ГЛАВА 1

КВАНТОВАНИЕ ГРУПП ПУАССОНА—ЛИ

В этой главе поле k есть, как правило, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$.

§ 1. Группы Пуассона—Ли и алгебры Хопфа

1. Пуассоновы многообразия. Гладкое многообразие M называется *пуассоновым*, если на алгебре функций $A = C^\infty(M)$ задано билинейное кососимметрическое отображение $\{\ ,\ \}\colon A \otimes A \to A$, удовлетворяющее тождеству Якоби

$$\{\{\varphi, \psi\}, \chi\} + \{\{\psi, \chi\}\varphi\} + \{\{\chi, \varphi\}, \psi\} = 0$$

и являющееся дифференцированием по каждому аргументу:

$$\{\varphi, \psi\chi\} = \{\varphi, \psi\}\chi + \psi\{\varphi, \chi\}.$$

Это отображение называется *скобкой Пуассона*. Заметим, что наличие многообразия для определения скобки Пуассона несущественно, поэтому говорят также о *пуассоновой алгебре* $(A, \{\ ,\ \})$.

Морфизмом пуассоновых многообразий $f\colon (M, \{\ ,\ \}_M) \to (N, \{\ ,\ \}_N)$ называется такое отображение $f\colon M \to N$, что $\{f^*\varphi, f^*\psi\}_M = f^*\{\varphi, \psi\}_N$ для всех функций φ, $\psi \in C^\infty(N)$.

Произведением пуассоновых многообразий $(M_1, \{\ ,\ \}_1) \times (M_2, \{\ ,\ \}_2)$ называется многообразие $M_1 \times M_2$, снабженное такой скобкой Пуассона $\{\ ,\ \}$, что, во-первых, проекции на каждый из сомножителей pr_1 и pr_2 являются морфизмами пуассоновых многообразий и, во-вторых, $\{pr_1^*\varphi_1, pr_2^*\varphi_2\} = 0$ для $\varphi_i \in C^\infty(M_i)$. Скобка, обладающая указанными свойствами, существует и единственна.

Отметим, что скобке Пуассона $\{\ ,\ \}$ на M отвечает некоторое бивекторное поле на M и в координатах скобку можно записать так:

$$\{\varphi, \psi\}(x) = \omega^{ij}(x)\partial_{i|x}\varphi \cdot \partial_{j|x}\psi,$$

где $\partial_{i|x}$ — дифференцирование по направлению i в точке $x \in M$ (здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам).

2. Квантование пуассоновых многообразий. Задача квантования пуассонова многообразия $(M, \{\ ,\ \})$ состоит в том, чтобы указать новую операцию умножения, зависящую от «параметра квантования» h

на алгебре $A = C^\infty(M)$ так, чтобы в первом приближении по h коммутатор относительно нового умножения совпадал бы с заданной скобкой Пуассона. Точнее, квантованием пуассоновой алгебры $(A, \{\ ,\ \})$ над полем k называется такая алгебра A_h над кольцом $k[[h]]$ формальных степенных рядов по h, что

1) $A_h/hA_h \cong A$,
2) как векторное пространство над k алгебра A_h изоморфна $A[[h]]$,
3) выполнен «принцип соответствия»

$$h^{-1}[a, b] \bmod h = \{a \bmod h, b \bmod h\} \quad \text{для всех } a, b \in A_h.$$

Квантование алгебры A можно интерпретировать как деформацию закона умножения на A. Именно, при квантовании на пространстве $A[[h]]$ вводится такая ассоциативная операция $*$, что

$$a * b = ab + \sum m_i(a, b)h^i.$$

(Это умножение $A \otimes A \to A[[h]]$ очевидным образом распространяется до искомого умножения $A[[h]] \otimes A[[h]] \to A[[h]]$.) Заметим, что алгебра функций на многообразии, конечно, коммутативна. Ее квантование при наличии нетривиальной скобки Пуассона коммутативной алгеброй уже не будет.

Квантование заданной пуассоновой алгебры не обязано существовать, а если существует, то не обязательно единственно. Задача нахождения квантования далеко не тривиальна. Мы дали формальное определение квантования, однако «физический смысл» имеют такие деформации, для которых ряд по h, задающий закон умножения, является сходящимся. Как правило, имеющиеся теоремы о квантовании не дают ответа на этот вопрос. То же можно сказать и об аппарате теории деформаций.

