь, на  $2\lambda$  превышающий путь луча из нижнего края щели (рис. 37.3, з), лучи из нижней четверти щели будут гасить лучи из второй снизу четверти, так как разность хода между ними составит  $\lambda/2$ . В свою очередь лучи из четверти, расположенной непосредственно над центром щели, интерферируют с лучами из ее верхней четверти и гасят их. Следовательно, под выбранным углом в распределении интенсивности на дифракционной картине опять наблюдается минимум с нулевой интенсивностью. График зависимости интенсивности света от угла показан на рис. 37.4. Он хорошо соответствует снимку, представленному на рис. 37.2, в. Обратите внимание на то, что минимумы (с нулевой интенсивностью) возникают при

$$D \sin \theta = m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (37.2)$$

за исключением  $m = 0$ , которому отвечает наибольший из максимумов. Между минимумами расположены меньшие (по сравнению с  $m = 0$ ) максимумы.

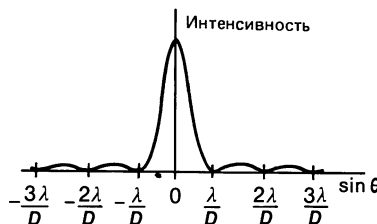


Рис. 37.4. Распределение интенсивности света на экране при дифракции на одной щели как функция от  $\sin \theta$ .

**Пример 37.1.** Свет с длиной волны 750 нм проходит через щель шириной  $1,0 \cdot 10^{-3}$  мм. Какова ширина центрально-

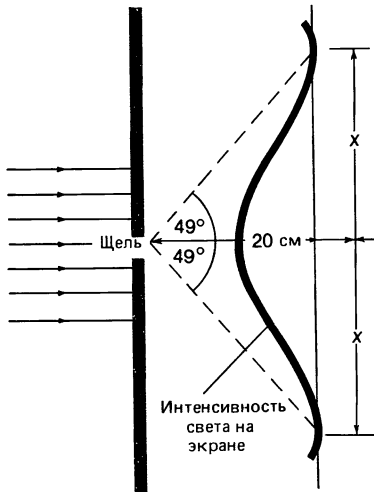


Рис. 37.5. К примеру 37.1.

го максимума а) в градусах и б) в сантиметрах на экране, находящемся на расстоянии 20 см от щели?

**Решение.** а) Первый минимум расположен при

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{D} = \frac{7,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{1 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 0,75,$$

т.е. при  $\theta = 49^\circ$ . Это угол между центральным максимумом и первым минимумом (рис. 37.5). Угол, под которым виден весь центральный максимум – от первого минимума сверху на рисунке до первого минимума снизу – вдвое больше найденного угла, т.е. составляет  $98^\circ$ .

б) Ширина центрального максимума равна  $2x$ , где  $\text{tg } \theta = x/20 \text{ см}$ ; поэтому  $2x = 2(20 \text{ см})(\text{tg } 49^\circ) = 46 \text{ см}$ . Таким образом, освещена значительная часть экрана. Освещенность, как правило, будет не очень яркой, так как количество света, проходящего через столь узкую щель, невелико и распределяется по большой площади.

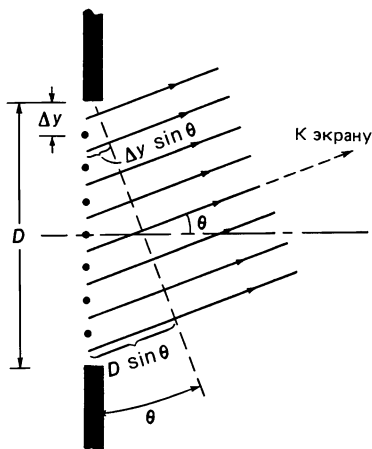
Из соотношения (37.1) видно, что, чем меньше апертура  $D$ , тем сильнее центральный дифракционный максимум. Такой вывод согласуется с уже известными свойствами волн из гл. 15.

## 37.2. Распределение интенсивности в дифракционной картине от одной щели

Мы определили положения минимумов в дифракционной картине, возникающей при прохождении света через одну щель [формула (37.2)]. Рассмотрим распределение амплитуды и интенсивности в любой точке дифракционной картины с помощью метода фазовых диаграмм, о котором уже шла речь в разд. 36.6.

Разделим щель (которую будем считать вертикальной) на  $N$  очень узких (вертикальных) полос шириной  $\Delta u$  (рис. 37.6). Каждая полоса испускает свет в направлении экрана, расположенного справа. И на этот раз мы рассмотрим дифракцию Фраунгофера; поэтому лучи, направленные в любую точку удаленного экрана, параллельны и образуют с горизонталью угол  $\theta$ , как показано на рис. 37.6. Пусть ширина полос  $\Delta u$  гораздо меньше длины волны  $\lambda$  монохроматического света, падающего на щель, так что лучи, исходящие из одной полосы, имеют одну и ту же фазу. Все полосы одинаковы по ширине, и если щель

Рис. 37.6. Щель шириной  $D$  разделена на  $N$  полос шириной  $\Delta y$ .



освещена равномерно, то амплитуды волн  $\Delta E_0$ , испускаемых узкими полосами, можно считать одинаковыми (при условии, что угол  $\theta$  не слишком велик). Разность фаз, отвечающая соседним полосам, равна [разд. 36.6, формула (36.4)]

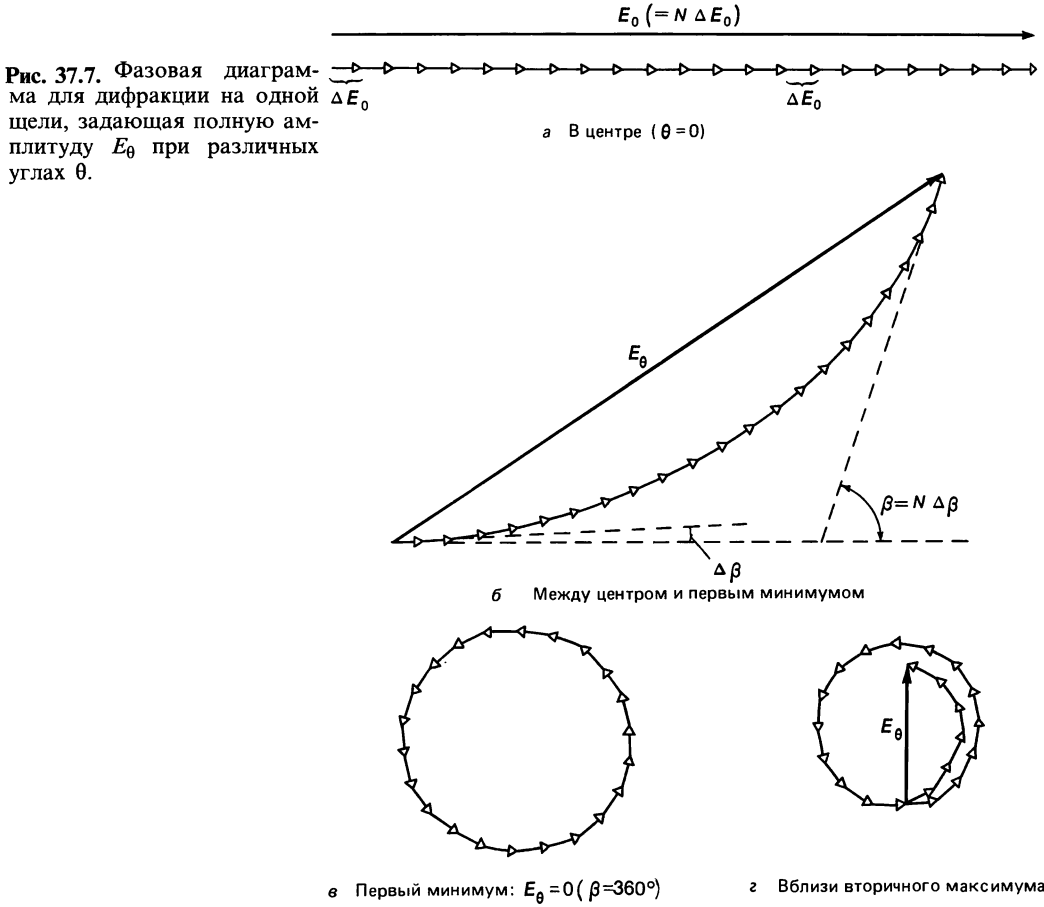
$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin \theta, \quad (37.3)$$

так как разность хода составляет  $\Delta y \sin \theta$ .

Полная амплитуда на экране, отвечающая произвольному углу  $\theta$ , равна сумме волн, из всех полос; все элементарные волны имеют одинаковую амплитуду  $\Delta E_0$ , но различаются по фазе. Чтобы получить полную амплитуду, можно воспользоваться фазовой диаграммой, как мы делали в разд. 36.6 (рис. 36.13). Фазовые диаграммы для различных углов  $\theta$  представлены на рис. 37.7. В центре экрана ( $\theta = 0$ ) волны из каждой полосы оказываются в фазе [ $\Delta\beta = 0$ , см. соотношение (37.3)]; поэтому стрелки, соответствующие амплитудам  $\Delta E_0$ , выстраиваются в прямую линию (рис. 37.7, а). Полная амплитуда света в центре экрана в этом случае равна  $E_0 = N\Delta E_0$ . На рис. 37.7, б показано, как при небольших углах  $\theta$  (недалеко от центра экрана) из элементарных волн с амплитудами  $\Delta E_0$  возникает волна с полной амплитудой  $E_0$ . В этом случае каждая элементарная волна отличается по фазе от соседней на  $\Delta\beta$ . Разность фаз волн из верхнего и нижнего краев щели равна

$$\beta = N\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda} N\Delta y \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta, \quad (37.4)$$

где  $D = N\Delta y$  — полная ширина щели. Хотя «дуга» на рис. 37.7, б имеет длину  $N\Delta E_0$ , т. е. равна  $E_0$ , амплитуда полной волны  $E_\theta$  представляет собой векторную сумму амплитуд элементарных волн и поэтому равна длине хорды, как показано на рисунке. Ясно, что  $E_\theta < E_0$ .



Если угол  $\theta$  продолжает расти, то мы рано или поздно приходим к случаю, изображенному на рис. 37.7, в, когда цепочка стрелок замыкается. В этом случае векторная сумма обращается в нуль; следовательно, для этого угла  $E_\theta = 0$ , что соответствует первому минимуму. Так как в данном случае разность фаз  $\beta = N \Delta\beta$  равна  $360^\circ$ , или  $2\pi$ , из соотношения (37.3) получаем

$$2\pi = N \Delta\beta = N \left( \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin \theta \right),$$

или, если ввести ширину щели  $D = N \Delta y$ ,

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{D}.$$

Таким образом, первый минимум ( $E_\theta = 0$ ) возникает там, где  $\sin \theta = \lambda/D$ , что совпадает с результатом, полученным в предыдущем разделе [соотношение (37.1)].

При еще больших углах  $\theta$  цепочка стрелок закручивается на угол, превышающий  $360^\circ$ . На рис. 37.7, г пока-

зан случай, близкий к вторичному максимуму, следующему за первым минимумом, когда  $\beta = N\Delta\beta \approx 360^\circ + 180^\circ = 540^\circ$ , или  $3\pi$ . (Обратите внимание на то, что, хотя разность фаз  $\beta \approx 540^\circ$ , угол  $\theta$  может быть очень мал в зависимости от значений  $D$  и  $\lambda$ .) При  $\beta = 4\pi$  стрелки совершат два полных оборота и вновь возникнет минимум ( $\sin \theta = 2\lambda/D$ ) [в соотношении (37.2) он соответствует  $m = 2$ ]. При еще больших углах  $\theta$  возникают новые максимумы и минимумы. Но так как полная длина спирали остается постоянной и равной  $N\Delta E_0 (= E_0)$ , каждый последующий максимум после очередного витка спирали оказывается меньше предыдущего.

