

Оказывается, что всякое решение MCYBE подходящим автоморфизмом \mathfrak{g} может быть приведено к виду

$$r = r_0 + r_{\text{st}} + r_d = r_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} e_\alpha \wedge e_{-\alpha} + \sum_{\alpha \prec \beta} e_\beta \wedge e_{-\alpha},$$

где r_0 — непрерывный параметр.

Подробное доказательство этого утверждения читатель может найти в [2].

Пример 1. Положим $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \emptyset$. Тогда $r = r_0 + r_{\text{st}}$, где $r_0 \in \Lambda^2 \mathfrak{h}$ — произвольный элемент. Выбирая $r_0 = 0$, получим решение, указанное выше. Отметим, что в тавтологическом представлении для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ $r_{\text{st}} = \frac{1}{2} \sum_{i < j} e_{ij} \wedge e_{ji}$. Выбор $r_0 = \sum a_{ij} H_i \wedge H_j$ отвечает решению Садбери (см. п. 2.2.7).

Пример 2. Пусть $\mathfrak{g} = \text{sl}(3)$, $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$, $\Gamma_1 = \{\alpha\}$, $\Gamma_2 = \{\beta\}$, $T\alpha = \beta$. Пусть $\mathfrak{h} = \langle a, b \rangle$, $a = e_{11} - e_{22}$, $b = e_{22} - e_{33}$. Уравнение на непрерывный параметр имеет вид

$$(b - a)r_0 = \frac{1}{2}(a + b),$$

где $r_0 = \lambda(a \otimes b - b \otimes a)$. Отсюда $\lambda = -\frac{1}{6}$. Кроме того, $\alpha \prec \beta$ и $r_d = e_{23} \wedge e_{21}$. Окончательно,

$$r = -\frac{1}{6}(e_{11} - e_{22}) \wedge (e_{22} - e_{33}) + \frac{1}{2}(e_{12} \wedge e_{21} + e_{13} \wedge e_{31} + e_{23} \wedge e_{32}) + e_{23} \wedge e_{21}.$$

Этим заканчивается описание возможных структур группы Пуассона-Ли на заданной полупростой группе Ли G .

§ 3. Квантование

1. Квантования алгебры функций и биалгебры Ли. Благодаря двойственности Шварца, эти задачи эквивалентны. Если нам известно квантование копуассоновой алгебры Ли $(U\mathfrak{g}, \delta)$, т. е. алгебра Хопфа $(U\mathfrak{g}[[h]], \Delta_h)$, то мы можем описать операцию $*_h$ на $\mathcal{O}_h(G)$ ($\cong \mathcal{O}(G)[[h]]$ как векторное пространство) следующим образом. Реализуем элементы $f \in U\mathfrak{g}[[h]] \cong U_G[[h]]$ правоинвариантными дифференциальными операторами $f \mapsto \widehat{f}$ и положим для $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(G)$

$$\langle f_g, \varphi *_h \psi \rangle = \langle \Delta_h f_g, \varphi \otimes \psi \rangle$$

или

$$\widehat{f}_x(\varphi *_h \psi)(g) = (\widehat{\Delta}_h f)_{x,y}(\varphi(gx) \otimes \psi(gy))$$

(поясним, что $(\widehat{\Delta}_h f)_{x,y}$ — бидифференциальный оператор $\mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G) \rightarrow \mathcal{O}(G)$). Тогда

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi *_h \psi - \psi *_h \varphi \rangle &= \langle \Delta_h f - \Delta_h^{\text{op}} f, \varphi \otimes \psi \rangle = \\ &= \langle h\delta(f), \varphi \otimes \psi \rangle + O(h^2) = \langle f, h\{\varphi, \psi\} \rangle + O(h^2), \end{aligned}$$

и принцип соответствия выполнен.

Определение 1.16. $k[[\hbar]]$ -алгебра Хопфа H называется *QUE-алгеброй* (от quantum universal envelopping) с классическим пределом \mathfrak{g} , если H — топологически свободный $k[[\hbar]]$ -модуль и $H/\hbar H \cong U\mathfrak{g}$.

2. Формальное квантование биалгебр Ли по Н. Ю. Решетинину. Пусть \mathfrak{g} — биалгебра Ли над \mathbb{C} с базисом x_i и структурными константами c_{ij}^k, f_k^{ij} . Предварительно опишем ряд вспомогательных объектов.