Основная цель этой главы — решение задачи квантования для случая, когда многообразие M является группой Ли, а скобка Пуассона надлежащим образом согласована со структурой группы. Именно, группа Ли G, снабженная скобкой Пуассона, называется *группой Пуассона–Ли*, если отображение умножения μ: $G \times G \to G$ является морфизмом пуассоновых многообразий.

3. Алгебры Хопфа. Определения. Алгебра функций $H = \mathcal{O}(G)$ на некоторой группе G имеет дополнительную замечательную структуру — она является алгеброй Хопфа. Если понимать в надлежащем смысле знак $\otimes$ и обозначение $\mathcal{O}$, то $\mathcal{O}(G \times G) \cong \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$ (в частности, если G — алгебраическая группа, то $\mathcal{O}(G) = k[G]$ есть алгебра регулярных функций на G, а $\otimes$ — обычное тензорное произведение алгебр; если G — группа Ли, то $\mathcal{O}(G) = C^\infty(G)$, а $\otimes$ — топологическое тензорное произведение). Итак, пусть $H = \mathcal{O}(G)$. Тогда умножение μ: $G \times G \to G$ индуцирует отображение Δ: $H \to H \otimes H$, при

котором $\Delta f(g_1, g_2) = f(g_1 g_2)$; обращение в группе ι: $G \to G$ индуцирует такое отображение S: $H \to H$, что $S(f)(g) = f(g^{-1})$; наконец, вложение единицы u: $\{e\} \to G$ задает «аугментацию» ε: $H \to k = \mathcal{O}(\{e\})$, при которой $\varepsilon(f) = f(e)$. Эти отображения называются соответственно *коумножением*, *антиподом* и *коединицей*. Характеристические свойства Δ, S и ε, проистекающие из аксиом группы, уместно изобразить посредством диаграмм. Например, ассоциативность группового закона записывается так:

$$\begin{tikzcd} G & G \times G \arrow[l, "\mu"'] \\ G \times G \arrow[u, "\mu"] & G \times G \times G \arrow[l, "\mu \times 1"] \arrow[u, "1 \times \mu"'] \end{tikzcd}$$

Применяя к этой диаграмме функтор $\mathcal{O}$, получаем коассоциативность Δ:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & H \otimes H \arrow[d, "1 \otimes \Delta"'] \\ H \otimes H \arrow[r, "\Delta \otimes 1"] & H \otimes H \otimes H \end{tikzcd} \qquad \text{(COASS)}$$

Аксиома $e \cdot g = g \cdot e = g$ дает

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[d, "\varepsilon \otimes 1"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & H \otimes H \arrow[d, "1 \otimes \varepsilon"] \\ k \otimes H \arrow[r] & H & k \otimes H \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \text{(COUN)}$$

а аксиома $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ приводит к диаграмме

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & k \arrow[r, "\eta"] & H \\ H \otimes H \arrow[r] & H & H \otimes H \arrow[l] \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd} \qquad \text{(ANT)}$$

Здесь m: $H \otimes H \to H$ — умножение в H, а η: $k \to H$ — единица ($\eta(\alpha) = \alpha \cdot 1_H$).

Определение 1.1. Векторное пространство H над полем k называется *коалгеброй*, если заданы такие отображения

$$\Delta\colon H \to H \otimes H \quad \text{и} \quad \varepsilon\colon H \to k,$$

что диаграммы (COASS) и (COUN) коммутативны.

Ассоциативная алгебра H над полем k называется *биалгеброй*, если она является коалгеброй, а отображения Δ и ε являются гомоморфизмами алгебр.

Биалгебра H называется *алгеброй Хопфа*, если задано такое отображение $S\colon H \to H$, что коммутативна диаграмма (ANT).

Предложение 1.2. *Если для алгебры существует отображение ε, то оно единственно и является гомоморфизмом биалгебр. Если для биалгебры существует отображение S, то оно единственно и является антигомоморфизмом биалгебр.*

Опишем детальнее некоторые модельные примеры.

Пример 1. Вычислим явно Δ и ε в биалгебре $k[\mathrm{Mat}(n)]$ функций на полугруппе матриц. Ясно, что $k[\mathrm{Mat}(n)] \cong k[z_i^j \mid i, j = 1, \ldots, n]$, последнюю алгебру обозначим для краткости $k[Z]$. Так как $z_i^j(g) = g_i^j$, то

$$\Delta(z_i^j) = \sum z_i^k \otimes z_k^j,$$

$\varepsilon(z_i^j) = \delta_i^j$ (символически $\Delta(Z) = Z \otimes Z$, $\varepsilon(Z) = E$).