Чтобы получить количественное выражение для амплитуды (и интенсивности) в любой точке экрана (т. е. при любом угле  $\theta$ ), рассмотрим предел при  $N \rightarrow \infty$ , т. е. когда ширина  $\Delta u$  полосы становится бесконечно малой  $du$ . В этом случае ломаные на рис. 37.7 превращаются в гладкие кривые, одна из которых показана на рис. 37.8. При любом угле  $\theta$  полная амплитуда волны  $E_\theta$  равна длине хорды, а длина дуги по-прежнему равна  $E_0$ . Если  $r$  — радиус кривизны дуги, то

$$\frac{E_\theta}{2} = r \sin \frac{\beta}{2}.$$

Используя для угла  $\beta/2$  радианную меру, получаем

$$\frac{E_\theta}{2} = r \frac{\beta}{2}.$$

Из этих соотношений следует, что

$$E_\theta = E_0 \frac{\sin \beta/2}{\beta/2}. \quad (37.5)$$

Угол  $\beta$  представляет собой разность фаз волн, идущих из верхнего и нижнего краев щели. Так как разность хода между ними равна  $D \sin \theta$  [см. рис. 37.6 и формулу (37.4)], мы получаем

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta. \quad (37.6)$$

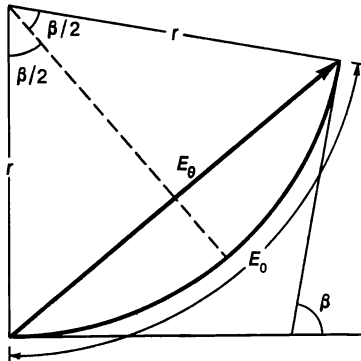


Рис. 37.8. Определение амплитуды  $E_\theta$  как функции угла  $\theta$  при дифракции на одной щели.



Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды волны; поэтому интенсивность  $I_\theta$  под углом  $\theta$ , согласно соотношению (37.5), равна

$$I_\theta = I_0 \left( \frac{\sin \beta/2}{\beta/2} \right)^2, \quad (37.7)$$

где  $I_0$  ( $\sim E_0^2$ ) — интенсивность при  $\theta = 0$  (центральный максимум). Из формул (37.7) и (37.6) (хотя иногда удобнее рассматривать их по отдельности) получаем

$$I_\theta = I_0 \left[ \frac{\sin(\pi D \sin \theta/\lambda)}{\pi D \sin \theta/\lambda} \right]^2. \quad (37.8)$$

Заметим, что минимумы ( $I_\theta = 0$ ) возникают там, где  $\sin(\pi D \sin \theta/\lambda) = 0$ , т. е. там, где  $\pi D \sin \theta/\lambda$  принимает значения  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$  и т. д., или

$$D \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Это условие совпадает с полученными ранее. Обратите внимание на то, что  $m$  не должно обращаться в нуль, так как при  $\beta/2 = \pi D \sin(\theta/\lambda) = 0$  и числитель, и знаменатель в формуле (37.7) [или (37.8)] обратятся в нуль. Интенсивность в этом случае можно вычислить с помощью предельного перехода при  $\theta \rightarrow 0$  (или  $\beta \rightarrow 0$ ). При очень малых углах  $\sin \beta/2 \approx \beta/2$ , поэтому  $(\sin \beta/2)/(\beta/2) \rightarrow 1$  и  $I_\theta = I_0$ , где  $I_0$  — максимум интенсивности в центре дифракционной картины.

**Пример 37.2.** Определите приближенно интенсивность вторичных максимумов ( $m = 1, 2, \dots$ ).

**Решение.** Вторичные максимумы рас-

положены примерно посредине между соседними минимумами там, где

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} \approx \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

[Истинные положения максимумов не совсем совпадают с указанными точками. Их можно найти, продифференцировав соотношение (37.7) (см. задачу 7).] Следовательно,

$$I_\theta = \frac{I_0}{(m + 1/2)^2 \pi^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

При  $m = 1, 2$  и  $3$  получаем

$$I_\theta = \frac{I_0}{22,2} = 0,045 I_0 \quad [m = 1],$$

$$I_\theta = \frac{I_0}{61,7} = 0,016 I_0 \quad [m = 2],$$

$$I_\theta = \frac{I_0}{121} = 0,0083 I_0 \quad [m = 3].$$

В первом после центрального максимуме сосредоточено только  $1/22$  (или 4,5%) интенсивности центрального дифракционного максимума; последующие максимумы еще слабее. Это поведение воспроизводится на рис. 37.4. На рис. 37.2, в убывание вторичных максимумов не столь четко выражено, так как снимок переэкспонирован, чтобы выявить эти максимумы.

Аналогичная дифракционная картина (правда, с интерференционными кругами вместо полос) возникает при дифракции на круглом отверстии. Она имеет большое практическое значение, так как линзы, по существу, представляют собой пропускающие свет круглые отверстия. Дифракцию на круглом отверстии мы обсудим в разд. 37.4 и покажем, каким образом дифракция ограничивает разрешающую способность (четкость изображения).

### 37.3. Дифракция в опыте с интерференцией от двух щелей

Анализируя в разд. 36.6 опыт Юнга с интерференцией от двух щелей, мы предполагали равномерную освещенность центральной части экрана. Это эквивалентно предположению о том, что щели являются бесконечно узкими, в результате чего центральный дифракционный пик размывается на весь экран. Разумеется, этого никогда не бывает с реальными щелями и дифракция ослабляет интенсивность вторичных интерференционных максимумов (светлых полос) так, что они не имеют одинаковой высоты, как изображено на рис. 36.14.

Вычислим теперь распределение интенсивности для интерференционной картины в опыте Юнга с учетом дифракции. Предположим, что обе щели имеют одинаковую ширину  $D$  и центры их находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Так как расстояние до экрана велико по сравнению с  $d$  (по предположению мы рассматриваем дифракцию Фраунгофера), дифракционные картины от каждой щели в отдельности, по существу, совпадают. Следовательно, амплитуда волны, падающей на экран под углом  $\theta$ , уже не будет равна

$$E_{\theta_0} = 2E_0 \cos \delta/2,$$

как это следовало бы из формулы (36.56), а с учетом дифракции (см. соотношение 37.5) дается выражением

$$E_{\theta_0} = 2E_0 \left( \frac{\sin [\beta/2]}{[\beta/2]} \right) \cos \frac{\delta}{2}.$$

(В этой главе мы имели дело только с амплитудой вектора напряженности электрического поля  $E$  и писали поэтому просто  $E_{\theta}$  вместо  $E_{\theta_0}$ , как это делалось в гл. 36.)

Следовательно, интенсивность определяется выражением

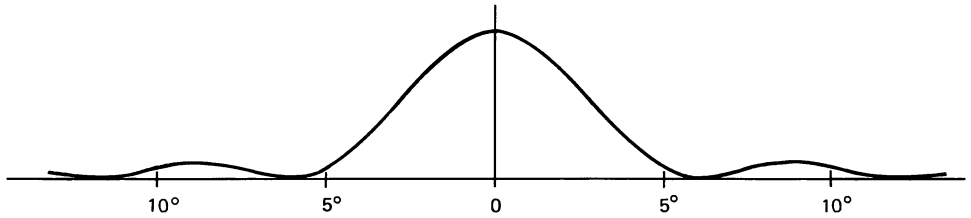
$$I_{\theta} = I_0 \left( \frac{\sin [\beta/2]}{[\beta/2]} \right)^2 \left( \cos \frac{\delta}{2} \right)^2, \quad (37.9)$$

где [согласно (37.6) и (36.4)]

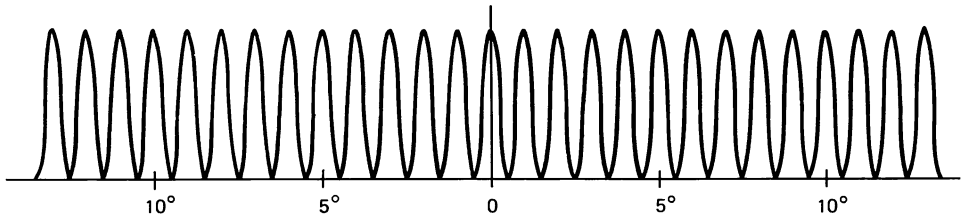
$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} D \sin \theta, \quad \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta.$$

**Рис. 37.9.** Дифракционный множитель (а); интерференционный множитель (б) и результирующая интенсивность  $I$  (в) как функции угла  $\theta$  при  $d = 6D = 60\lambda$ .

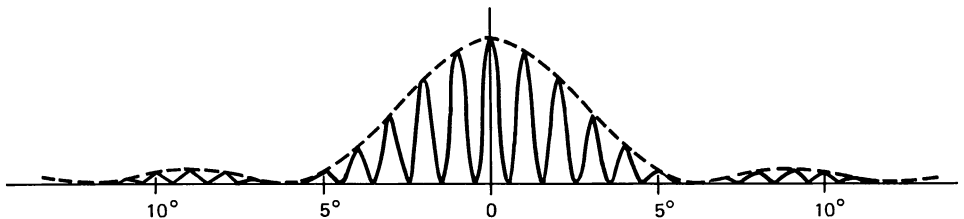
Первый из членов в скобках в формуле (37.9) иногда называют дифракционным множителем, а второй — интерференционным множителем. На рис. 37.9, а и б приведены графики, соответствующие случаю, когда  $d = 6D$  и  $D = 10\lambda$  (график на рис. 37.9, б совпадает с графиком на рис. 36.14 с точностью до множителя  $I_0$ ). На рис. 37.9, в изображено произведение соответственно дифракционного и интерференционного множителей и коэффициента  $I_0$  в зависимости от угла  $\theta$  (или положения на экране, когда угол  $\theta$  не слишком велик) согласно соотношению (37.9). Штриховая линия на рис. 37.9, в показывает, что дифрак-



а Дифракционный множитель  $\sin^2(\beta/2)/(\beta/2)^2$  как функция угла  $\theta$



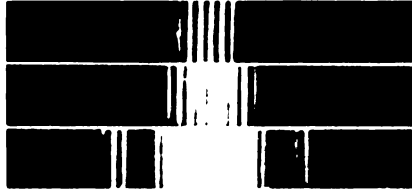
б Интерференционный множитель  $\cos^2(\delta/2)$  как функция угла  $\theta$



в Интенсивность  $I$  как функция угла  $\theta$

**Рис. 37.10.** Фотографии интерференционной картины при интерференции от двух щелей, обнаруживающие дифракционные эффекты;  $d = 6D$  (из книги: *Jenkins F. A., White H. E. Fundamental of Optics*. 4th ed. McGraw-Hill, Inc; воспроизводится с разрешения издательства McGraw-Hill Book Co).

ционный множитель ведет себя подобно огибающей интерференционных пиков. На рис. 36.7 заметно убывание интенсивности интерференционных полос по мере удаления от центра. Более отчетливо это видно на рис. 37.10 для случая с меньшим отношением  $d/D$ .



**Пример 37.3.** Объясните, почему центральный дифракционный пик на рис. 37.9 содержит 11 интерференционных полос.

**Решение.** Первый минимум на дифракционной картине отвечает условию

$$\sin \theta = \lambda/D.$$

Так как  $d = 6D$ , получаем

$$d \sin \theta = 6D(\lambda/D) = 6\lambda.$$

Из соотношения 36.2, *a* видно, что интерференционные максимумы отвечают

$d \sin \theta = m\lambda$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$  или любое другое целое число. Таким образом, дифракционный минимум отвечает интерференционной полосе с  $m = 6$  и соответствующий пик не возникает. Следовательно, центральный дифракционный пик включает центральный интерференционный максимум ( $m = 0$ ) и по пять пиков ( $m = 1, 2, \dots, 5$ ) с каждой стороны, т. е. всего 11 пиков. Так как пик 6-го порядка не возникает, иногда говорят о «недостающем порядке».

Из последнего примера видно, что число интерференционных полос, уместяющихся в центральном дифракционном пике, зависит только от отношения  $d/D$  и не зависит от длины волны  $\lambda$ . Расстояние между дифракционными максимумами (угловое или линейное на экране) зависит от  $\lambda$ . В рассмотренном случае  $D = 10\lambda$  и первый дифракционный минимум соответствует  $\sin \theta = \lambda/D = 0,10$ , т. е. расположен под углом  $\theta$  около  $6^\circ$ .

Интерференция и дифракция обусловлены одним и тем же явлением — суперпозицией когерентных волн с различными фазами. Таким образом, различие между интерференционной и дифракционной картинами обусловлено не столько различием их физической природы, сколько традициями и удобством описания (так, в этом разделе мы анализировали по отдельности картины, возникающие на экране в опыте Юнга: сначала как интерференционную, а затем как дифракционную). Обычно мы говорим о дифракции, когда речь заходит об анализе суперпозиции множества бесконечно малых и обычно смежных источников (как, например, при разбиении источника на бесконечно малые части). Под интерференцией принято понимать суперпозицию волн от конечного (и обычно небольшого) числа когерентных источников.

### 37.4. Ограничения разрешающей способности. Критерий Рэлея

Способность линзы создавать отдельные изображения двух близких друг к другу точечных объектов называется *разрешающей способностью* или **разрешающей силой** линзы. Чем ближе находятся друг к другу два изображения, оставаясь различимыми (т. е. не сливаясь в одно пятно), тем выше разрешающая способность линзы. Разрешающая способность объектива фотоаппарата часто характеризуется числом различимых линий на 1 мм<sup>1)</sup>. Это число определяется по фотографии на мелкозернистой пленке шаблона с параллельными линиями. Минимальное расстояние между различимыми линиями на снимке, сделанном с помощью данного объектива, определяет его разрешающую способность.

