Определение 1.4. Алгебра Хопфа H, являющаяся пуассоновой алгеброй, называется *пуассоновой алгеброй Хопфа*, если коумножение является гомоморфизмом пуассоновых алгебр. Подразумевается, что на $H \otimes H$ скобка определена так:

$$\{a \otimes b, c \otimes d\} = \{a, c\} \otimes bd + ac \otimes \{b, d\}.$$

Естественным образом обертывающая алгебра Хопфа $U\mathfrak{g}$ алгебры Ли группы Пуассона–Ли G наделяется двойственным отображением $\delta\colon U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ — коскобкой Пуассона (см. § 2). Нетрудно выписать соответствующее условие согласованности. Такие алгебры Хопфа называются *копуассоновыми*.

Теперь можно уточнить формулировку задачи квантования группы Пуассона–Ли. Мы будем искать квантование пуассоновой алгебры $\mathcal{O}(G)$ или, эквивалентно, копуассоновой алгебры $U\mathfrak{g}$ в классе алгебр Хопфа. Поясним, что принцип соответствия для квантования копуассоновой алгебры записывается так:

$$h^{-1}(\Delta(x) - \Delta^{\mathrm{op}}(x)) \bmod h = \delta(x) \bmod h,$$

где Δ — коумножение в деформированной алгебре Хопфа, а Δ^{op} — противоположное коумножение, т. е. если $\Delta x = \sum y_i \otimes z_i$, то $\Delta^{\mathrm{op}}(x) = \sum z_i \otimes y_i$.

§ 2. Биалгебры Ли

1. Биалгебры Ли. Этот параграф посвящен описанию структур группы Пуассона–Ли на простой комплексной группе Ли. Как обычно, от группы Ли удобнее перейти к линейному объекту — ее алгебре Ли. Пуассонова структура на G определяет коскобку $\delta\colon \mathfrak{g} \to \Lambda^2\mathfrak{g}$; эквивалентно, на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ возникает структура алгебры Ли. Тождество Якоби для этой скобки (проистекающее из тождества Якоби для скобки Пуассона на G) приводит к классическому уравнению Янга–Бакстера, описание решений которого эквивалентно искомому описанию структур Пуассона–Ли. Перейдем к точным формулировкам и деталям.

Выберем отождествление $TG = G \times \mathfrak{g}$ посредством правоинвариантных векторных полей (поясним, что если $\{I_\mu\}$ — базис $\mathfrak{g}$, то $\partial_{\mu|g}\varphi = I_\mu(R_{g^{-1}}\varphi)$, $\partial'_{\mu|g}\varphi = I_\mu(L_{g^{-1}}\varphi)$ — право- и левоинвариантные поля; здесь $(R_{g^{-1}}\varphi)(x) = \varphi(xg)$ и $(L_{g^{-1}}\varphi)(x) = \varphi(gx)$). Тогда для каждой $\Lambda^2\mathfrak{g}$-значной формы ω на G можно определить скобку

$$\{\varphi, \psi\}(g) = \omega^{\mu\nu}(g)\partial_{\mu|g}\varphi \cdot \partial_{\nu|g}\psi$$

(разумеется, она не обязана удовлетворять тождеству Якоби).

Предложение 1.5. *Пусть ω задает скобку Пуассона на G. Эта скобка будет согласована с групповой структурой тогда и только тогда, когда ω есть 1-коцикл на G со значениями в $\Lambda^2\mathfrak{g}$, т. е.*

$$\omega(g_1 g_2) = \operatorname{Ad} g_1 \cdot \omega(g_2) + \omega(g_1).$$

Доказательство. С одной стороны,

$$(\mu^*\{\varphi, \psi\})(g_1, g_2) = \omega^{\mu\nu}(g_1 g_2)\partial_{\mu|g_1 g_2}\varphi \cdot \partial_{\nu|g_1 g_2}\psi = \\ = \omega^{\mu\nu}(g_1 g_2) I_\mu(R_{(g_1 g_2)^{-1}}\varphi) \cdot I_\nu(R_{(g_1 g_2)^{-1}}\psi).$$

С другой стороны,

$$\{\mu^*\varphi, \mu^*\psi\}(g_1, g_2) = \omega^{\mu\nu}(g_1)\partial_{\mu|g_1}(R_{g_2^{-1}}\varphi) \cdot \partial_{\nu|g_1}(R_{g_2^{-1}}\psi) + \\ + \omega^{\mu\nu}(g_2)\partial_{\mu|g_2}(L_{g_1^{-1}}\varphi) \cdot \partial_{\nu|g_2}(L_{g_1^{-1}}\psi) = \\ = \omega^{\mu\nu}(g_1) I_\mu(R_{(g_1 g_2)^{-1}}\varphi) \cdot I_\nu(R_{(g_1 g_2)^{-1}}\psi) + \\ + \omega^{\mu\nu}(g_2) I_\mu(R_{g_2^{-1}} L_{g_1^{-1}}\varphi) \cdot I_\nu(R_{g_2^{-1}} L_{g_1^{-1}}\psi).$$