А. «Квазиобертывающая алгебра». Положим $S^\varepsilon \mathfrak{g} = T\mathfrak{g}/(x \otimes y - y \otimes x - \varepsilon[x, y])$. Очевидно, что алгебра $S^\varepsilon \mathfrak{g}/\varepsilon S^\varepsilon \mathfrak{g}$ изоморфна симметрической алгебре $\text{Sym}^n \mathfrak{g}$. Определим структуру биалгебры на $S^\varepsilon \mathfrak{g}$, положив $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ для $x \in \mathfrak{g}$ и продолжив ее далее по мультиплекативности; очевидным образом определяется антипод. Кроме того, $S^\varepsilon \mathfrak{g}$ превращается в копуассонову алгебру Хопфа: эта структура на \mathfrak{g} уже определена, а далее $\delta(xy) = \delta(x)\Delta y + \Delta x\delta(y)$, где $x, y \in \mathfrak{g}$.

Б. Функция Кэмбелла–Хаусдорфа — это лиевский формальный ряд

$$H(x, y|\mathfrak{g}) = \frac{1}{\hbar} \log(e^{\hbar x} e^{\hbar y}), \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Вот несколько его первых членов:

$$\begin{aligned} H(x, y|\mathfrak{g}) &= x + y - \frac{\hbar}{2}[x, y] + \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{12}([x, [x, y]] + [y, [y, x]]) - \frac{\hbar^3}{24}[x, [y, [x, y]]] + O(\hbar^4). \end{aligned}$$

В общем виде

$$H(x, y|\mathfrak{g}) = x + y + \sum_{m, n \geq 1} h^{n+m-1} H^{n, m}(\mathfrak{g})(x^{(n)} \otimes y^{(m)}),$$

где $H^{n, m}(\mathfrak{g})$ есть линейное отображение $\text{Sym}^n \mathfrak{g} \otimes \text{Sym}^m \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, зависящее только от структурных констант алгебры \mathfrak{g} , а $x^{(n)} = x^{\otimes n}$.

С. Пуассонова алгебра полиномиальных функций на G . Рассмотрим алгебру локальных полиномиальных функций на $\mathfrak{g} = \text{Sym } \mathfrak{g}^*$ и алгебру $P_h \mathfrak{g} = \text{Sym } \mathfrak{g}^* \hat{\otimes} \mathbb{C}[[\hbar]]$. Вводя коумножение на $P_h \mathfrak{g}$ по правилу $\Delta l(x, y) = l(H(x, y|\mathfrak{g}))$ ($l \in \mathfrak{g}^*$), получим пару $(P_h \mathfrak{g}, S^h \mathfrak{g})$ двойственных друг другу алгебр Хопфа. Поскольку $S^h \mathfrak{g}$ — копуассонова алгебра Хопфа, то $P_h \mathfrak{g}$ — пуассонова: $\langle \{a, b\}, x \rangle = \langle a \otimes b, \delta(x) \rangle$, $a, b \in \mathfrak{g}^*$, $x \in \mathfrak{g}$. Вот несколько первых членов ряда по \hbar , описывающего скобку Пуассона:

$$\{a, b\}(x) = c_{ij}^k \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial x_j} x_k - \frac{\hbar^2}{12} f_i^{lm} f_j^{pq} c_{ip}^r x_m x_q x_r \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial x_j} + O(\hbar^4).$$

Теорема 1.17. Для биалгебры Ли \mathfrak{g} существует такая единственная алгебра Хопфа $S_h^\varepsilon \mathfrak{g}$, что

- 1) $S_h^\varepsilon \mathfrak{g} \cong \text{Sym } \mathfrak{g} \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[h, \varepsilon]]$ как линейное пространство;
- 2) $S_h^\varepsilon \mathfrak{g} \cong P_h \mathfrak{g}^* \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[\varepsilon]]$ как коалгебра;
- 3) алгебры $S_h^\varepsilon \mathfrak{g}$ и $S_\varepsilon^h \mathfrak{g}^*$ двойственны друг другу как алгебры Хопфа.