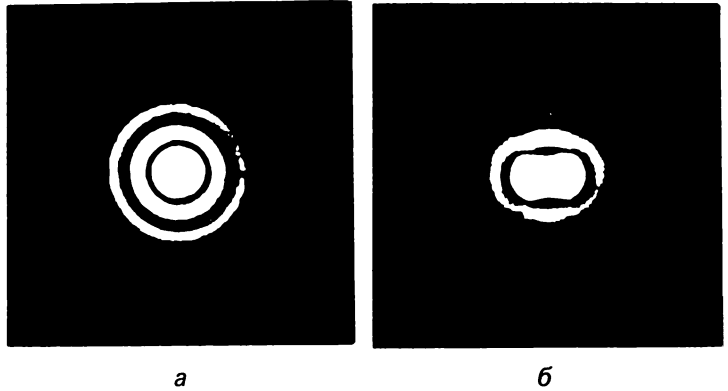
Существует два главных фактора, ограничивающих разрешающую способность линзы. Первый из них – *абберации линзы*. Как мы уже знаем, вследствие сферических и других aberrаций изображением точечного объекта будет не точка, а крохотное пятнышко. Тщательно подбирая комбинации линз, можно существенно уменьшить aberrации, но полностью исключить их невозможно. Вторым фактором, ограничивающим разрешающую способность, – это *дифракция*, которую нельзя исправить, так как она является естественным следствием волновой природы света. Рассмотрим этот фактор более подробно.

В разд. 37.1 мы видели, что свет распространяется в виде волн; поэтому свет от точечного источника, проходя сквозь щель, отклоняется и образует дифракционную картину (рис. 37.2 и 37.4). Линза из-за наличия у нее краев действует подобно щели. При создании линзой изображения точечного объекта в действительности возникает дифракционная картина. Таким образом, изображение оказывается размытым, даже если aberrации отсутствуют.

В дальнейшем мы будем предполагать, что линза не имеет aberrаций. Это позволит нам сосредоточить внимание на дифракционных эффектах и выяснить, в какой мере они ограничивают разрешающую способность линзы. На рис. 37.4 мы видели, что дифракционная картина при прохождении света через прямоугольную щель имеет центральный максимум, в котором сосредоточена большая часть света. В этом главном пике интенсивность спадает по обе стороны от центра до минимума, находящегося под углом  $\theta \approx \sin \theta = \lambda/D$  [соотношение (37.1)], где  $D$  – диаметр щели,  $\lambda$  – длина волны света, а угол  $\theta$  по предположению мал. За первым минимумом наблюдается ряд менее интенсивных интерференционных полос. Для

<sup>1)</sup> Разрешающую способность определяют и в центре, и на краю поля зрения, где она обычно меньше из-за внеосевых aberrаций.

Рис. 37.11. Фотографии изображений (сильно увеличенные), полученных с помощью линзы: *a* — одного точечного источника; *б* — двух точечных источников, на пределе разрешения (из книги: *Cagnat M., Françon M., Thierr J. C. Atlas of Optical Phenomena.* — Berlin: Springer-Verlag, 1962).



линзы или любого круглого отверстия изображение точечного объекта представляет собой центральный пик в виде *круглого пятна* (называемый также *дифракционным пятном* или *кружком*), окруженный слабыми кольцами (рис. 37.11, *a*). Угловая полуширина центрального максимума определяется выражением

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D}.$$

От аналогичной формулы для щели [формула (37.1)] оно отличается множителем 1,22. Появление его связано с тем, что ширина круглого отверстия не постоянна (как у прямоугольной щели), а изменяется от размера диаметра  $D$  до нуля. Как показывает тщательный анализ, «средняя» ширина составляет  $D/1,22$ ; поэтому вместо формулы (37.1) мы и получили выражение  $\theta = 1,22\lambda/D$ . Распределение интенсивности на дифракционной картине от круглого отверстия показано на рис. 37.12. Видно, что любое изображение представляет собой сложную дифракционную картину. В большинстве случаев нас интересует только центральное пятно, так как окружающие его концентрические кольца значительно уступают ему по яркости.

Когда два точечных объекта находятся очень близко друг от друга, дифракционные картины их изображений перекрываются, как показано на рис. 37.11, *б*. Если объекты сблизятся еще больше, то наступает момент, когда уже нельзя сказать, видите ли вы два перекрывающихся изображения или единственное изображение. О том, когда

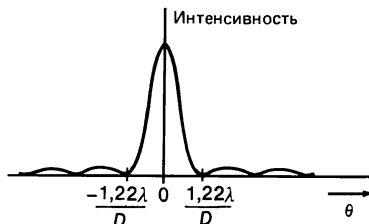
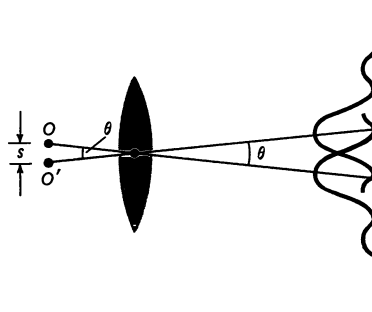


Рис. 37.12. Распределение интенсивности света поперек дифракционной картины при дифракции на круглом отверстии.

**Рис. 37.13.** Критерий Рэля: два изображения разрешимы, если центр дифракционного пика любого из объектов совпадает с первым минимумом дифракционной картины другого объекта. Два точечных объекта  $O$  и  $O'$  видны из центра линзы под углом  $\theta$ . Для каждого объекта проведен только один луч, чтобы указать центр его дифракционной картины.



это происходит, различные наблюдатели могут судить по-разному. Однако существует общепринятый критерий, предложенный лордом Рэлеем (1849–1919). **Критерий Рэля** устанавливает, что *два изображения находятся на пороге разрешения, когда центр дифракционного диска одного из них совпадает с первым минимумом на дифракционной картине другого*. Подобное расположение изображений показано на рис. 37.13. Так как первый минимум наблюдается под углом  $\theta = 1,22\lambda/D$  относительно центрального максимума, из рис. 37.13 следует, что два объекта можно считать различимыми, если угловое расстояние между ними равно этому углу  $\theta$ :

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D}. \quad (37.10)$$

Такой предел, обусловленный дифракцией, налагает на разрешающую способность линзы волновая природа света.

### 37.5. Разрешающая способность телескопов и микроскопов

На первый взгляд может показаться, что, выбирая соответствующие фокусные расстояния, можно сконструировать микроскопы и телескопы с любым увеличением. В действительности это не так вследствие дифракции. Увеличение свыше некоего предела означает простое увеличение дифракционной картины. Непонимание этого может оказаться причиной ошибочных выводов, ибо, полагая, будто мы видим детали объекта, мы в действительности видим лишь детали дифракционной картины. Чтобы установить предельное разрешение, воспользуемся критерием Рэля [формула (37.10)]:

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D},$$

который одинаково применим к микроскопу и к телеско-

пу, если под  $D$  понимать диаметр объектива. Для телескопа разрешение определяется углом  $\theta = 1,22\lambda/D$ <sup>1)</sup>.

Для микроскопа обычно указывается истинное расстояние  $s$  между двумя точками, которые только-только удается разрешить (рис. 37.13). Так как объекты обычно находятся вблизи фокальной точки объектива,  $\theta = s/f$ , или  $s = f\theta$ . Комбинируя это соотношение с формулой (37.10), получаем следующее выражение для *разрешающей способности*, или *разрешающей силы* (РС):

$$PC = s = f\theta = \frac{1,22\lambda f}{D}. \quad (37.11)$$

Расстояние  $s$  называется разрешающей способностью линзы, поскольку это – минимальное расстояние между двумя точками, при котором их еще удается разделить. Соотношение (37.11) можно выразить и через *аксептанс*, угол  $\alpha$  между осью объектива и крайними лучами, исходящими из объекта и попадающими в объектив (рис. 37.14). Вывод формулы<sup>2)</sup> мы оставляем в качестве упражнения (задача 20 в конце главы), а сейчас приведем лишь конечный результат:

$$PC = s = \frac{1,22\lambda}{2 \sin \alpha} = \frac{0,61\lambda}{\sin \alpha}. \quad (37.12a)$$

Разрешающую способность можно увеличить, поместив каплю масла между объектом и передней поверхностью объектива, которая обеспечивает их оптический контакт. Такого рода объективы называются *иммерсионными*. В масле длина световой волны уменьшается до величины  $\lambda/n$ , где  $n$  – показатель преломления масла, и разрешающая способность равна

$$PC = \frac{0,61\lambda}{n \sin \alpha}. \quad (37.12b)$$

Обычно у масла  $n \approx 1,50$ , хотя показатель преломления отдельных сортов масла доходит до 1,8. Иммерсия позволяет повысить разрешающую способность на 50% и более.

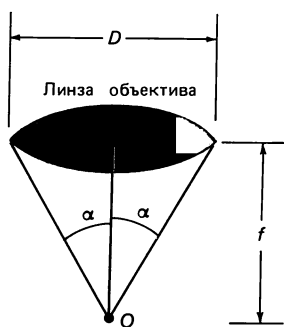


Рис. 37.14. Линза объектива микроскопа;  $\alpha$  – угол между осью конического светового пучка, выходящего из точки объекта, и его крайними лучами;  $2\alpha$  – угловая апертура.

<sup>1)</sup> Разрешающая способность телескопов с объективами большого диаметра ограничена обычно не дифракцией, а другими явлениями, например турбулентностью атмосферы. С другой стороны, разрешающую способность высококачественного микроскопа обычно ограничивает дифракция, поскольку объективы микроскопов представляют собой сложные комбинации линз, составленные из большого числа элементов малого диаметра (чтобы обеспечить малое фокусное расстояние  $f$ ).

<sup>2)</sup> Этот вывод особенно прост для случая малого угла  $\alpha$ , так как при этом  $\sin \alpha = \text{tg } \alpha = \alpha = D/2f$  (рис. 37.14), или  $f/D = 1/(2 \sin \alpha)$ . Следовательно,  $s = 1,22\lambda f/D = 1,22\lambda/(2 \sin \alpha)$ . Вывод этой формулы в общем случае составляет содержание задачи 20 в конце главы.



Величина  $n \sin \alpha$  называется *числовой апертурой* (ЧА) линзы:

$$\text{ЧА} = n \sin \alpha.$$

Обычно числовую апертуру указывают на оправе объектива вместе с увеличением. Чем больше значение ЧА, тем выше разрешающая способность.

**Пример 37.4.** Чему равен теоретический предел углового расстояния между двумя звездами, разрешимыми с помощью 200-дюймового телескопа Паломарской обсерватории? Предполагается, что звезды испускают белый свет со средней длиной волны 550 нм.

**Решение.** Так как  $D = 200$  дюймов  $= 5,1$  м, из формулы (37.10) мы получаем, что  $\theta = 1,22\lambda/D = 1,22(5,50 \cdot 10^{-7} \text{ м})/5,1 \text{ м} = 1,3 \cdot 10^{-7}$  рад, или  $0,75 \cdot 10^{-5}$  град. Этот предел обусловлен дифракцией. В действительности разрешение оказывается еще ниже из-за aberrаций и, что более важно, турбулентности атмосферы. Объективы большого диаметра строят не

с целью получения более высокой разрешающей способности, а ввиду того, что они улавливают большее количество света, и это позволяет наблюдать менее яркие объекты.

**Пример 37.5.** Определите ЧА и РС лучших иммерсионных микроскопов при условии, что показатель преломления масла равен  $n = 1,8$  и  $\sin \alpha \approx 0,90$ . Предполагается, что  $\lambda = 550$  нм.

**Решение.**  $\text{ЧА} = n \sin \alpha = 1,6$ .  $\text{РС} = 0,61\lambda/\text{ЧА} = (0,61)(5,50 \cdot 10^{-7} \text{ м})/(1,6) \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 200$  нм. Это наивысшая разрешающая способность, достижимая с помощью оптического микроскопа.

Дифракция ограничивает размеры деталей, которые можно разглядеть на любом объекте. Обратимся к формуле (37.11). Заметим, что фокусное расстояние не может быть меньше примерно радиуса линзы, причем это нижний предел, достичь который весьма трудно – см. уравнение шлифовщика линз (35.3). В лучшем случае, как следует из соотношения (37.11)<sup>1)</sup>, при  $f \approx D/2$  получаем

$$\text{РС} \approx \frac{\lambda}{2}. \quad (37.13)$$

Таким образом, с точностью до множителя 2 справедливо следующее утверждение:

**Невозможно разрешить детали объекта, размеры которых меньше длины волны используемого света.**

Это – важное и полезное эмпирическое правило.