Пример 2. Алгебра функций на $GL(n)$ получается из $k[\mathrm{Mat}(n)]$ присоединением элемента D^{-1}, формально обратного детерминанту

$$D = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma(1)} \ldots z_n^{\sigma(n)},$$

т. е. $k[GL(n)] \cong k[\mathrm{Mat}(n)][D^{-1}]$ (здесь S_n — группа перестановок, $\sigma(i)$ — образ элемента i при действии перестановки σ). Положив $\Delta(D^{-1}) = D^{-1} \otimes D^{-1}$ и $\varepsilon(D^{-1}) = 1$, мы продолжим на $k[GL(n)]$ структуру биалгебры с $k[\mathrm{Mat}(n)]$. Формулы для антипода суть не что иное, как формулы Крамера

$$S(z_j^i) = D^{-1} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) = j}} \mathrm{sgn}(\sigma) z_1^{\sigma 1} \ldots \widehat{z_i^j} \ldots z_n^{\sigma n},$$

превращающие $k[\mathrm{GL}(n)]$ в алгебру Хопфа.

Пример 3. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то ее *универсальная обертывающая* алгебра $U\mathfrak{g} = \mathbb{T}\mathfrak{g}/(x \otimes y - y \otimes x - [x, y])$ является алгеброй Хопфа с коумножением, определенным по формуле $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, и распространенным далее по мультипликативности, коединицей $\varepsilon(x) = 0$ и антиподом $S(x) = -x$.

Из общих определений, относящихся к алгебрам Хопфа, нам потребуется понятие *хопфова спаривания*. Пусть $(A, m_A, \eta_A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ и $(B, m_B, \eta_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ — биалгебры над полем k. Спаривание $\langle\ ,\ \rangle\colon A \otimes B \to k$ называется хопфовым, если

$$\langle \Delta_A a, b_1 \otimes b_2 \rangle = \langle a, m_B(b_1 \otimes b_2) \rangle,$$
$$\langle m_A(a_1 \otimes a_2), b \rangle = \langle a_1, \otimes a_2, \Delta_B b \rangle,$$
$$\langle \eta_A(\alpha), b \rangle = \alpha \varepsilon_B(b), \quad \langle a, \eta_B(\beta) \rangle = \beta \varepsilon_A(a).$$

Если, кроме того, A и B являются алгебрами Хопфа, то требуется, чтобы $\langle S_A(a), b \rangle = \langle a, S_B(b) \rangle$.

Пример 4. Пусть $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ — алгебра Хопфа, A^* — двойственное векторное пространство к A. Отображение m^*: $A^* \to (A \otimes \otimes A)^*$ ограничим на такое максимальное подпространство A' в A^*, что $m^*(A') \subset A' \otimes A'$. Тогда $\Delta^*(A' \otimes A') \subset A'$ и $S^*(A') \subset A'$, поэтому $(A', \Delta^*, \varepsilon^*, m^*, \eta^*, S^*)$ — алгебра Хопфа, двойственная к A.

4. Двойственность Л. Шварца. Пусть $U_{G,g}$ есть пространство функционалов на локальном кольце $\mathcal{O}_{G,g}$, которые обращаются в нуль на достаточно большой степени максимального идеала $\mathfrak{m}_g$ точки $g \in G$. Пространство $U_G = U_{G,e}$ является алгеброй, поскольку отображение $\mathcal{O}_{G,e} \to \mathcal{O}_{G \times G,(e,e)} \supset \mathcal{O}_{G,e} \otimes \mathcal{O}_{G,e}$ индуцирует отображение $U_G \otimes U_G \to U_G$. Алгебра U_G фильтрована:

$$U_G^{\geqslant s} = \{\varphi \mid \varphi|_{\mathfrak{m}_e^s} = 0\};$$

кроме того, $U_G^{\geqslant 1}/U_G^{\geqslant 0} \cong T_e G \cong \mathfrak{g}$. Сравним U_G и $U\mathfrak{g}$. Оказывается, что U_G есть биалгебра. Для $f \in U_G$ определим Δf из равенства

$$\langle \Delta f, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle f, \varphi\psi \rangle \quad \text{для } \varphi, \psi \in \mathcal{O}_{G,e}.$$

Теорема 1.3. *Над полем характеристики нуль биалгебры U_G и $U\mathfrak{g}$ изоморфны.*

Действительно, если выбрать базис $I^\alpha = I_1^{\alpha_1} \ldots I_n^{\alpha_n}$ в $U\mathfrak{g}$ и поставить в соответствие элементу I^α такой функционал D^α, что

$$\langle D^\alpha, \varphi \rangle = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}\bigg|_{x=e} = \frac{1}{\alpha!} \widehat{I}^\alpha(\varphi),$$

где $\widehat{I}^\alpha$ — соответствующий дифференциальный оператор, то получим, что

$$\Delta D^\alpha = \sum_{\alpha' + \alpha'' = \alpha} D^{\alpha'} \otimes D^{\alpha''},$$

а с другой стороны, в $U\mathfrak{g}$

$$\Delta I^\alpha = \sum_{\alpha' + \alpha'' = \alpha} I^{\alpha'} \otimes I^{\alpha''}$$

(подробности см. в [6]).