Явная формула для коумножения в $S_h^\varepsilon \mathfrak{g}$ следующая:

$$\begin{aligned} \Delta x_i = & x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i + \sum_{m, n \geq 1} h^{m+n-1} \sum_{K, L} H_i^{(n, m)K, L}(\mathfrak{g}^*) x_{k_1}, \dots, x_{k_n} \otimes x_{l_1}, \dots, x_{l_m} = \\ & = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i + \frac{h}{2} f_i^{jk} x_j \otimes x_k + O(h^2). \end{aligned}$$

Здесь $\{x_{k_1}, \dots, x_{k_n}\} = \text{Sym}(x_{k_1} \otimes \dots \otimes x_{k_n}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{i_{\sigma 1}} \otimes \dots \otimes x_{i_{\sigma n}}$. Аналогично, в $S_\varepsilon^h \mathfrak{g}$

$$\Delta x^j = x^j \otimes 1 + 1 \otimes x^j + \sum_{m, n \geq 1} \varepsilon^{m+n-1} \sum_{K, L} H_{K, L}^{(n, m)j}(\mathfrak{g}) x^{k_1}, \dots, x^{k_n} \otimes x^{l_1}, \dots, x^{l_m}.$$

Отсюда вытекает

Следствие 1.18. 1. $S_h^\varepsilon \mathfrak{g} \cong S^\varepsilon \mathfrak{g} \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[h]]$ как алгебра.
2. Коммутационные соотношения в $S_h^\varepsilon \mathfrak{g}$ имеют вид

$$x_i x_j - x_j x_i = \varepsilon c_{ij}^k(\varepsilon h) x_k + \sum_{n \geq 1} h^{2n} \sum_{m \geq 0} \varepsilon^{2m+1} c_{ij}^{(n, m)K} x_{k_1}, \dots, x_{k_{2n-2m+1}},$$

где $c_{ij}^{(n, m)}$ — некоторая комбинация из $2n$ тензоров f и $2m+1$ тензора c .

Перепишем указанные соотношения в слегка измененном виде:

$$x_i x_j - x_j x_i = \varepsilon c_{ij}^k(\varepsilon h) x_k + \sum_{n \geq 1} \varepsilon h^{2n} \sum_K c_{ij}^K(\varepsilon h) x_{k_1}, \dots, x_{k_{2n+1}},$$

где $c_{ij}^K(\varepsilon h) \in \mathbb{C}[[\varepsilon h]^2]$ и $c_{ij}^k(\varepsilon h) \equiv c_{ij}^k \pmod{(\varepsilon h)^2}$. Это означает, что в определяющие соотношения $S_h^\varepsilon \mathfrak{g}$ переменная ε входит полиномиально, а не в виде бесконечного формального ряда. К тому же, в определении коумножения ε не участвует. Итак, алгебра Хопфа $S_h^\varepsilon \mathfrak{g}$ допускает $\mathbb{C}[\varepsilon] \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[h]]$ -форму, т. е. существует такая $\mathbb{C}[\varepsilon] \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[h]]$ -алгебра $U_{\varepsilon, h} \mathfrak{g}$, что $U_{\varepsilon, h} \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}[\varepsilon] \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[h]]} \mathbb{C}[[\varepsilon, h]] \cong S_h^\varepsilon \mathfrak{g}$. Поэтому корректно определена специализация $\varepsilon \mapsto 1$, и $U_h \mathfrak{g} := U_{\varepsilon, h} \mathfrak{g} / (\varepsilon - 1)$.

Теорема 1.19. Алгебра Хопфа $U_h \mathfrak{g}$ является искомым квантованием биалгебры Ли (\mathfrak{g}, δ) .

Действительно, $U_h \mathfrak{g} \cong U \mathfrak{g}[[h]]$ как векторное пространство и

$$\Delta x_i - \Delta^{\text{оп}} x_i = \frac{h}{2} (f_i^{jk} x_j \otimes x_k - f_i^{jk} x_k \otimes x_j) + O(h^2).$$

Отметим, что специализация ε в другие ненулевые элементы \mathbb{C} приводит к изоморфным алгебрам.

Итак, всякая биалгебра Ли допускает квантование. Представляет отдельный интерес квантование кограницной биалгебры Ли.