Современные сложные линзы конструируются столь совершенными, что их реальная разрешающая способность нередко в пределе определяется дифракцией, т. е. длиной волны применяемого света. Для разрешения более мелких деталей необходимо использовать более короткие

<sup>1)</sup> К этому же результату можно прийти, исходя из соотношения (37.12a), так как  $\sin \alpha$  не превосходит единицы и обычно принимает значения от 0,6 до 0,9. С иммерсией, как видно из формулы (37.12b), в лучшем случае  $\text{РС} \approx \lambda/3$ , что соответствует результату, приведенному в примере 37.5.

световые волны. Применение УФ-излучения может увеличить разрешающую способность иногда почти вдвое. Однако еще более важным оказалось открытие в начале XX в. волновых свойств электронов (гл. 40). Электроны могут иметь очень малые длины волн, что используется в электронном микроскопе (разд. 40.6), который благодаря этому способен давать увеличение, от 100 до 1000 раз превосходящее увеличение оптического микроскопа. Для рентгеновского излучения также характерны очень малые длины волн, и оно часто используется для более детального исследования объектов специальными методами (разд. 37.11).

### 37.6. Разрешающая способность человеческого глаза и полезное увеличение

Разрешающую способность человеческого глаза ограничивают несколько факторов примерно одного порядка величины. Наибольшей разрешающей способностью обладает желтое пятно, в котором расстояние между колбочками минимально – около 3 мкм (= 3000 нм). Диаметр зрачка изменяется в пределах примерно от 0,1 до 0,8 см, поэтому для длины волны  $\lambda = 550$  нм (отвечающей наибольшей чувствительности глаза) дифракционный предел составляет примерно от  $\theta \approx 1,22\lambda/D \approx 8 \cdot 10^{-5}$  до  $6 \cdot 10^{-4}$  рад. Так как размеры глазного яблока в глубину составляют около 2 см, это соответствует разрешающей способности в лучшем случае  $s \approx (8 \cdot 10^{-5} \text{ рад})(2 \times 10^{-2} \text{ м}) \approx 2$  мкм, а в худшем случае (при узком зрачке) около 15 мкм. Сферическая и хроматическая аберрации также ограничивают разрешающую способность на уровне 10 мкм. В результате человеческий глаз способен разрешать объекты с угловым расстоянием между ними не меньше  $5 \cdot 10^{-4}$  рад. Это соответствует объектам, отстоящим друг от друга на 1 см при условии, что их рассматривают с расстояния около 20 м. Среднее расстояние наилучшего зрения человеческого глаза составляет примерно 25 см. На таком расстоянии глаз может различать объекты, отстоящие друг от друга на (25 см)  $(5 \times 10^{-4} \text{ рад}) \approx 10^{-4}$  м. Так как лучшие оптические микроскопы не способны разрешать объекты на расстоянии менее 200 нм друг от друга (см. пример 37.5), то полезное увеличение ограничено величиной примерно

$$\frac{10^{-4} \text{ м}}{200 \times 10^{-9} \text{ м}} = 500 \times .$$

На практике для того, чтобы избежать излишнего напряжения глаз, часто используют увеличения около 1000  $\times$ . Еще большие увеличения позволили бы лишь увидеть дифракционную картину, возникающую в объективе микроскопа.

### 37.7. Система с большим числом щелей – дифракционная решетка

В разд. 37.1–37.3 мы рассмотрели дифракционную картину, возникающую при прохождении света через одну или две щели. Обратимся теперь к чрезвычайно полезному устройству – *дифракционной решетке*, состоящей из большого числа параллельных щелей, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Дифракционные решетки часто изготавливают, нанося на стекло очень тонкие линии алмазным резцом. Промежутки между штрихами служат щелями. Дешевые дифракционные решетки изготавливают, делая фотографические копии с решетки-оригинала. Фотовоспроизведение с уменьшением позволяет изготовить решетки с очень малым периодом. В настоящее время широко используются решетки, содержащие 10 000 штрихов на 1 см. Они находят применение при очень точных измерениях длин волн (разд. 37.8). Дифракционные решетки со щелями в непрозрачном экране называются *прозрачными решетками*. Кроме того, существуют *отражательные решетки*. Их изготавливают, нанося тонкие штрихи на металлическую или стеклянную поверхность; дифракционную картину образует отраженный свет. Действие таких решеток, по существу, мало чем отличается от действия прозрачных решеток, и мы ограничимся рассмотрением только последних.

Анализ принципа действия дифракционной решетки во многом напоминает анализ интерференции в опыте Юнга на двух щелях. Предположим, что на решетку падают параллельные лучи света (рис. 37.15). Будем считать щели достаточно узкими, так что продифрагировавший на каждой щели свет распределен в очень широком диапазоне углов и на удаленном экране за решеткой может интерферировать со светом от всех других щелей. Лучи, не испытывающие в щелях отклонения ( $\theta = 0$ ), создают в результате усиливающей интерференции светлое пятно в центре. Под углом  $\theta$ , при котором лучи от соседних щелей обладают разностью хода  $\Delta l = d \sin \theta$  ( $m$  – целое число),

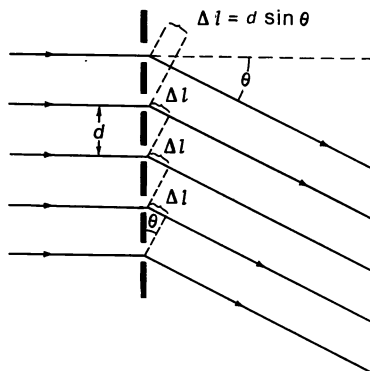


Рис. 37.15. Дифракционная решетка.

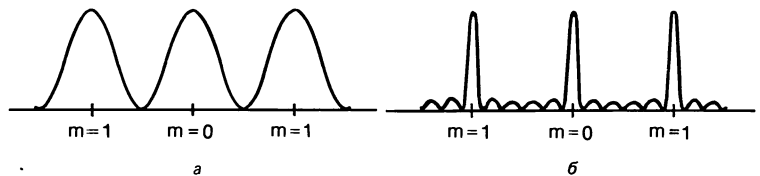
опять имеет место усиливающая интерференция. Если  $d$  – расстояние между щелями (период решетки), то

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \text{ [главные максимумы]}, \quad (37.14)$$

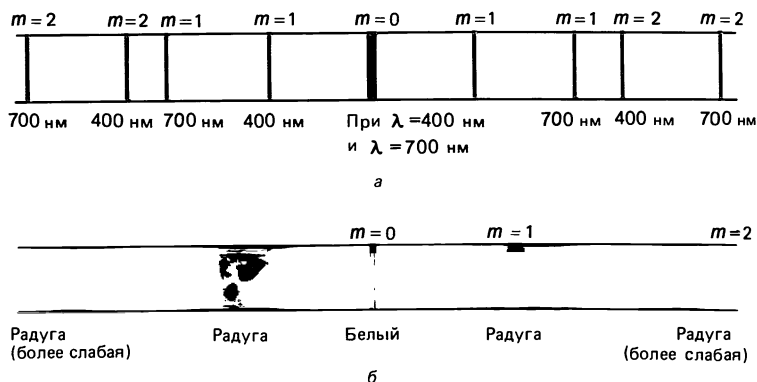
служит условием максимума интенсивности. Аналогичное соотношение справедливо и в случае двух щелей, и  $m$  также называется *порядком* дифракционного максимума.

Между дифракционными картинками от двух и от большого числа щелей существует важное различие: у дифракционной решетки максимумы оказываются гораздо *более резкими и узкими*. Объяснить это можно следующим образом. Предположим, что угол  $\theta$  несколько превышает угол, отвечающий максимуму. В случае двух щелей соответствующие волны лишь слегка разойдутся по фазе, и между ними почти целиком сохранится усиливающая интерференция. Поэтому в картине, возникающей при дифракции на двух щелях, максимумы имеют большую ширину (рис. 36.14). В случае дифракционной решетки разность фаз волн, исходящих из двух соседних щелей, также незначительна. Но волна из одной щели может оказаться в противофазе с волной из другой щели, отстоящей от нее на несколько сотен периодов решетки, и их взаимная интерференция погасит весь (или почти весь) свет. Пусть, например, угол  $\theta$  отличается от угла, соответствующего максимуму первого порядка, причем разность хода равна не точно длине волны  $\lambda$ , а  $1,001\lambda$ . Тогда волна, исходящая из одной щели, будет сдвинута по фазе относительно волны, испущенной следующей за ней 500 щелью на  $1,5000\lambda$ , или точно на  $1\frac{1}{2}$  длины волны, и благодаря интерференции эти волны погасят друг друга. Гасящая интерференция происходит и между волнами из пары щелей, сдвинутых на одну щель относительно рассмотренной нами пары. Иначе говоря, свет первой щели гасит свет из щели 501, свет второй щели гасит свет из щели 502 и т. д. Таким образом, даже при крайне малом угле<sup>1)</sup>, соответствующем разности хода  $0,001\lambda$ , происходит сильная гасящая интерференция, и поэтому максимум

Рис. 37.16. Интенсивность как функция угла зрения  $\theta$  (или положения на экране) для двух щелей (а) и шести щелей (б). У дифракционных решеток число щелей очень велико (порядка  $10^4$ ) и пики еще более узкие.



<sup>1)</sup> В зависимости от числа щелей при таком угле гашение (ослабление) может оказаться либо полным, либо неполным. В последнем случае между главными максимумами (рис. 37.16, б) наблюдаются малые пики, обычно столь слабые, что они едва заметны. Подробнее мы обсудим эти вопросы в разд. 37.9.



**Рис. 37.17.** Спектры, полученные на дифракционных решетках: *a* – две длины волны (400 и 700 нм); *б* – белый свет. Максимумы второго порядка обычно менее интенсивны, чем максимумы первого порядка. Если расстояние между штрихами достаточно мало, то максимумы второго порядка могут отсутствовать. (Максимумы более высоких порядков не показаны.)

должен быть очень узким. Чем больше штрихов у дифракционной решетки, тем резче пики (рис. 37.16). Так как дифракционная решетка позволяет получить более четкие (и яркие) линии, чем две щели, она оказывается гораздо более точным прибором для измерения длин волн.

Предположим, что свет, падающий на дифракционную решетку, не монохроматичен, а содержит две или несколько различных частот. Тогда во всех порядках, кроме  $m = 0$ , для каждой длины волны максимум будет возникать под своим углом (рис. 37.17, *a*). Если на дифракционную решетку падает белый свет, то центральный максимум ( $m = 0$ ) будет представлять собой резкую белую полосу, но во всех остальных порядках будет наблюдаться отчетливое радужное цветовое размытие по некоторому диапазону углов (рис. 37.17, *б*). Вследствие разложения света дифракционной решеткой на составляющие с различными длинами волн эта картина называется *спектром*.

**Пример 37.6.** Вычислите углы, соответствующие дифракционным максимумам первого и второго порядков для света с длинами волн 400 и 700 нм, если дифракционная решетка содержит 10 000 штрихов на 1 см.

**Решение.** Так как решетка содержит  $10^4$  штрих/см =  $10^6$  штрих/м, расстояние между штрихами (период решетки) равно  $d = 1/10^6$  м $^{-1}$  =  $1,0 \cdot 10^{-6}$  м. Максимумы первого порядка ( $m = 1$ ) наблюдаются под углами

$$\sin \theta_{400} = \frac{m\lambda}{d} = \frac{1(4,0 \cdot 10^{-7} \text{ м})}{1,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 0,400,$$

$$\sin \theta_{700} = 0,700,$$

т. е. при  $\theta_{400} = 23,6^\circ$  и  $\theta_{700} = 44,0^\circ$ . Мак-

симумы второго порядка наблюдаются под углами

$$\sin \theta_{400} = \frac{2(4,0 \cdot 10^{-7} \text{ м})}{1,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 0,800,$$

$$\sin \theta_{700} = 1,40,$$

т. е.  $\theta_{400} = 53,0^\circ$ , а максимумы второго порядка при  $\lambda = 700$  нм не существуют, так как  $\sin \theta$  не может быть больше единицы. Максимумы более высокого порядка также не возникают.

**Пример 37.7.** Белый свет с длинами волн от 400 до 750 нм падает на дифракционную решетку с 4000 штрих/см. Покажите, что фиолетовый максимум в спектре третьего порядка перекрывается с красным в спектре второго порядка.