Элементы $U\mathfrak{g}$ могут быть реализованы правоинвариантными дифференциальными операторами на G; точно так же можно интерпретировать элементы U_G:

$$\langle f_g, \varphi \rangle = \widehat{f}(R_{g^{-1}} \varphi),$$

здесь $\varphi \in \mathcal{O}_{G,g}$, f рассматривается как элемент $U\mathfrak{g}$, а $(R_{g^{-1}}\varphi)(x) = = \varphi(gx)$ — правый сдвиг.

5. Пуассоновы и копуассоновы алгебры Хопфа и их квантование. Если G — группа Пуассона–Ли, то $\mathcal{O}(G)$ является как алгеброй Хопфа, так и пуассоновой алгеброй. Согласованность этих структур следует из согласованности групповой и пуассоновой структур на G.

Определение 1.4. Алгебра Хопфа H, являющаяся пуассоновой алгеброй, называется *пуассоновой алгеброй Хопфа*, если коумножение является гомоморфизмом пуассоновых алгебр. Подразумевается, что на $H \otimes H$ скобка определена так:

$$\{a \otimes b, c \otimes d\} = \{a, c\} \otimes bd + ac \otimes \{b, d\}.$$

Естественным образом обертывающая алгебра Хопфа $U\mathfrak{g}$ алгебры Ли группы Пуассона–Ли G наделяется двойственным отображением $\delta\colon U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ — коскобкой Пуассона (см. § 2). Нетрудно выписать соответствующее условие согласованности. Такие алгебры Хопфа называются *копуассоновыми*.

Теперь можно уточнить формулировку задачи квантования группы Пуассона–Ли. Мы будем искать квантование пуассоновой алгебры $\mathcal{O}(G)$ или, эквивалентно, копуассоновой алгебры $U\mathfrak{g}$ в классе алгебр Хопфа. Поясним, что принцип соответствия для квантования копуассоновой алгебры записывается так:

$$h^{-1}(\Delta(x) - \Delta^{\mathrm{op}}(x)) \bmod h = \delta(x) \bmod h,$$

где Δ — коумножение в деформированной алгебре Хопфа, а Δ^{op} — противоположное коумножение, т. е. если $\Delta x = \sum y_i \otimes z_i$, то $\Delta^{\mathrm{op}}(x) = \sum z_i \otimes y_i$.

§ 2. Биалгебры Ли

1. Биалгебры Ли. Этот параграф посвящен описанию структур группы Пуассона–Ли на простой комплексной группе Ли. Как обычно, от группы Ли удобнее перейти к линейному объекту — ее алгебре Ли. Пуассонова структура на G определяет коскобку $\delta\colon \mathfrak{g} \to \Lambda^2\mathfrak{g}$; эквивалентно, на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ возникает структура алгебры Ли. Тождество Якоби для этой скобки (проистекающее из тождества Якоби для скобки Пуассона на G) приводит к классическому уравнению Янга–Бакстера, описание решений которого эквивалентно искомому описанию структур Пуассона–Ли. Перейдем к точным формулировкам и деталям.

Выберем отождествление $TG = G \times \mathfrak{g}$ посредством правоинвариантных векторных полей (поясним, что если $\{I_\mu\}$ — базис $\mathfrak{g}$, то $\partial_{\mu|g}\varphi = I_\mu(R_{g^{-1}}\varphi)$, $\partial'_{\mu|g}\varphi = I_\mu(L_{g^{-1}}\varphi)$ — право- и левоинвариантные поля; здесь $(R_{g^{-1}}\varphi)(x) = \varphi(xg)$ и $(L_{g^{-1}}\varphi)(x) = \varphi(gx)$). Тогда для каждой $\Lambda^2\mathfrak{g}$-значной формы ω на G можно определить скобку

$$\{\varphi, \psi\}(g) = \omega^{\mu\nu}(g)\partial_{\mu|g}\varphi \cdot \partial_{\nu|g}\psi$$

(разумеется, она не обязана удовлетворять тождеству Якоби).