Условие коцикла в координатах записывается следующим образом:

$$\omega^{\mu\nu}(g_1 g_2) I_\mu(a) \cdot I_\nu(b) = \\ = \omega^{\mu\nu}(g_2) I_\mu(R_{g_2} L_{g_1^{-1}} a) \cdot I_\nu(R_{g_2} L_{g_1^{-1}} b) + \omega^{\mu\nu}(g_1) I_\mu(a) \cdot I_\nu(b),$$

откуда нетрудно усмотреть требуемое.

Следствие 1.6. *Группа Пуассона–Ли не может быть симплектическим многообразием.*

Действительно, из уравнения коцикла вытекает, что $\omega(e_G) = 0$.

Если G есть группа Пуассона–Ли, то $\mathfrak{g}^*$ также имеет естественную структуру алгебры Ли. Возьмем для $l_i \in \mathfrak{g}^*$ такую функцию φ_i на G, что $d_e\varphi_i = l_i$, тогда $[l_1, l_2] = d_e\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Тем самым определена и *коскобка Ли* — отображение $\delta\colon \mathfrak{g} \to \Lambda^2\mathfrak{g}$. Пусть $c^\lambda_{\mu\nu}$, $f^{\alpha\beta}_\gamma$ — структурные константы $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ соответственно в дуальных базисах (т. е. $[I_\mu, I_\nu] = c^\lambda_{\mu\nu} I_\lambda$, $[J^\alpha, J^\beta] = f^{\alpha\beta}_\gamma J^\gamma$).

Теорема-определение 1.7. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *биалгеброй Ли*, если на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ также введена структура алгебры Ли и выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) структурные константы алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ согласованы:

$$c^k_{rs} f^{ij}_k = c^i_{\alpha r} f^{j\alpha}_s - c^j_{\alpha r} f^{i\alpha}_s + c^i_{\alpha s} f^{j\alpha}_r - c^j_{\alpha s} f^{i\alpha}_r;$$

2) коскобка $\delta\colon \mathfrak{g} \to \Lambda^2\mathfrak{g}$ является 1-коциклом;

3) на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ существует структура алгебры Ли, индуцирующая на $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ заданные структуры алгебр Ли, и такая билинейная инвариантная форма Q, что $Q((x_1, l_1), (x_2, l_2)) = l_1(x_2) + l_2(x_1)$. (Если указанная структура алгебры Ли на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ существует, то она единственна.)

Набросок доказательства. Эквивалентность 1) и 2) очевидна.

1) $\Rightarrow$ 3). Зная согласованные наборы структурных констант, зададим коммутатор между элементами $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ формулой

$$[I_i, J^j] = f_i^{jk} I_k + c_{ki}^j J^k.$$

3) $\Rightarrow$ 2). Легко видеть, что $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ являются $\mathfrak{g}$-модулями, причем действие $x \in \mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} x_{\mathfrak{g}} & z_x \\ 0 & x_{\mathfrak{g}^*} \end{pmatrix}, \quad \text{где } z_x \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}.$$

Но отсюда следует, что $z_{xy} = x_{\mathfrak{g}} z_y + z_x y_{\mathfrak{g}^*}$, т. е.

$$z \in Z^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})) \cong Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \quad \text{и даже } z \in Z^1(\mathfrak{g}, \Lambda^2 \mathfrak{g}).$$

Это и есть нужный коцикл.

Пример. Если $\dim \mathfrak{g} = 2$, то любое отображение $\delta\colon \mathfrak{g} \to \Lambda^2 \mathfrak{g}$ задает структуру биалгебры Ли на $\mathfrak{g}$.

Теорема 1.8. *Категория связных односвязных групп Пуассона—Ли эквивалентна категории биалгебр Ли.*

Уже ясно, что группа Пуассона—Ли определяет некоторую биалгебру Ли. Обратное соответствие основано на том, что $Z^1(G, V) \cong \cong Z^1(\mathfrak{g}, V)$; в частности, 1-коцикл $\mathfrak{g}$ со значениями в $\Lambda^2 \mathfrak{g}$ интегрируется до бивектора на G, задающего скобку Пуассона. Тождество Якоби для этой скобки эквивалентно обращению в нуль некоторого 1-коцикла G со значениями в $\Lambda^3 \mathfrak{g}$, но в $Z^1(\mathfrak{g}, \Lambda^3 \mathfrak{g})$ ему отвечает нуль, поскольку $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли.