**Решение.** Период решетки равен  $d = 1/(4000 \text{ см}^{-1}) = 2,50 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . Фиолетовый максимум в спектре третьего порядка наблюдается под углом  $\theta$ , определяемым соотношением

$$\sin \theta = \frac{(3)(4,00 \cdot 10^{-7} \text{ м})}{(2,50 \cdot 10^{-6} \text{ м})} = 0,480.$$

Красный максимум в спектре второго порядка наблюдается под углом

$$\sin \theta = \frac{(2)(7,50 \cdot 10^{-7} \text{ м})}{(2,50 \cdot 10^{-6} \text{ м})} = 0,600,$$

т. е. под большим углом.

Дифракционная решетка служит важным элементом спектроскопа – прибора для точного измерения длин волн. О нем речь пойдет в разд. 37.8.

## 37.8. Спектроскоп и спектроскопия

*Спектроскоп* (рис. 37.18) – прибор для точного измерения длин волн с помощью дифракционной решетки (разд. 37.7) или призмы, которые разлагают свет на компоненты с различными длинами волн. Свет от источника через узкую щель  $S$  попадает в коллиматор. Щель находится в фокальной точке линзы  $L$ , поэтому на решетку падают параллельные лучи. Подвижная зрительная труба позволяет фокусировать лучи. Наблюдатель ничего не увидит до тех пор, пока труба не окажется под углом  $\theta$ , отвечающим дифракционному максимуму (обычно используются максимумы первого порядка) для той длины волны, которую испускает источник. Угол  $\theta$  может быть измерен с очень высокой точностью<sup>1)</sup>, что позволяет с высокой точностью определить и длину волны линии по формуле (37.14):

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d},$$

где  $m$  – целое число, означающее порядок максимума,  $d$  – период решетки (расстояние между двумя соседними штрихами). [Линия с определенной длиной волны, кото-

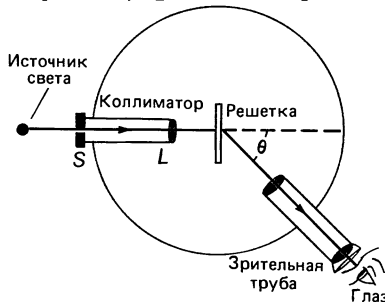


Рис. 37.18. Спектроскоп.

<sup>1)</sup> Угол  $\theta$  при данной длине волны обычно измеряют по обе стороны относительно оси, так как решетку не всегда удается установить строго перпендикулярно падающим лучам; из двух измерений берется среднее.

рую вы наблюдаете в спектрокопе, в действительности представляет собой изображение щели  $S$ . Чем уже щель, тем уже (но при этом и слабее) линия и тем точнее можно измерить длину волны. Если диапазон световых длин волн оказывается непрерывным, то в спектрокопе будет виден сплошной спектр.]

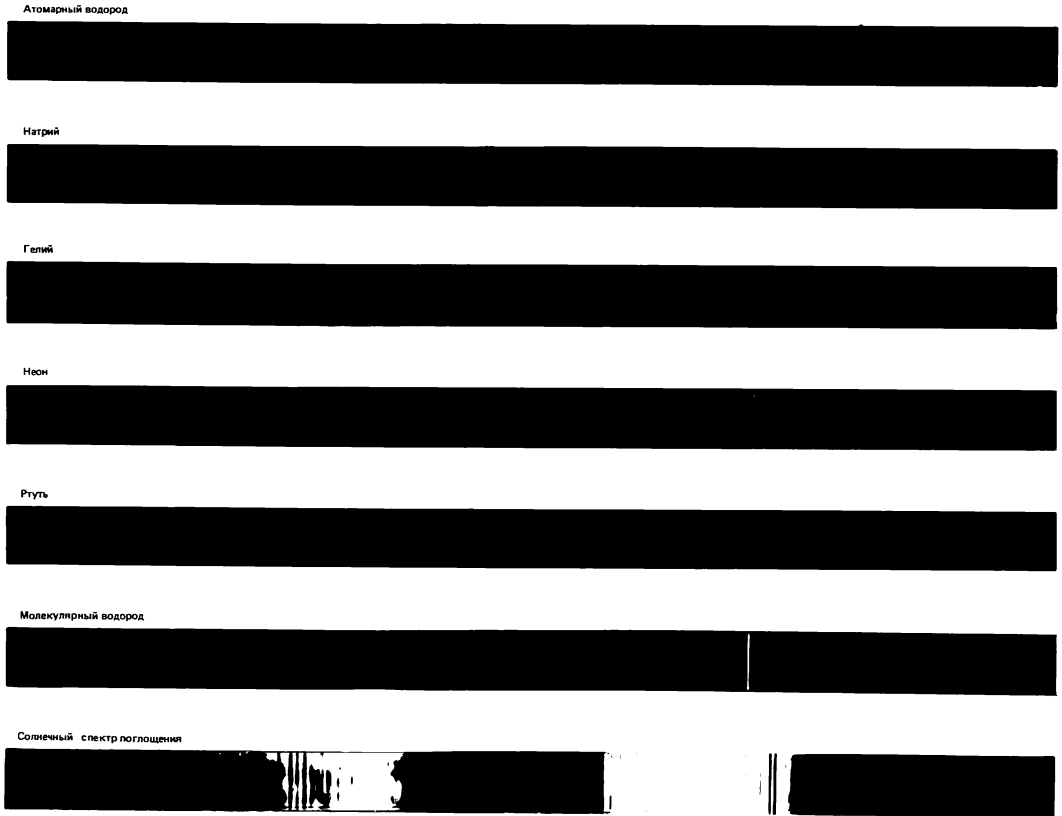
В некоторых спектрокопах применяются отражательные дифракционные решетки или призмы. Из-за дисперсии (разд. 36.5) свет с различными длинами волн отклоняется призмой на разные углы. Недостатком призмы является то, что при ее использовании получают менее резкие линии и не удается разрешать близкие линии. К преимуществам призмы следует отнести более высокую интенсивность отклоненного света (и, следовательно, возможность использования неярких источников), чем у обычной дифракционной решетки, так как в случае решетки большая часть света сосредоточена непосредственно в центральном максимуме. Однако отражательные решетки удается теперь изготовлять путем нанесения на поверхность профилированных желобков. У таких решеток значительная часть света отражается под нужным углом и создает интенсивный максимум первого порядка.

Если спектр источника не наблюдается визуально, а фиксируется (например, на пленке), то соответствующий прибор называется не *спектрокопом*, а *спектрометром*, хотя оба термина иногда используются как синонимы. Приборы, которые позволяют также измерять интенсивность света с данной длиной волны, называются *спектрофотометрами*.

Одно из важных применений спектральных приборов – идентификация атомов или молекул. При нагревании газа или пропускании через него сильного электрического тока каждый газ испускает характерный **линейчатый спектр**. Иначе говоря, испускается свет со строго определенными длинами волн, различными у разных химических элементов и соединений<sup>1)</sup>. На рис. 37.19 (цветная вклейка) показаны линейчатые спектры некоторых элементов, находящихся в газообразном состоянии. Линейчатые спектры наблюдаются только у газов, находящихся при высоких температурах и низких давлениях. Свет, испускаемый раскаленными твердыми телами, например нитью лампы накаливания, и даже плотными газообразными объектами типа Солнца, имеет *непрерывный* (сплошной) *спектр* с широким диапазоном длин волн.

Как видно из рис. 37.19, солнечный «непрерывный спектр» содержит ряд *темных* линий (приведены только

<sup>1)</sup> Причина испускания атомами и молекулами линейчатых спектров долгое время оставалась загадочной. Ее решение сыграло основную роль в развитии современной квантовой механики (гл. 40).



**Рис. 37.19.** Линейчатые спектры некоторых элементов и солнечный спектр с линиями поглощения (воспроизводится с разрешения фирмы Vausch and Lomb, Inc.).

наиболее заметные линии), называемых *линиями поглощения*. Атомы и молекулы поглощают и излучают свет с одной и той же длиной волны. Линии поглощения в спектре Солнца возникают из-за поглощения света атомами и молекулами в более холодных внешних слоях «атмосферы» Солнца, а также атомами и молекулами в атмосфере Земли. Тщательный анализ тысяч таких линий поглощения в солнечном спектре обнаружил, что в «атмосфере» Солнца представлены примерно две трети всех химических элементов. Существование элементов в атмосферах других планет, в межзвездном пространстве и звездах также удалось обнаружить благодаря спектроскопии.

Спектроскопия оказывается действенным средством обнаружения определенных молекул в лабораторных образцах в тех случаях, когда химический анализ затруднен. Например, биологическая молекула ДНК и другие типы белков поглощают свет в определенных областях спектра (особенно в ультрафиолетовой области). Исследуемый



материал (часто в растворе) помещают в монохроматический пучок света, длину волны которого экспериментатор подбирает с помощью призмы или дифракционной решетки. Сравнение интенсивностей поглощения исследуемого объекта и стандартного раствора без образца позволяет судить не только о наличии молекул определенного типа, но и об их концентрации.

Испускание и поглощение света происходят и за пределами видимой части спектра – в ультрафиолетовой и инфракрасной областях. Так как стекло поглощает УФ- и ИК-излучение, вместо линз используются отражательные дифракционные решетки и зеркала. Для регистрации света применяются специальные пленки или фотоэлементы.

### \* 37.9. Фазовые диаграммы в случае большого числа щелей. Ширина пика

Воспользуемся теперь фазовыми диаграммами для построения системы максимумов в дифракционной картине от решетки с большим числом щелей; выведем формулу для ширины пика и посмотрим, откуда возникают слабые вторичные максимумы между главными максимумами (рис. 37.16, б). Прежде всего необходимо заметить, что распределения интенсивности для двух и шести щелей на рис. 37.16 изображены для случая очень узких щелей, когда дифракция не сказывается на высоте пиков. В случае реальных дифракционных решеток это условие обычно не выполняется. Ширина щели  $D$  часто оказывается намного меньше расстояния между щелями  $d$ , и поэтому дифракция ограничивает интенсивность максимумов, в силу чего центральный максимум ( $m = 0$ ) оказывается ярче побочных. Мы не станем более подробно задерживаться на этом эффекте в распределении интенсивности. Заметим лишь, что если один из дифракционных минимумов совпадает с интерференционным максимумом того или иного порядка, то этот максимум не наблюдается. (Например, если  $d = 2D$ , то интерференционные максимумы всех четных порядков  $m = 2, 4, \dots$  отсутствуют. Можете ли вы объяснить, почему? Подсказка: см. пример 37.3.)

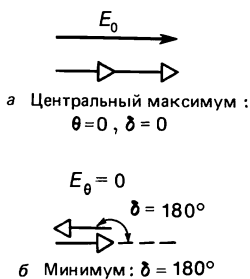
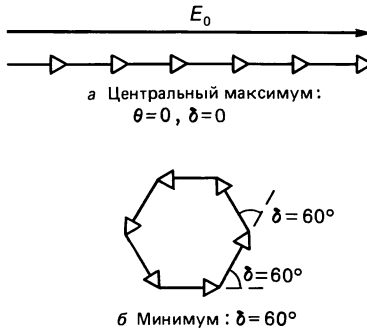


Рис. 37.20. Фазовая диаграмма для двух щелей: а – в центральном максимуме; б – в минимуме.

На рис. 37.20 и 37.21 изображены фазовые диаграммы соответственно для случая двух и шести щелей. Каждая короткая стрелка изображает амплитуду волны от одной щели, а векторная (или фазовая) сумма дает полную амплитуду для данного угла наблюдения  $\theta$ . На рис. 37.20, а и 37.21, а представлены фазовые диаграммы, отвечающие  $\theta = 0$ , т. е. центру картины, где расположен центральный максимум ( $m = 0$ ). На рис. 37.20, б и 37.21, б изображено условие возникновения соседнего минимума: стрелки впервые замыкаются и их векторная сумма обращается в нуль, как и амплитуда  $E$ . В случае двух щелей это происходит, когда амплитуды<sup>θ</sup> оказываются в про-

Рис. 37.21. Фазовая диаграмма для шести щелей: *a* – в центральном максимуме; *b* – в минимуме.