3. Квантование треугольных алгебр Ли. Цель этого пункта — описать $*$ -умножение на $\mathcal{O}_h(G)$ в терминах некоторого бидифференциального оператора. Возникновение последнего вполне естественно: в выражении

$$\varphi *_h \psi = \varphi \psi + \sum_i h^i \mathcal{F}_i(\varphi, \psi)$$

коэффициент $\mathcal{F}_i(\varphi, \psi)$ зависит от производных функций φ и ψ .

Напомним, что треугольность (\mathfrak{g}, δ) означает, что $\delta = \partial_r$, $r \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$ и $y\delta(r) = 0$. В этом случае отображение $\{\varphi, \psi\}(g) = r^{\mu\nu} \partial_{\mu|g} \varphi \cdot \partial_{\nu|g} \psi$ является скобкой Пуассона. Рассмотрим бидифференциальный оператор

$$\begin{aligned}\widehat{F} &= \sum a_{\alpha\beta}(h) \partial_g^\alpha \otimes \partial_g^\beta = 1 + \sum h^i \widehat{F}_i; \\ \widehat{F} &\colon \mathcal{O}_h(G) \otimes \mathcal{O}_h(G) \rightarrow \mathcal{O}_h(G) \otimes \mathcal{O}_h(G),\end{aligned}$$

где $\partial_g^\alpha = \partial_{1|g}^{\alpha_1} \dots \partial_{n|g}^{\alpha_n}$, а $\partial_{\mu|g}$ — правоинвариантное векторное поле, и вспомогательную операцию $\varphi \square \psi = m \circ \widehat{F}(\varphi \otimes \psi)$. Условие согласованности

$$h^{-1}(\varphi \square \psi - \psi \square \varphi) \bmod h = \{\varphi \bmod h, \psi \bmod h\}$$

означает, что $m(\widehat{F}_1^{12} - \widehat{F}_1^{21}) = \widehat{r}$. Переайдем теперь от дифференциальных операторов \widehat{F} , \widehat{r} к элементам F , r из $(U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$. Обозначим через Δ обычное коумножение в $U\mathfrak{g}$.

Лемма 1.20. Операция \square ассоциативна тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(\Delta_0 \otimes 1)F \cdot F^{12} = (1 \otimes \Delta_0)F \cdot F^{23}. \quad (1)$$

Доказательство. Имеем $(\varphi \square \psi) \square \chi = m \circ \widehat{F}(m \circ \widehat{F}(\varphi \otimes \psi) \otimes \chi)$. Но

$$\begin{aligned}\langle (\Delta_0 \otimes 1)F \cdot F^{12}, \varphi \otimes \psi \otimes \chi \rangle &= \\ &= \widehat{F}_x \circ m \otimes 1 \circ F_y^{12}(\varphi(xy) \otimes \psi(xy) \otimes \chi(xy)) = \\ &= \widehat{F}_x(m \circ \widehat{F}(\varphi \otimes \psi)(x) \otimes \chi(x)) = \widehat{F}_x(\varphi \square \psi)(x) \otimes \chi(x).\end{aligned}$$

Аналогично, $\langle (1 \otimes \Delta_0)F \cdot F^{23}, \varphi \otimes \psi \otimes \chi \rangle = \widehat{F}_x(\varphi(x) \otimes (\psi \square \chi)(x))$.

Теорема 1.21. Для заданного $r \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$, $yb(r) = 0$ существует элемент $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$, удовлетворяющий соотношению (1) и такой, что $F = 1 - \frac{h}{2}r + O(h^2)$.

Доказательство этой теоремы через явное построение элемента F , опирающееся на общую конструкцию Лихнеровича, дано В. Г. Дринфельдом в [17].

Введем теперь на $U\mathfrak{g}[[h]]$ новое коумножение по формуле $\Delta_h(x) = F^{-1}\Delta_0(x)F$.

Лемма 1.22. $(U\mathfrak{g}[[h]], \Delta_h)$ — алгебра Хопфа.

Доказательство состоит в прямой проверке аксиом. Например, коассоциативность Δ_h следует из равенства (1).

Замечание. Пользуясь результатами пп. 1.5.2 и 2.1.2Д (теория Таннаки–Крейна), можно показать, что каждая треугольная QUE-алгебра с классическим пределом \mathfrak{g} изоморфна как алгебра $U\mathfrak{g}[[h]]$ с коумножением $\Delta_h(x) = F^{-1}\Delta_0(x)F$, где $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$, а Δ — коумножение в $U\mathfrak{g}$.