2. Биалгебры Ли и тройки Манина. Третье условие теоремы-определения биалгебры указывает следующий способ построения биалгебр Ли.

Определение 1.9. Тройка $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$, где $\mathfrak{p}$ — алгебра Ли с фиксированной билинейной невырожденной инвариантной формой $\langle\ ,\ \rangle$, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ — ее такие изотропные подалгебры, что $\mathfrak{p}$ как векторное пространство есть прямая сумма $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$, называется *тройкой Манина.*

Ясно, что каждая биалгебра Ли определяет тройку Манина $(\mathfrak{g} \oplus \oplus \mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$.

Предложение 1.10. *Имеется взаимно однозначное соответствие между биалгебрами Ли и тройками Манина.*

Покажем, каким образом тройка Манина $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ задает биалгебру Ли. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_1$; из определения вытекает, что $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{p}_2$. Определим коскобку Ли на $\mathfrak{g}$ как отображение, двойственное коммутатору в $\mathfrak{p}_2$ относительно формы $\langle\ ,\ \rangle$ на $\mathfrak{p}$: $\langle \delta(p_1), x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle p_1, [x_2, y_2] \rangle$, где $p_1 \in \mathfrak{p}_1$, $x_2, y_2 \in \mathfrak{p}_2$. Надо проверить, что δ — 1-коцикл, т. е.

$$\delta([x_1, y_1]) = [\delta(x_1), y_1] + [x_1, \delta(y_1)],$$

где $x_1, y_1 \in \mathfrak{p}$ (под $[x \otimes y, z]$ понимается $[x, z] \otimes y + x \otimes [y, z]$). Пусть P: $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}_1$ — проекция на прямое слагаемое. Имеем

$$\begin{aligned}\langle [x_1, \delta(y_1)], x_2 \otimes y_2 \rangle &= -\langle \delta(y_1), [x_1, x_2 \otimes y_2] \rangle = \\ &= -\langle \delta(y_1), [x_1, x_2] \otimes y_2 + x_2 \otimes [x_1, y_2] \rangle = \\ &= -\langle y_1, [P[x_1, x_2], y_2] + [x_2, P[x_1, y_2]] \rangle = \\ &= \langle [y_1, y_2], P[x_1, x_2] \rangle - \langle [y_1, x_2], P[x_1, y_2] \rangle .\end{aligned}$$

Проекция в этом вычислении появляется потому, что $\mathfrak{p}_i$ — лишь подалгебры в $\mathfrak{p}$, а не идеалы. Из-за изотропности $\langle a, b \rangle = \langle a, Pb \rangle + \langle Pa, b \rangle$ для всех $a, b \in \mathfrak{p}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\langle [\delta(x_1), y_1] + [x_1, \delta(y_1)], x_2 \otimes y_2 \rangle &= \\ = \langle [y_1, y_2], [x_1, x_2] \rangle - \langle [y_1, x_2], [x_1, y_2] \rangle &= \langle \delta([x_1, y_1]), x_2 \otimes y_2 \rangle ,\end{aligned}$$

что уже легко следует из инвариантности.

Поскольку $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ и $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1)$ одновременно являются тройками Манина, понятие биалгебры Ли самодвойственно.

Приведем важный для дальнейшего пример. Пусть $\mathfrak{g}$ есть *алгебра Каца–Муди* с симметризуемой целочисленной матрицей Картана $A = (a_{ij})$ размером $n \times n$ с $a_{ii} = 2$ и условием $a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$. Симметризуемость означает наличие такой диагональной матрицы $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, что DA — симметрическая матрица (фактически, DA есть матрица скалярных произведений простых корней). Алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ задается образующими $X_i^{\pm}$, H_i, $i = 1, \ldots, n$, и соотношениями

$$\begin{gathered}[H_i, H_j] = 0, \\ [H_i, X_i^{\pm}] = \pm a_{ij} X_i^{\pm}, \\ [X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij} H_i, \\ (ad X_i^{\pm})^{1 - a_{ij}} (X_j^{\pm}) = 0 \text{ при } i \neq j.\end{gathered}$$

Последнее соотношение в универсальной обертывающей можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1 - a_{ij}}{k} (X_i^{\pm})^k X_j^{\pm} (X_i^{\pm})^{1 - a_{ij} - k} = 0.$$

Известно (см. [95]), что если матрица A положительно определена, то $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра. Более того, всякая полупростая конечномерная алгебра Ли может быть получена таким способом. Если же $\det A = 0$, но $\operatorname{rk} A = n - 1$, то получается аффинная алгебра Ли (собственно алгебра Каца—Муди).