тивофазе, т. е. когда разность фаз между ними составляет  $180^\circ$ . В случае шести щелей это происходит, когда каждая стрелка образует угол  $60^\circ$  с соседней. В случае двух щелей минимум соответствует разности фаз между щелями  $2\pi/2$  (в радианах), в случае шести щелей – разности фаз  $\delta$ , равной  $2\pi/6$ . В общем случае  $N$  щелей минимум соответствует разности фаз между соседними щелями:

$$\delta = \frac{2\pi}{N}. \tag{37.15}$$

Что это означает в пересчете на угол  $\theta$ ? Прежде всего заметим, что разность фаз  $\delta$  связана с углом  $\theta$  соотношением

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{d \sin \theta}{\lambda}, \text{ или } \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \tag{37.16}$$

[см. соотношение (36.4)]. Обозначим через  $\Delta\theta_0$  угол, под которым наблюдается минимум, следующий за пиком при  $\theta = 0^\circ$ . Он соответствует разности хода между соседними щелями (рис. 37.15)  $\Delta l = d \sin \Delta\theta_0$ ; поэтому

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{d \sin \Delta\theta_0}{\lambda}.$$

Подставляя выражение (37.15) для  $\delta$ , получаем

$$\sin \Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \tag{36.17a}$$

Так как величина  $\Delta\theta_0$  обычно мала (число щелей  $N$  в дифракционной решетке обычно очень велико), то  $\sin \Delta\theta_0 \approx \Delta\theta_0$ , и в пределе малых углов справедлива формула

$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \tag{37.17b}$$

Из последних двух соотношений ясно, что, чем больше  $N$ , тем уже центральный пик. [При  $N = 2$  мы получаем  $\sin \Delta\theta_0 = \lambda/2d$ , что совпадает с формулой (36.26), выведенной ранее для случая двух щелей, при  $m = 0$ .]



Рис. 37.22. Фазовая диаграмма для вторичного пика.

Любая из формул (37.17) демонстрирует, почему с увеличением  $N$  пики становятся более узкими. Происхождение слабых вторичных максимумов между главными пиками (рис. 37.16, б) можно объяснить с помощью фазовой диаграммы на рис. 37.22. По сути дела, это — обобщение рис. 37.21, б (где  $\Delta\delta = 60^\circ$ ), но с фазой  $\Delta\delta$ , возросшей почти до  $90^\circ$ , где  $E_\theta$  — относительный максимум. Заметим, что  $E_\theta$  гораздо меньше, чем  $E_0$  (рис. 37.21, а), поэтому интенсивность вторичного максимума гораздо меньше интенсивности главного. При дальнейшем увеличении  $\Delta\delta$  (и  $\theta$ ) величина  $E_\theta$  вновь убывает до нуля («двойной оборот»), затем достигает еще одного небольшого максимума и т. д. В конце концов диаграмма снова развертывается, а при  $\Delta\delta = 360^\circ$  все амплитуды выстраиваются вдоль прямой (как на рис. 37.21, а), что соответствует следующему главному максимуму [ $m = 1$  в формуле (37.14)].

Соотношение (37.17, б) задает полуширину центрального ( $m = 0$ ) пика. Чтобы определить полуширину пиков более высокого порядка ( $\Delta\theta_m$  для пика порядка  $m$ ), продифференцируем соотношение (37.16). Это позволит связать приращение  $\Delta\delta$  фазы  $\delta$  с приращением  $\Delta\theta$  угла  $\theta$ :

$$\Delta\delta \approx \frac{d\delta}{d\theta} \Delta\theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos\theta \Delta\theta.$$

Если  $\Delta\theta_m$  — полуширина пика порядка  $m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), т. е. угол между максимумом пика и ближайшим к нему минимумом (с любой стороны), то, как следует из формулы (37.15),  $\Delta\delta = 2\pi/N$ . Подставляя полученное выражение в соотношение для  $\Delta\delta$ , получаем

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd \cos\theta_m}, \quad (37.18)$$

где  $\theta_m$  — угловое положение  $m$ -го пика, задаваемое соотношением (37.14). Приведенный вывод справедлив только при малых  $\Delta\delta$  ( $= 2\pi/N$ ). Для реальных решеток  $N$  порядка  $10^4$  и более, поэтому условие малости  $\Delta\delta$  выполняется.

## 37.10. Разрешающая способность дифракционной решетки

Важным свойством любой дифракционной решетки, используемой в спектрокопе, является ее способность различать две очень близкие длины волн.

Определим *угловую дисперсию* дифракционной решетки как скорость изменения угла заданного порядка дифракции с длиной волны:  $d\theta/d\lambda$ . Угол  $\theta$  дифракции света с длиной волны  $\lambda$  на решетке с периодом  $d$  удовлетворяет соотношению (37.14):

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d},$$

где  $m$  – порядок. Дифференцируя соотношение (37.14), получаем

$$\cos \theta d\theta = \frac{m}{d} d\lambda,$$

поэтому угловая дисперсия определяется по формуле

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}. \quad (37.19)$$

Если две монохроматические волны с длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  должны разрешаться спектроסקопом, то угол  $\Delta\theta$  между ними (в данном порядке  $m$ ) должен (по критерию Рэлея) быть не меньше ширины их дифракционных пиков. По формуле (37.18) угловая полуширина  $\Delta\theta$  пика (угол между вершиной пика и ближайшим к ней минимумом с любой стороны) равна

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{N d \cos \theta},$$

где  $N$  – полное число штрихов дифракционной решетки (индекс  $m$  мы опустили). Следовательно, минимальное различие длин волн, которые могут быть разрешены ( $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ ), определяется по формуле

$$\Delta\lambda \approx \frac{d\lambda}{d\theta} \Delta\theta = \left( \frac{d \cos \theta}{m} \right) \left( \frac{\lambda}{N d \cos \theta} \right)$$

[мы воспользовались соотношением (37.19) и положили  $\lambda_1 \approx \lambda_2 = \lambda$ ]. Полученное выражение можно упростить:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N m}. \quad (37.20)$$

Таким образом, разрешающая способность  $R$  дифракционной решетки определяется выражением

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \quad (37.21)$$

которое с учетом соотношения (37.20) преобразуется к виду

$$R = Nm. \quad (37.22)$$

Чем больше  $R$ , тем более близкие длины волн можно разрешить с помощью решетки. При заданной разрешающей способности  $R$  минимальное различие  $\Delta\lambda$  длин волн, близких к  $\lambda$ , как следует из двух предыдущих выражений, составляет

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R}.$$

**Пример 37.8.** Желтый свет натрия (которому отвечают длины волн  $\lambda_1 = 589,00$  нм и  $\lambda_2 = 589,59$  нм), падает на дифракционную решетку, имеющую 7500 штрихов/см. Определить а) максимальный порядок для желтого света натрия; б) угловую дисперсию дифракционной решетки; в) ширину решетки, необходимую для разрешения двух линий натрия; г) разрешающую способность дифракционной решетки в этом случае; д) угловую ширину каждой из линий натрия.

**Решение.** а) Так как  $d = 1 \text{ см}/7500 = 1,33 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ , максимальный порядок  $m$  для  $\lambda = 589$  нм может быть вычислен по формуле (37.14) при условии

$$m = \frac{d}{\lambda} \sin \theta \leq \frac{1,33 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{5,89 \cdot 10^{-7} \text{ м}} = 2,25.$$

Таким образом, максимальный порядок  $m = 2$ .

б) По формуле (37.19) угловая дисперсия определяется выражением

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}.$$

Линия натрия во втором порядке наблюдается при  $\sin \theta = 2\lambda/d = 2(589 \times 10^{-9} \text{ м})/(1,33 \cdot 10^{-6} \text{ м}) = 0,886$ , поэтому  $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = 0,464$  и

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{2}{(1,33 \cdot 10^{-6} \text{ м})(0,464)} = 3,24 \times 10^{-3} \text{ рад/нм},$$

или  $0,186 \text{ град/нм}$ .

в) Необходима разрешающая способность

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589 \text{ нм}}{0,59 \text{ нм}} = 1000.$$

Чтобы достичь ее, полное число штрихов  $N$  должно быть равно [по формуле (37.22)]

$$N = \frac{R}{m} = \frac{1000}{2} = 500.$$

Решетка должна быть шириной всего  $500/7500 \text{ см}^{-1} = 0,0667 \text{ см}$ . Типичные дифракционные решетки имеют ширину несколько сантиметров и поэтому легко разрешают желтые линии натрия.

г) Разрешающая способность решетки при  $N = 500$ ,  $m = 2$  равна 1000. Дифракционная решетка шириной 3,0 см содержала бы 22 500 штрихов, и ее разрешающая способность была бы равна 45 000.

д) Для решетки с числом штрихов не менее 500 угловая ширина линии при  $m = 2$  [по формуле (37.18)] составляет

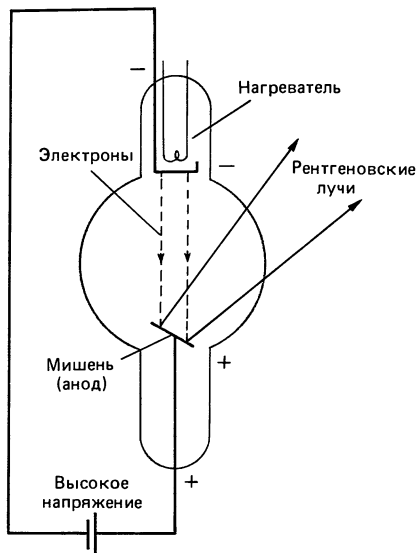
$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{\lambda}{N d \cos \theta} = \\ &= \frac{589 \cdot 10^{-9} \text{ м}}{(500)(1,33 \cdot 10^{-6} \text{ м})(0,464)} = \\ &= 0,0019 \text{ рад}, \end{aligned}$$

или  $0,11^\circ$ .

## \* 37.11. Рентгеновские лучи и дифракция рентгеновского излучения

В 1895 г. В.К. Рентген (1845–1923) открыл, что, когда электроны, ускоренные высоким напряжением в вакуумной трубке, соударяются с поверхностью стекла (или металла), возникает свечение находящихся на некотором расстоянии флуоресцирующих минералов, а фотопленка оказывается засвеченной. Рентген приписал эти эффекты действию нового типа излучения (отличного от катодных лучей). Их стали называть X-лучами ( $x$  – традиционное алгебраическое обозначение неизвестной величины). Вскоре Рентген обнаружил, что открытые им лучи через одни

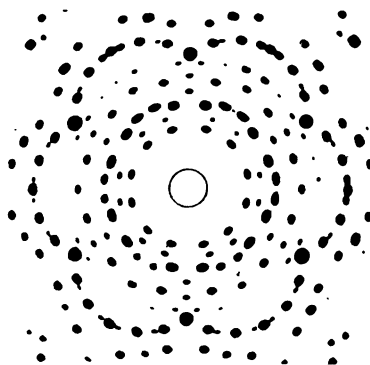
Рис. 37.23. Рентгеновская трубка. Электроны, испускаемые нагретой проволочкой в вакуумной трубке, ускоряются высоким напряжением. При соударении электронов с поверхностью анода (мишени) испускается рентгеновское излучение.



материалы проникают лучше, чем через другие, а спустя еще несколько недель он получил первую рентгенограмму (сделав снимок руки своей жены в рентгеновских лучах). В настоящее время для получения рентгеновского излучения используются трубки (рис. 37.23), сходные с использованной Рентгеном, с напряжением от 30 до 150 кВ.

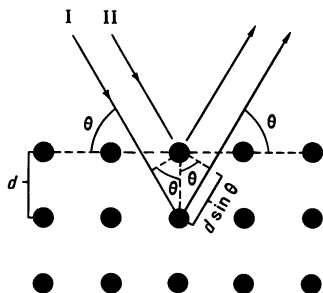
Исследования природы рентгеновских лучей показали, что это – не заряженные частицы (типа электронов), поскольку рентгеновские лучи не отклонялись электрическим и магнитным полями. Было высказано предположение о том, что рентгеновское излучение может быть одной из разновидностей невидимого света. Но с помощью обычных дифракционных решеток не удавалось наблюдать дифракцию или интерференцию рентгеновских лучей. Разумеется, если длины волн рентгеновского излучения гораздо меньше характерного периода дифракционной решетки  $10^{-6}$  м ( $= 10^3$  нм), то ожидать эффекта и не следовало. Около 1912 г. Макс фон Лауэ (1879–1960) высказал предположение о том, что если атомы в кристалле расположены регулярно (рис. 17.1, а) (многие физики разделяли такую теорию кристаллического строения вещества, хотя она еще не была полностью подтверждена экспериментально), то кристаллы могли бы служить своего рода дифракционной решеткой для очень коротких волн с длиной волны порядка межатомного расстояния, составляющего примерно  $10^{-10}$  м ( $= 10^{-1}$  нм). Проведенные вскоре эксперименты показали, что рентгеновские лучи, рассеянные на кристалле, действительно создают дифракционную картину с характерными максимумами и минимумами (рис. 37.24). Так «одним махом» были экспериментально продемонстрированы и волновая природа

**Рис. 37.24.** Дифракционная картина, возникающая при рассеянии рентгеновских лучей на кристалле берилла (воспроизводится с разрешения фирмы Eastman Kodak).



