Приложение В
Полярные координаты

Часто (особенно в тех случаях, когда мы имеем дело с вращательным движением) бывает удобно ввести полярные координаты r и θ, где r – расстояние от начала координат до точки (равное длине радиуса-вектора $\mathbf{r}$), а θ – угол, образуемый радиусом-вектором с положительным направлением оси x (рис. В.1). Положение точки на плоскости можно задавать либо с помощью прямоугольных координат x и y, либо с помощью полярных координат r и θ. Прямоугольные координаты связаны с полярными преобразованием (см. рис. В.1)

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

полярные координаты с прямоугольными – обратным преобразованием

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = y/x.$$

Подобно тому как в прямоугольной системе координат полезно ввести единичные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, в полярной системе координат полезно ввести два единичных вектора $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Вектор $\hat{\mathbf{r}}$ всегда направлен в сторону увеличения радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и имеет единичную длину, вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ имеет единичную длину и направлен в сторону увеличения полярного угла θ (рис. В.1). Обратите внимание на то, что векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ действительно постоянны (и по величине, и по направлению), тогда как векторы $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ сохраняют только постоянную величину (единичную длину), а направление их меняется от точки к точке.

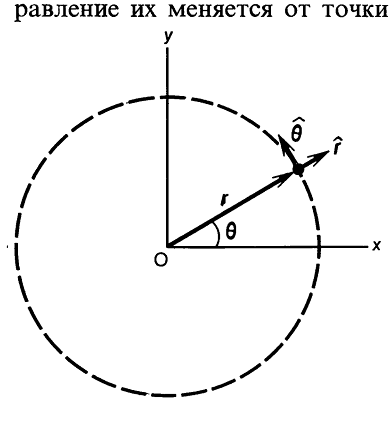

Рис. В.1.

В качестве примера рассмотрим движение по окружности (разд. 3.9 и 3.10). Векторы скорости и ускорения материальной точки, движущейся по окружности, можно записать с помощью векторов $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Так как вектор $\mathbf{v}$ всегда направлен по касательной к окружности,

$$\mathbf{v} = v\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Из соотношений (3.25) и (3.26), а также рис. 3.20 (разд. 3.10) и рис. B.1 следует, что ускорение можно представить в виде

$$\mathbf{a} = a_c\hat{\mathbf{r}} + a_t\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{B.1}$$

Первый член – это центростремительное ускорение, второй – тангециальное ускорение. Знак минус перед первым членом выбран потому, что центростремительное ускорение направлено к центру, т. е. в сторону, противоположную радиусу-вектору $\hat{\mathbf{r}}$.

Заметим, что если материальная точка движется по окружности с постоянной скоростью, то $a_t = dv/dt = 0$, и мы приходим к такому же результату, как и в разд. 3.9.

Формулы для a_t и a_c [см. соотношение (3.26) или B.1] остаются в силе и в том случае, если материальная точка движется по кривой, отличной от окружности, только под радиусом r следует понимать радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке. Тогда a_c – составляющая ускорения, перпендикулярная траектории, а a_t – составляющая ускорения, касательная (тангенциальная) к траектории в соответствующий момент времени.