Пусть $\mathfrak{h} = \langle H_1, \ldots, H_n \rangle$, $\mathfrak{b}_\pm = \langle X_1^\pm, \ldots, X_n^\pm \rangle$ — картановская и борелевские подалгебры в $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{n}_\pm = [\mathfrak{b}_\pm, \mathfrak{b}_\pm]$ — нильпотентные подалгебры. Имеет место разложение в прямую сумму векторных пространств $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, соответственно, $a = a_- + a_0 + a_+$ для элемента $a \in \mathfrak{g}$. В книге [95] доказано, что на $\mathfrak{g}$ существует (благодаря симметризуемости A) такое невырожденное инвариантное скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$, что $\langle a, b \rangle = \langle a, h \rangle = 0$ для $a, b \in \mathfrak{n}_\pm$, $h \in \mathfrak{h}$.

Стандартная тройка Манина строится следующим образом. Пусть

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{p}_1 = \{(a, a) \mid a \in \mathfrak{g}\}, \mathfrak{p}_2 = \{(a, b) \in \mathfrak{b}_+ \oplus \mathfrak{b}_- \mid a_0 + b_0 = 0\}.$$

Форма $\langle (a, b), (c, d) \rangle = \langle a, c \rangle - \langle b, d \rangle$ на $\mathfrak{p}$ невырождена и инвариантна (коммутатор в $\mathfrak{p}$ определен как $[(a, b), (c, d)] = ([a, c], [b, d])$). Получается тройка Манина, коскобка в которой такова:

$$\widetilde{\delta}(H_i, H_i) = 0, \qquad \widetilde{\delta}(X_i^\pm, X_i^\pm) = \tfrac{1}{2}(X_i^\pm, X_i^\pm) \wedge (H_i, H_i).$$

Поскольку $\mathfrak{p}_1 \cong \mathfrak{g}$, имеем *стандартную коскобку* на $\mathfrak{g}$

$$\delta_{\mathrm{st}}(H_i) = 0, \qquad \delta_{\mathrm{st}}(X_i^\pm) = \tfrac{1}{2} X_i^\pm \wedge H_i.$$

3. Кограничные биалгебры Ли и классическое уравнение Янга—Бакстера. Среди коциклов $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, \Lambda^2\mathfrak{g})$, задающих структуру группы Пуассона—Ли на G, имеются кограницы, т. е. элементы вида $\omega(g) = \partial r = \operatorname{Ad} g.r - r$, где $r \in \Lambda^2\mathfrak{g}$. В частности, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то все 1-коциклы являются кограницами.

Введем следующее фундаментальное выражение, называемое *классическим элементом Янга—Бакстера*:

$$\operatorname{yb}(r) = [r^{12}, r^{13}] + [r^{12}, r^{23}] + [r^{13}, r^{23}].$$

Употребленная здесь запись означает, что если $r = \sum r_i' \otimes r_i''$, то $r^{12} = \sum r_i' \otimes r_i'' \otimes 1$, $r^{23} = \sum 1 \otimes r_i' \otimes r_i''$, $r^{13} = \sum r_i' \otimes 1 \otimes r_i''$ суть элементы $(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, а $[r^{12}, r^{13}] = \sum [r_i', r_j'] \otimes r_i'' \otimes r_j''$ и т. д. — элементы $\mathfrak{g}^{\otimes 3}$. На самом деле $\operatorname{yb}(r) \in \Lambda^3\mathfrak{g}$.

Если $r = r^{\mu\nu} I_\mu \otimes I_\nu$, а $c_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы $\mathfrak{g}$, то

$$\operatorname{yb}(r) = (r^{\alpha j} r^{\beta k} c_{\alpha\beta}^i + r^{\alpha i} r^{\beta k} c_{\alpha\beta}^j + r^{\alpha i} r^{\beta j} c_{\alpha\beta}^k) I_i \otimes I_j \otimes I_k.$$

Отметим еще одну важную для дальнейшего интерпретацию выражения $\operatorname{yb}(r)$. Известно, что если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то на внешней алгебре $\Lambda^\bullet\mathfrak{g}$ однозначно задается структура супералгебры Ли, совпадающая

на $\mathfrak{g}$ с исходной структурой. Коммутатор на $\Lambda^\bullet\mathfrak{g}$ называется *скобкой Схоутена* и может быть определен следующей формулой:

$$[a_1 \wedge \ldots \wedge a_k, b_1 \wedge \ldots \wedge b_l] = \\ = (-1)^{(k+1)(l+1)} \sum (-1)^{i+j} [a_i, b_j] \wedge a_1 \wedge \ldots \widehat{a_i} \ldots \wedge a_k \wedge b_1 \wedge \ldots \widehat{b_j} \ldots \wedge b_l.$$

Оказывается, $\mathrm{yb}(r) = \frac{1}{2}[r, r]$.