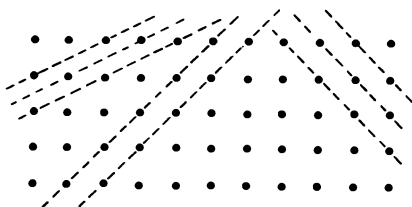
рентгеновского излучения, и регулярное расположение атомов в кристаллах. В настоящее время достоверно установлено, что рентгеновские лучи представляют собой электромагнитное излучение с длинами волн в диапазоне примерно от  $10^{-2}$  до 10 нм (именно этот диапазон длин волн испускается рентгеновской трубкой).

В разд. 37.4 и 37.5 было показано, что при микроскопическом исследовании объекта использование света с меньшей длиной волны позволяет достичь более высокого разрешения. Поскольку длины волн рентгеновского излучения значительно короче, чем у видимого света, это излучение в принципе позволяет достичь существенно более высокого разрешения. Но, по-видимому, не существует материалов, которые можно было бы использовать в качестве линз для очень коротковолнового рентгеновского излучения. Поэтому при исследовании микромира атомов и молекул эффективным, но и сложным оказался метод *дифракции рентгеновских лучей* (или *рентгеноструктурного анализа кристаллов*). В простых кристаллах, таких, как NaCl, атомы образуют правильную кубическую решетку (рис. 37.25) с периодом  $d$ . Предположим, что на такой кристалл под углом  $\theta$  к поверхности падает пучок рентгеновских лучей и что два луча, изображенные на рис. 37.25, отражаются двумя атомными плоскостями. Если путь луча  $I$  оказывается ровно на целое число длин волн больше пути луча  $II$ , то происходит усиливающая интерференция. Разность хода между лучами  $I$  и  $II$  равна



**Рис. 37.25.** Дифракция рентгеновских лучей на кристалле.

**Рис. 37.26.** В кристалле существует много плоскостей, на которых могут дифрагировать рентгеновские лучи.

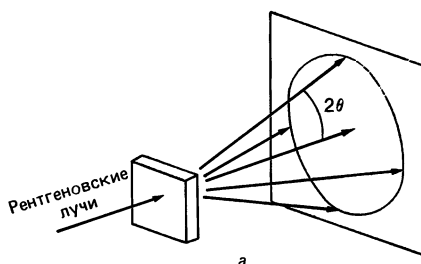


$2d \sin \theta$ . Следовательно, усиливающая интерференция наблюдается при

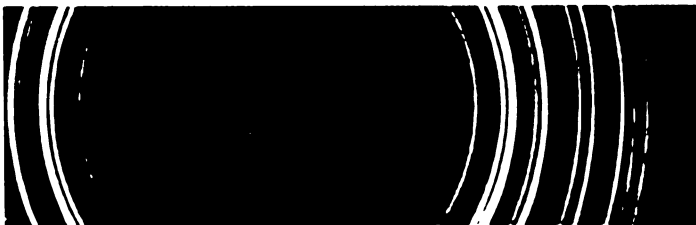
$$m\lambda = 2d \sin \theta, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (37.23)$$

где  $m$  – любое целое число. (Обратите внимание на то, что угол  $\theta$  отсчитывается не от нормали к поверхности.) Это – так называемое *условие Брэгга*, названное в честь У. Л. Брэгга (1890–1971), который вывел его и вместе со своим отцом У. Г. Брэггом (1862–1942) разработал теорию и экспериментальные методы дифракции рентгеновских лучей на кристаллах в 1912–1913 гг. Если известна длина волны рентгеновского излучения и измерен угол  $\theta$ , отвечающий усиливающей интерференции, то можно определить межатомное расстояние  $d$ . На этом и основан рентгеноструктурный анализ в кристаллографии.

В действительности рентгеновские дифракционные картины чрезвычайно сложны. Прежде всего кристалл представляет собой трехмерный объект, и рентгеновские лучи могут дифрагировать на различных плоскостях под разными углами в кристалле (рис. 37.26). Хотя анализ рентгеновских дифракционных картин является трудной задачей, тем не менее он позволяет получить обширные данные о строении любого вещества в кристаллической



**Рис. 37.27.** *а* – дифракция рентгеновских лучей на поликристаллическом веществе приводит к образованию серии круговых колец; *б* – дифракционная картина, полученная при дифракции рентгеновских лучей на поликристаллическом ацетоацетате натрия (снимок публикуется с разрешения фирмы Lester V. Bergman and Assoc., Inc.).





форме. Если вещество представляет собой не единый кристалл, а смесь большого числа крохотных кристалликов, как в металле или порошке, то вместо серии пятен (рис. 37.24) возникает серия колец (рис. 37.27). Каждое кольцо соответствует дифракционному максимуму определенного порядка  $m$  [соотношение (37.23)], возникающему при дифракции на наборе параллельных плоскостей.

## Заключение

*Дифракцией* мы называем свойство света, подобно другим видам волн, огибать встречающиеся на его пути препятствия и размываться при прохождении через узкие щели. Отклоненные лучи, прошедшие различными путями, интерферируют между собой и создают дифракционную картину. Проходя через очень узкую щель шириной  $D$ , свет создает дифракционную картину с ярким центральным максимумом полушириной  $\theta$ , определяемой соотношением  $\sin \theta = \lambda/D$ , и более слабыми линиями по обе стороны от центрального максимума. Минимумы в дифракционной картине удовлетворяют условию  $D \sin \theta = m\lambda$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ , за исключением  $m = 0$  ( $m = 0$  соответствует главному максимуму).

Интенсивность света в любом месте дифракционной картины от одной щели можно вычислить с помощью фазовых диаграмм. Этот же способ позволяет определить интенсивность и при дифракции на двух щелях. Дифракционная картина в этом случае представляет собой серию максимумов, обусловленных интерференцией света от двух щелей, промодулированных «огибающей», которая обусловлена дифракцией на каждой щели.

Волновая природа света ограничивает резкость изображений или разрешающую способность. Вследствие дифракции нельзя различить детали, характерный размер которых меньше длины волны испускаемого излучения.

*Дифракционная решетка* содержит большое число параллельных щелей или штрихов, отстоящих друг от друга на расстояние  $d$  (период решетки). Максимумы усиливающей интерференции наблюдаются под углами  $\theta$ , для которых  $\sin \theta = m\lambda/d$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ . В случае дифракционной решетки эти пики гораздо ярче и резче, чем в простом приборе с двумя щелями. Ширина пика обратно пропорциональна полному числу штрихов решетки.

Дифракционная решетка (или призма) используется в *спектроскопе* для разделения цветов или для наблюдения *линейчатых спектров*, так как при заданном порядке  $m$  угол  $\theta$  зависит от  $\lambda$ . Тщательно измеряя угол  $\theta$ , с помощью спектроסקопа можно с высокой точностью определить длину волны.

**Вопросы**

1. И радиоволны, и свет представляют собой электромагнитные волны. Почему можно слушать радио за возвышенностью, даже если передающая антенна находится за пределами прямой видимости?
2. Держа руку вблизи глаза, сфокусируйте зрение через узкую щель между двумя пальцами на далеком источнике света. (Добейтесь максимальной четкости.) Опишите картину, которую вы увидите. Какая это дифракция – Френеля или Фраунгофера?
3. Высота прямоугольной щели вдвое больше ее ширины. В какой плоскости размытие света произойдет на более широкий угол – в горизонтальной или в вертикальной? Опишите дифракционную картину.
4. Объясните, почему дифракционную картину от протяженного источника света наблюдать труднее, чем от точечного источника. Сравните также монохроматический источник с источником белого света.
5. Как сказывается в случае дифракции Фраунгофера на одной щели увеличение а) ширины щели; б) длины волны?
6. Опишите дифракционную картину, возникающую при освещении белым светом одной щели шириной а) 50 нм; б) 50000 нм.
7. Что произойдет с дифракционной картиной на одной щели, если всю установку поместить вместо воздуха а) в воду; б) в вакуум?
8. Обсудите, в чем сходство и различие между дифракцией Френеля и Фраунгофера на одной щели. Совпадают ли основные принципы? В чем могут различаться дифракционные картины?
9. Используя соотношение (37.6), укажите четко различие между углами  $\theta$  и  $\beta$ .
10. Почему при дифракции Фраунгофера на одной щели первый побочный максимум наблюдается под углом  $\theta$ , не точно удовлетворяющим соотношению  $\sin \theta = \frac{3}{2} \lambda / D$ ?
11. На рис. 37.9 показана интерференционная картина от двух щелей для случая  $d > D$ . Возможен ли обратный случай:  $d < D$ ?
12. Как скажется в эксперименте с двумя щелями при учете как дифракции, так и интерференции увеличение а) длины волны; б) расстояния между щелями; в) ширины щели?
13. Обсудите сходство и различие между интерференцией и дифракцией.
14. Ограничивает ли дифракция изображения, создаваемые а) сферическими зеркалами; б) плоскими зеркалами?
15. Сказываются ли дифракционные эффекты на качестве мнимых изображений? А действительных?

16. В чем состоят преимущества (укажите по крайней мере два из них) использования в астрономических телескопах больших отражательных зеркал?
17. Почему оптический микроскоп не позволяет наблюдать молекулы и клетки?
18. Атомы имеют диаметр порядка  $10^{-8}$  см. Можно ли, используя видимый свет, визуально наблюдать атом? Объясните, почему можно или нельзя.
19. Какой цвет обеспечивает наилучшую разрешающую способность оптического микроскопа?
20. При использовании монохроматического света влияет ли его цвет на разрешающую способность микроскопа? Объясните.
21. Можно ли дифракционную решетку называть интерференционной решеткой? Аргументируйте ответ.
22. В чем преимущество для дифракционной решетки а) большого числа щелей; б) малого периода решетки?
23. Свет с длинами волн от 400 до 700 нм падает нормально на дифракционную решетку. В каких порядках (если таковые существуют) может произойти перекрытие максимумов и минимумов? Зависит ли ответ от ширины щели?
24. Чем различаются интерференционные картины от двух щелей на расстоянии  $10^{-4}$  см друг от друга и дифракционной решетки, имеющей  $10^4$  штрих/см?
25. Белый свет падает а) на дифракционную решетку и б) на призму. В каждом случае на стене ниже направления падающего луча появляется радуга. Какого цвета верхний край радуги в каждом из этих случаев?
26. Объясните, почему при освещении дифракционной решетки монохроматическим светом между главными пиками возникают слабые вторичные пики. Почему вторичные пики такие слабые?
27. Почему в спектроскопии предпочтительнее использовать дифракционную решетку, а не призму?
28. Из формулы (37.22) следует, что разрешающая способность дифракционной решетки тем выше, чем больше порядок  $m$ . Вместе с тем, согласно формуле (37.18), ширина пика тем больше, чем больше порядок. Нет ли здесь противоречия? Объясните.

**Задачи**

## Раздел 37.1

1. (I) Свет с длиной волны 680 нм падает на щель шириной 0,0245 мм. Чему равна угловая

ширина центрального дифракционного пика?

2. (I) Монохроматический свет с длиной волны 589 нм падает на щель. Чему равна ширина щели, если угол между первыми светлыми полосами по обе стороны от центрального пика равен  $33,0^\circ$ ?

3. (I) Чему равна при данной длине волны  $\lambda$  максимальная ширина щели, при которой не будет дифракционных минимумов?

4. (II) Чему равна ширина центрального дифракционного пика на экране, расположенном на расстоянии 5,50 м за щелью шириной 0,101 мм, освещаемой светом с длиной волны 400 нм?

5. (II) Опишите дифракционную картину (дифракция Фраунгофера) при падении параллельного пучка света на щель шириной  $D$  под углом  $30^\circ$  к нормали.

### Раздел 37.2

6. (II) Если ширину щели удвоить, то интенсивность проходящего через нее света удвоится. а) Покажите, что интенсивность в центре экрана возрастает в 4 раза. б) Объясните, почему это не противоречит закону сохранения энергии.

7. (III) а) Объясните, почему вторичные максимумы в дифракционной картине при дифракции Фраунгофера на одной щели располагаются не точно под углами  $\beta/2 = (m + 1/2)\pi$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  б) Продифференцировав соотношение (37.7), покажите, что вторичные максимумы расположены там, где угол  $\beta/2$  удовлетворяет соотношению  $\operatorname{tg}(\beta/2) \approx \beta/2$ . в) Постройте тщательно и точно график функции  $y = \beta/2$  и  $y = \operatorname{tg}(\beta/2)$ . По точкам их пересечения определите значения  $\beta$ , соответствующие двум первым вторичным максимумам. Сколько процентов составляет различие с формулой  $\beta/2 = (m + 1/2)\pi$ ?