Предложение 1.11. 1. *Если $r \in \Lambda^2\mathfrak{g}$, то скобка Пуассона, отвечающая $\omega = \partial r$, имеет вид*

$$\{\varphi, \psi\}(g) = r^{\mu\nu}(\partial'_{\mu|g}\varphi \cdot \partial'_{\nu|g}\psi - \partial_{\mu|g}\varphi \cdot \partial_{\nu|g}\psi).$$

2. *Эта скобка удовлетворяет тождеству Якоби тогда и только тогда, когда элемент $\mathrm{yb}(r)$ G-инвариантен: $\mathrm{yb}(r) \in (\Lambda^3\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.*

Доказательство. 1. Имеем

$$\{\varphi, \psi\}(g) = \omega(g)(\partial_{\mu|g}\varphi \cdot \partial_{\nu|g}\psi) = \\ = r^{\mu\nu}(I_\mu(R_g L_{g^{-1}} R_{g^{-1}}\varphi) \cdot I_\nu(R_g L_{g^{-1}} R_{g^{-1}}\psi) - I_\mu(R_{g^{-1}}\varphi) \cdot I_\nu(R_{g^{-1}}\psi)) = \\ = r^{\mu\nu}(\partial'_{\mu|g}\varphi \cdot \partial'_{\nu|g}\psi - \partial_{\mu|g}\varphi \cdot \partial_{\nu|g}\psi).$$

2. Тождество Якоби прямым вычислением сводится к равенству нулю выражения $\mathrm{Ad}\, g.\, \mathrm{yb}(r) - \mathrm{yb}(r)$ для всех g.

Следствие 1.12. *Пусть ρ: $G \to \mathrm{GL}(n)$ — представление группы G, z_i^j — его матричные элементы, $Z = (z_i^j)$. Тогда*

$$\{Z \overset{\otimes}{,} Z\} = [\rho \otimes \rho(r), Z \otimes Z].$$

(Здесь $\{Z \overset{\otimes}{,} Z\}_{kl}^{ij} = \{z_k^i, z_l^j\}$, а r рассматривается как элемент $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.)

Линеаризуя ситуацию, получаем следующее определение.

Определение 1.13. Биалгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *кограничной*, если коскобка δ имеет вид $\delta(x) = [x, r]$ для некоторого $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ такого, что $\mathrm{yb}(r) \in (\mathfrak{g}^{\otimes 3})^{\mathfrak{g}}$. Если, в частности, $\mathrm{yb}(r) = 0$ и $r \in \Lambda^2\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ называется *треугольной*, а если $\mathrm{yb}(r) = 0$ и $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, то *квазитреугольной*. (Отметим, что здесь и в дальнейшем традиционная терминология отражает «вложенность» описываемых объектов, а не разделяет их.)

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, тогда известно, что $\dim(\Lambda^3\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 1$, и в качестве образующей этого пространства можно взять элемент $\mathbf{I} = \sum c_{\lambda\mu\nu} I_\lambda \otimes I_\mu \otimes I_\nu$, где $\{I_\mu\}$ — ортонормированный относительно формы Киллинга базис в $\mathfrak{g}$, а $c_{\lambda\mu\nu}$ — структурные константы. Естественно различать два случая:

$$\mathrm{yb}(r) = 0, \qquad \text{(CYBE)}$$

$$\mathrm{yb}(r) = \alpha\mathbf{I} \text{ при } \alpha \neq 0. \qquad \text{(MCYBE)}$$

Первое из этих условий называется *классическим уравнением Янга—Бакстера*, а второе — *модифицированным классическим уравнением Янга—Бакстера*. Между этими условиями имеется простая связь:

$$\begin{pmatrix} r \in \Lambda^2\mathfrak{g} \text{ есть решение} \\ \text{(MCYBE)} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{r} = t/2 + r \text{ есть решение} \\ \text{(CYBE) и } \tilde{r}^{12} + \tilde{r}^{21} = t \end{pmatrix}$$

Здесь t есть элемент $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, отвечающий скалярному произведению в $\mathfrak{g}$. При этом $t^{12} = t^{21}$ и $\mathrm{yb}(\tilde{r} + t/2) = -1/4\mathbf{I}$.

Геометрическая природа уравнения $\mathrm{yb}(r) = 0$ поясняется следующим утверждением.

Предложение 1.14. *Для $r \in \Lambda^2\mathfrak{g}$ эквивалентны следующие условия:*

1) $\{\varphi, \psi\}(g) = r^{\mu\nu}\partial_{\mu|g}\varphi \cdot \partial_{\nu|g}\psi$ *есть скобка Пуассона;*
2) $\{\varphi, \psi\}(g) = r^{\mu\nu}\partial'_{\mu|g}\varphi \cdot \partial'_{\nu|g}\psi$ *есть скобка Пуассона;*
3) $\mathrm{yb}(r) = 0$.

Доказательство. Кососимметричность r равносильна кососимметричности скобки. Далее,

$$\{\{\varphi, \psi\}, \chi\} = r^{ij}r^{\mu\nu}(\partial_i\partial_\mu\varphi \cdot \partial_\nu\psi \cdot \partial_j\chi + \partial_\mu\varphi \cdot \partial_i\partial_\nu\psi \cdot \partial_j\chi) =$$
$$= \underset{\varphi,\psi}{\mathrm{Alt}}(r^{ij}r^{\mu\nu}\partial_i\partial_\mu\varphi \cdot \partial_\nu\psi \cdot \partial_j\chi) = \underset{\varphi,\psi}{\mathrm{Alt}}\, j(\varphi, \psi, \chi),$$

и выполнение тождества Якоби равносильно

$$0 = \underset{\varphi,\psi,\chi}{\mathrm{Cycle}}(\underset{\varphi,\psi}{\mathrm{Alt}}\, j(\varphi, \psi, \chi)) = \underset{\varphi,\psi,\chi}{\mathrm{Alt}}\, j(\varphi, \psi, \chi) =$$
$$= \underset{\varphi,\psi,\chi}{\mathrm{Cycle}}(\underset{\psi,\chi}{\mathrm{Alt}}\, j(\varphi, \psi, \chi)) = \underset{\varphi,\psi,\chi}{\mathrm{Cycle}}(r^{ij}r^{\mu\nu}[\partial_i, \partial_\mu]\varphi \cdot \partial_\nu\psi \cdot \partial_j\chi) =$$
$$= \underset{\varphi,\psi,\chi}{\mathrm{Cycle}}(r^{ij}r^{\mu\nu}c^{\lambda}_{i\mu}\partial_\lambda\varphi \cdot \partial_\nu\psi \cdot \partial_j\chi) = \mathrm{yb}(r)(\varphi \otimes \psi \otimes \chi).$$

Вернемся к примеру из предыдущего пункта. Нетрудно видеть, что описанная там биалгебра Ли является кограничной, причем

$$r = r_{\mathrm{st}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} e_\alpha \wedge e_{-\alpha}$$

(сумма берется по положительным корням).

Пример. Разберем внимательнее случай $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2)$. Пусть H, X, Y — стандартный базис. Тогда $r_{\mathrm{st}} = \frac{1}{2}X \wedge Y$, при этом

$$\mathrm{yb}(r_{\mathrm{st}}) = \frac{1}{4}H \wedge X \wedge Y.$$

Имеется еще одно решение CYBE, $r_J = H \wedge X$, для которого $\mathrm{yb}(r_J) = 0$. Можно показать, что при подходящем выборе базиса в $\mathrm{sl}(2)$ всякое решение CYBE или MCYBE совпадает соответственно с r_J или r_{st}.

Итак, описание структур группы Пуассона–Ли на заданной простой связной односвязной группе Ли G эквивалентно описанию структур биалгебры Ли на $\mathrm{Lie}\, G$, или, что то же самое, нахождению всех решений CYBE или MCYBE из $\Lambda^2\mathfrak{g}$.

4. Решения CYBE для простых алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли; мы ищем элементы $r \in \Lambda^2\mathfrak{g}$, являющиеся решениями уравнения $\mathrm{yb}(r) = 0$. Пусть $\mathfrak{a}$ есть такое наименьшее линейное подпространство $\mathfrak{g}$, что $r \in \Lambda^2\mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{a}$ оказывается подалгеброй Ли, а r как элемент $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ имеет невырожденную матрицу. Рассмотрим билинейную форму B на $\mathfrak{a}$, матрица которой обратна к матрице r.