8. (III) Определите приближенно угловую полуширину максимума (отвечающему  $I = 1/2 I_0$ ) центрального дифракционного пика для дифракции Фраунгофера на одной щели. (Подсказка: воспользуйтесь графическим методом или методом проб и ошибок, так как задача не имеет аналитического решения.) Для определенности предположим, что  $\lambda = 550$  нм и  $D = 2,00 \cdot 10^{-3}$  мм.

### Раздел 37.3

9. (II) Рассчитайте установку с двумя щелями так, чтобы центральный дифракционный пик содержал ровно 15 полос.

10. (II) Что можно сказать о ширине щели и расстоянии между щелями, если центральный пик в дифракционной картине от двух щелей содержит ровно восемь полос?

11. (II) Предположим, что в установке с двумя

щелями  $d = D$ . Если эти две щели превращаются в одну шириной  $2D$ , докажите, что формула (37.9) при этом переходит в правильное выражение для дифракции от одной щели.

12. (II) Две щели шириной 0,010 мм находятся на расстоянии 0,030 мм (измеряем между центрами щелей). Определите а) расстояние между интерференционными полосами для света с длиной волны 550 нм на экране, расположенном на расстоянии 1,0 м; б) расстояние между двумя дифракционными минимумами с каждой стороны от центрального максимума огибающей.

13. (II) Сколько интерференционных полос содержится в центральном дифракционном пике картины, возникающей при дифракции от двух щелей, если а)  $d = 2,00D$ ; б)  $d = 12,0D$ ; в)  $d = 4,50D$ ; г)  $d = 7,20D$ ?

14. (III) Постройте фазовые диаграммы (как на рис. 37.7) для двух щелей с учетом интерференции и дифракции. Начертите диаграмму для каждой из нескольких характерных точек (рис. 37.9, в), таких, как, центр, первый минимум, следующий максимум и точка, в которой  $\sin \theta = \lambda/D$ .

### Разделы 37.4–37.6

15. (I) Чему равен угловой аксептанс  $\alpha$ , т.е. угол между осью объектива и крайними лучами светового пучка из точки объекта, попадающими в объектив иммерсионного микроскопа, и какова его разрешающая сила, если  $n = 1,60$  и  $\text{ЧА} = 1,35$ ? Для освещения используется источник с  $\lambda = \lambda 500$  нм.

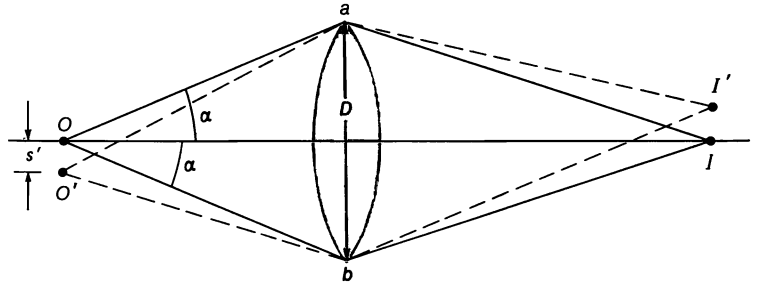
16. (I) Чему равен обусловленный дифракцией предел углового разрешения 100-дюймового телескопа обсерватории Маунт-Вильсон ( $\lambda = 500$  нм)?

17. В объектив иммерсионного микроскопа (масло с  $n = 1,60$ ) попадает свет от точки объекта в пределах углового аксептанса  $60^\circ$ . а) Чему равна числовая апертура? б) Чему приближенно равна разрешающая способность микроскопа при  $\lambda = 550$  нм?

18. (II) Две звезды, находящиеся на расстоянии 10 световых лет от Земли, едва разрешимы с помощью 100-дюймового (диаметр зеркала) телескопа. Оцените расстояние между этими двумя звездами. Предполагается, что  $\lambda = 550$  нм.

19. (II) На теле некоторого морского организма имеется узор из пятнышек, среднее расстояние между которыми составляет 0,40 мкм. а) Если особь такого организма рассматривать в свете с длиной волны 550 нм, то какой должна быть минимальная числовая апертура, чтобы разрешить точки на теле особи? б) При

Рис. 37.28. К задаче 37.28.



каком минимальном увеличении можно разглядеть эти точки?

20. (II) а) Может ли нормальный человеческий глаз видеть раздельными две фары грузовика, разнесенные на 1,8 м, с расстояния 10 км? При ответе учитывайте только дифракцию. Предполагается, что диаметр зрачка равен 5,0 мм, длина световой волны 500 нм. б) На каком наибольшем расстоянии фары могут быть разрешены?

21. Предположим, вы хотите сконструировать телескоп, способный разрешить детали лунной поверхности размером около 10 км. Луна находится от Земли на расстоянии 384 000 км. У вас имеется линза для объектива диаметром 10 см с фокусным расстоянием 2,0 м. Каким следует выбрать фокусное расстояние окуляра, если ваш глаз с расстояния 25 см может разрешать объекты, отстоящие друг от друга на расстояние 0,10 мм? Каков предел разрешающей способности телескопа, обусловленный диаметром линзы объектива (т. е. дифракцией)? Предполагается, что  $\lambda = 500$  нм.

22. На рис. 38.28 изображены два точечных объекта  $O$  и  $O'$ , находящиеся на таком расстоянии  $s'$  друг от друга, что их изображения  $I$  и  $I'$  едва разрешимы (точка  $O$  находится на оси линзы). Пользуясь рис. 37.28, выведите соотношение (37.12а). (Подсказка: прежде всего покажите, что световые волны, попавшие в результате дифракции из точки  $O'$  в точку  $I$ , создают в  $I$  нулевую интенсивность и, следовательно, разность хода между  $O'aI$  и  $O'bI$  должна составлять  $1,22\lambda$ . Затем с помощью чертежа покажите, что путь  $O'a$  на  $s \sin \alpha$  длиннее, чем  $Oa$  или  $O'b$ , и что путь  $O'b$  настолько же короче, чем  $Oa$  или  $O'b$ .) Угол  $\alpha$  не предполагается малым, поскольку расстояние до изображения во много раз превосходит расстояние до объекта ( $al \gg Oa$ ),  $al' \approx al$ .

Разделы 37.7 и 37.8

23. (I) Под каким углом возникает максимум третьего порядка в случае света с длиной волны 840 нм, падающего на дифракционную решетку с расстоянием между щелями  $2,35 \cdot 10^{-3}$  см?

24. (I) Сколько штрихов на 1 см имеет дифракционная решетка, если при освещении ее светом с длиной волны 650 нм максимум третьего порядка наблюдается под углом  $12,0^\circ$ ?

25. (I) Дифракционная решетка имеет 5000 штрих/см. Спектры какого порядка можно наблюдать при освещении ее белым светом?

26. (I) На крыльях у жука имеется серия параллельных линий. При отражении нормально падающего света с длиной волны 560 нм крылья кажутся яркими под углом  $46^\circ$ . Каково расстояние между линиями на крыльях жука?

27. (I) Свет от источника падает нормально на дифракционную решетку, имеющую 10 000 штрих/см; линии первого порядка наблюдаются под углами  $29,8; 37,7; 39,6; 48,9^\circ$ . Каковы соответствующие длины волн?

28. (II) Белый свет с длинами волн от 400 до 700 нм падает нормально на дифракционную решетку, имеющую 8000 штрих/см. Чему равна ширина спектра первого порядка на экране, находящемся на расстоянии 2,20 м от решетки?

29. (II) Сколько штрихов на 1 см должна иметь дифракционная решетка, если спектр второго порядка отсутствует в видимой области?

30. (II) Покажите, что создаваемые дифракционной решеткой спектры второго и третьего порядков в случае белого света всегда перекрываются.

31. (II) Две спектральные линии измерены спектроскопом с дифракционной решеткой, содержащей 10 000 штрих/см, под углами  $+26^\circ 38'$ ,  $+41^\circ 02'$  и  $-26^\circ 18'$ ,  $-40^\circ 27'$  по обе стороны от центрального максимума. Какие длины волн соответствуют этим линиям?

32. (II) Предположим, что измеренные в задаче 31 углы получены в условиях, когда спектрометр (но не источник света) был погружен в воду. Каким длинам волн соответствовали бы тогда эти спектральные линии?

33. (II) Если дифракционная решетка освещается желтой линией натрия ( $\lambda = 589$  нм), пик первого порядка на экране, отстоящем на расстояние 42,0 см от решетки, отстоит на 2,48 см от центрального пика. Другой источник создает

линию на расстоянии 3,84 см от центрального пика. Какова его длина волны?

**34.** (II) Свет, падающий нормально на дифракционную решетку с 10 000 штрих/см, создает в спектре первого порядка три линии под углами 31,2; 36,4; 47,5°. Какие длины волн соответствуют этим линиям?

**35.** (II) Монохроматический свет падает на прозрачную дифракционную решетку под углом  $\varphi$  к нормали. Покажите, что в этом случае соотношение (37.14) для дифракционных максимумов следует заменить соотношением

$$d(\sin \varphi \pm \sin \theta) = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Объясните знак  $\pm$ .

### \* Раздел 37.9

**\*36.** (II) Недостающие порядки возникают у дифракционной решетки, когда дифракционный минимум совпадает с интерференционным максимумом. Пусть  $D$  – ширина каждой щели,  $d$  – расстояние между соседними щелями. а) Покажите, что если  $d = 2D$ , то все четные порядки ( $m = 2, 4, 6, \dots$ ) будут отсутствовать. б) Покажите, что недостающие порядки возникают всякий раз, когда

$$\frac{d}{D} = \frac{m_1}{m_2},$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – целые числа. в) Рассмотрите предельный случай  $d = D$ , когда расстояние между щелями становится пренебрежимо малым.

**\*37.** (II) Пусть свет с длиной волны 500 нм падает нормально на дифракционную решетку, у которой  $d = 3,00D = 1200$  нм. а) Сколько порядков (главных максимумов) наблюдается? б) Решетка имеет ширину 1,50 см. Чему равна полная угловая ширина каждого главного максимума?

**\*38.** (II) Можно показать, что у любой дифракционной решетки положения центрального максимума вторичных пиков по обе стороны от него (вплоть до середины расстояния до второго главного пика) совпадают с дифракционной картиной от одной щели, ширина которой равна полной ширине дифракционной решетки. Докажите это с помощью фазовых диаграмм.

**\*39.** (III) а) Выведите выражение для распределения интенсивности в интерференционной картине от трех щелей, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга. Распределение интенсивности выразите через  $\delta = 2\pi d \sin \theta / \lambda$ ,

где  $d$  – расстояние между соседними щелями, и предположите, что  $D \approx \lambda$ . б) Покажите, что между главными пиками существует только один вторичный максимум.

### \* Раздел 37.10

**\*40.** (II) Сколько штрихов на 1 см должна содержать дифракционная решетка шириной 4,0 см, если она позволяет разрешить в первом порядке длины волны 4187,23 и 4187,41 нм?

**\*41.** (II) Дифракционная решетка с 5500 штрих/см имеет ширину 3,6 см. На решетку падает свет с длиной волны 624 нм. Насколько могут различаться две длины волны, если их надо разрешить в любом порядке? В каком порядке достигается наилучшее разрешение?

**\*42.** (II) Дифракционная решетка шириной 2,4 см содержит 16 000 штрихов. Определите а) ее угловую дисперсию в первом и во втором порядках; б) ее разрешающую способность в первом и во втором порядках; в) минимальное различие в длинах волн ( $\Delta\lambda$ ), разрешимых при  $\lambda = 410$  нм.

**\*43.** (II) Покажите, что при заданных длине волны и дифракционном угле разрешающая способность дифракционной решетки зависит от полной ширины всех щелей  $Nd$ , где  $N$  – число щелей шириной по  $d$ .

**\*44.** (II) Выведите формулу для минимальной разности частот  $\Delta f$ , разрешаемых дифракционной решеткой при падении на нее света с близкими частотами  $f_1 \approx f_2 = f$ .

### \* Раздел 37.11

**\*45.** (II) Рентгеновское излучение с длиной волны 0,128 нм падает на кристалл, атомы которого расположены в плоскостях на расстоянии 0,300 нм друг от друга. Под каким углом следует направить рентгеновские лучи на кристалл, чтобы наблюдать первый дифракционный максимум?

**\*46.** (II) Брэгговская дифракция первого порядка на кристалле с расстоянием между атомами 0,24 нм наблюдается под углом 16,2°. а) Под каким углом наблюдается второй порядок? б) Чему равна длина волны рентгеновского излучения?

**\*47.** (II) Можно ли определить длину волны  $\lambda$  рентгеновского излучения и постоянную решетки  $d$ , измерив рентгеновские дифракционные пики трех первых порядков ( $m = 1, 2, 3$ )? Обоснуйте ответ.