Лемма 1.15. *Условие* $\mathrm{yb}(r) = 0$ *эквивалентно тому, что* B *есть 2-коцикл* $\mathfrak{a}$ *с коэффициентами в* k, *т. е.*

$$B([x, y], z) + B([y, z], x) + B([z, x], y) = 0.$$

Проще всего увидеть это, записав оба равенства в координатной форме.

Итак, необходимые нам элементы r находятся в биекции с парами $(\mathfrak{a}, B)$, где $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли, а B — невырожденный 2-коцикл на $\mathfrak{a}$. Рассмотрим 2-коцикл, являющийся кограницей: $B_l(x, y) = l([x, y])$ для некоторого линейного функционала $l \in \mathfrak{a}^*$. Алгебра $\mathfrak{a}$ называется *фробениусовой алгеброй Ли*, если существует такой функционал $l \in \mathfrak{a}^*$, что форма B_l невырождена. Оказывается, что все функционалы, обладающие этим свойством, переводятся друг в друга внутренним автоморфизмом $\mathfrak{a}$. Описание фробениусовых алгебр Ли является трудной задачей, которая в настоящее время далека от обозримого решения. Следующий пример, принадлежащий А. Г. Элашвили, описывает некоторые фробениусовы подалгебры Ли в $\mathrm{gl}(n)$.

Пример. Пусть $\mathfrak{a}_{n,k}$ — подалгебра $\mathrm{gl}(n)$, состоящая из матриц, последние k строк которых нулевые. Оказывается, что $\mathfrak{a}_{n,k}$ является фробениусовой алгеброй Ли тогда и только тогда, когда $k|n$. В этом случае в качестве l можно выбрать функционал

$$l(a) = \sum_{i=1}^{n-k} a_{i,\, i+k}.$$

Соответствующий элемент r имеет вид

$$r = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{(a,b,c,d) \in S} e_{i+ka,\, j+kb} \wedge e_{j+kc,\, i+kd},$$

где $m = n/k$ и

$$S = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ \ b + d - a - c = 1,$$
$$0 \leqslant b \leqslant a < m - 1,\ \ b \leqslant c < m - 1, 0 \leqslant d \leqslant m\}.$$

Чтобы получить решение CYBE для $\mathrm{sl}(n)$ из указанного, достаточно применить к нему отображение $f \otimes f$, где

$$f(a) = a - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(a)E.$$

Укажем еще несколько решений CYBE для $\mathrm{gl}(n)$, являющихся естественными обобщениями r_J из предыдущего пункта. Пусть

$$r_J^k = (e_{k,k} - e_{n+1-k,\,n+1-k}) \wedge e_{k,\,n+1-k} + 2\sum_{i=k}^{n+1-k} e_{k,i} \wedge e_{i,\,n+1-k},$$

тогда $\mathrm{yb}(r_J^k) = 0$, $[r_J^k, r_J^l] = 0$, и потому $r_J = r_J^1 + r_J^2 + \ldots$ есть решение CYBE.

5. Решения MCYBE для простых алгебр Ли. В этом случае можно дать более явное описание решений. Они зависят от дискретного и непрерывного параметров.

Пусть Γ — множество простых корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (т. е. множество вершин соответствующей диаграммы Дынкина).

Дискретный параметр — это тройка (Γ_1, Γ_2, T), где Γ_1, Γ_2 — некоторые подмножества Γ, а $T\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ — биекция. При этом должны выполняться следующие условия:

1) $(T\alpha, T\beta) = (\alpha, \beta)$ для всех $\alpha, \beta \in \Gamma$ и

2) для каждого $\alpha \in \Gamma_1$ существует такое натуральное число k, что $T^k\alpha \notin \Gamma_1$ (т. е. к каждому простому корню из Γ_1 биекция T может быть применена конечное число раз).

Непрерывный параметр — это некоторый элемент $r_0 \in \Lambda^2\mathfrak{h}$. Если дискретный параметр уже выбран, то r_0 должен быть решением системы линейных уравнений

$$(T\alpha - \alpha)r_0 = \tfrac{1}{2}(T\alpha + \alpha) \quad \text{для всех } \alpha \in \Gamma_1.$$

Подразумевается, что посредством формы Киллинга картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ отождествлена с $\mathfrak{h}^*$, а $\beta r_0 = \beta(\sum r_i' \otimes r_i'') = \sum(\beta, r_i')r_i''$. Эта система уравнений совместна и размерность пространства ее решений равна числу сочетаний $\binom{|\Gamma| - |\Gamma_1|}{2}$.

Построение решения. Пусть $\widehat{\Gamma}_i$ — множество тех положительных корней, в разложении которых на простые встречаются только элементы Γ_i. Благодаря тому, что отображение T сохраняет форму Киллинга, его можно продолжить до $T\colon \widehat{\Gamma}_1 \to \widehat{\Gamma}_2$. Скажем, что $\alpha \prec \beta$ для $\alpha \in \widehat{\Gamma}_1$ и $\beta > 0$, если найдется такое натуральное k, что $\beta = T^k\alpha$ (отметим, что если $\alpha \prec \beta$, то $\alpha \in \widehat{\Gamma}_1$, $\beta \in \widehat{\Gamma}_2$). Выберем теперь в каждом корневом пространстве $\mathfrak{g}^\alpha$ вектор e_α так, чтобы, во-первых, $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$ и, во-вторых, $Te_\alpha = e_{T\alpha}$ для $\alpha \in \widehat{\Gamma}_1$.

Оказывается, что всякое решение MCYBE подходящим автоморфизмом $\mathfrak{g}$ может быть приведено к виду

$$r = r_0 + r_{\mathrm{st}} + r_d = r_0 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} e_\alpha \wedge e_{-\alpha} + \sum_{\alpha \prec \beta} e_\beta \wedge e_{-\alpha},$$

где r_0 — непрерывный параметр.

Подробное доказательство этого утверждения читатель может найти в [2].

Пример 1. Положим $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \varnothing$. Тогда $r = r_0 + r_{\mathrm{st}}$, где $r_0 \in \Lambda^2\mathfrak{h}$ — произвольный элемент. Выбирая $r_0 = 0$, получим решение, указанное выше. Отметим, что в тавтологическом представлении для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ $r_{\mathrm{st}} = \frac{1}{2}\sum_{i<j} e_{ij} \wedge e_{ji}$. Выбор $r_0 = \sum a_{ij} H_i \wedge H_j$ отвечает решению Садбери (см. п. 2.2.7).

Пример 2. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3)$, $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$, $\Gamma_1 = \{\alpha\}$, $\Gamma_2 = \{\beta\}$, $T\alpha = \beta$. Пусть $\mathfrak{h} = \langle a, b\rangle$, $a = e_{11} - e_{22}$, $b = e_{22} - e_{33}$. Уравнение на непрерывный параметр имеет вид

$$(b - a) r_0 = \frac{1}{2}(a + b),$$

где $r_0 = \lambda(a \otimes b - b \otimes a)$. Отсюда $\lambda = -\frac{1}{6}$. Кроме того, $\alpha \prec \beta$ и $r_d = e_{23} \wedge e_{21}$. Окончательно,

$$r = -\frac{1}{6}(e_{11} - e_{22}) \wedge (e_{22} - e_{33}) + \frac{1}{2}(e_{12} \wedge e_{21} + e_{13} \wedge e_{31} + e_{23} \wedge e_{32}) + e_{23} \wedge e_{21}.$$

Этим заканчивается описание возможных структур группы Пуассона–Ли на заданной полупростой группе Ли G.

§ 3. Квантование

1. Квантования алгебры функций и биалгебры Ли. Благодаря двойственности Шварца, эти задачи эквивалентны. Если нам известно квантование копуассоновой алгебры Ли $(U\mathfrak{g}, \delta)$, т. е. алгебра Хопфа $(U\mathfrak{g}[[h]], \Delta_h)$, то мы можем описать операцию $*_h$ на $\mathcal{O}_h(G)$ $(\cong \mathcal{O}(G)[[h]]$ как векторное пространство) следующим образом. Реализуем элементы $f \in U\mathfrak{g}[[h]] \cong U_G[[h]]$ правоинвариантными дифференциальными операторами $f \mapsto \widehat{f}$ и положим для $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(G)$

$$\langle f_g, \varphi *_h \psi\rangle = \langle \Delta_h f_g, \varphi \otimes \psi\rangle$$

или

$$\widehat{f}_x(\varphi *_h \psi)(g) = (\widehat{\Delta}_h f)_{x,y}(\varphi(gx) \otimes \psi(gy))$$

(поясним, что $(\widehat{\Delta}_h f)_{x,y}$ — бидифференциальный оператор $\mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$). Тогда

$$\langle f, \varphi *_h \psi - \psi *_h \varphi\rangle = \langle \Delta_h f - \Delta_h^{\mathrm{op}} f, \varphi \otimes \psi\rangle = \\ = \langle h\delta(f), \varphi \otimes \psi\rangle + O(h^2) = \langle f, h\{\varphi, \psi\}\rangle + O(h^2),$$

и принцип соответствия выполнен.