Вычислим теперь операцию $*_h$ на $\mathcal{O}_h(G)$:

$$\begin{aligned} \langle f_g, \varphi *_h \psi \rangle &= \langle \Delta_h f_g, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle F^{-1} \cdot \Delta_0(f_g) \cdot F, \varphi \otimes \psi \rangle = \\ &= \left\langle f_g, m \circ \widehat{F}_x^{-1} \circ \widehat{F}_y(R_{y^{-1}} L_{x^{-1}} \varphi \otimes R_{y^{-1}} L_{x^{-1}} \psi) \right\rangle. \end{aligned}$$

Иными словами, если для элемента $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$, обладающего нужными свойствами, построить его реализации \widehat{F}_r и \widehat{F}_l право- и левоинвариантными операторами соответственно, то

$$\varphi *_h \psi = m \circ \widehat{F}_l^{-1} \circ \widehat{F}_r(\varphi \otimes \psi).$$

В частности, бидифференциальный оператор \mathcal{F} , о котором шла речь в начале, есть $\widehat{F}_l^{-1} \circ \widehat{F}_r = \widehat{F}_r \circ \widehat{F}_l^{-1}$. Классический предел коммутатора относительно $*_h$, очевидно, есть

$$h^{-1}(\varphi *_h \psi - \psi *_h \varphi) + O(h) = r^{\mu\nu}(\partial'_{\mu|g} \varphi \cdot \partial'_{\nu|g} \psi - \partial_{\mu|g} \varphi \cdot \partial_{\nu|g} \psi) + O(h).$$

4. Квантовое уравнение Янга–Бакстера. Если сравнить Δ_h и Δ_h^{op} , то получим, что они сопряжены друг другу:

$$\Delta_h^{\text{op}}(x) = R \Delta_h(x) R^{-1},$$

где $R = (F^{21})^{-1} F^{12}$. Элемент R играет фундаментальную роль в КМОЗ.

Пусть $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ — представление G , z_j^i — его матричные элементы, $Z_\rho = (z_j^i)$. Обозначим $F_\rho = \rho \otimes \rho(F)$, $R_\rho = \rho \otimes \rho(R)$. Тогда из определений Δ_h , $*_h$ и R вытекает, что

$$\begin{aligned} Z_\rho^1 *_h Z_\rho^2 &= F_\rho^{-1}(Z_\rho \otimes Z_\rho)F_\rho, \\ Z_\rho^2 *_h Z_\rho^1 &= (F_\rho^{21})^{-1}(Z_\rho \otimes Z_\rho)F_\rho^{21}, \\ R_\rho Z_\rho^1 *_h Z_\rho^2 &= Z_\rho^2 *_h Z_\rho^1 R_\rho, \end{aligned}$$

где $(Z_\rho^1 *_h Z_\rho^2)_{ij}^{kl} = z_i^k *_h z_j^l$, $(Z_\rho^2 *_h Z_\rho^1)_{ij}^{kl} = z_j^l *_h z_i^k$, $(Z_\rho \otimes Z_\rho)_{ij}^{kl} = z_i^k z_j^l$. Это означает, что квантование алгебры функций на G фактически описывается элементом R , называемым по этой причине *универсальной R-матрицей*.

Полезно собрать сведения об R в «абстрактной ситуации».

Предложение 1.23. Пусть U — алгебра Хопфа с коумножением Δ_0 , $F \in (U \otimes U)[[h]]$ — обратимый элемент, удовлетворяющий соотношению (1). Положим $\Delta(x) = F^{-1} \Delta_0(x) F$. Тогда

1) $U[[h]]$ — алгебра Хопфа относительно коумножения Δ ;

2) элемент $R = (F^{21})^{-1} F^{12}$ удовлетворяет соотношениям

$$\Delta^{\text{op}}(x) = R \Delta(x) R^{-1}, \quad (2)$$

$$R^{12} R^{21} = 1, \quad (3)$$

$$(\Delta \otimes 1)R = R^{13} R^{23}, \quad (1 \otimes \Delta)R = R^{12} R^{13}; \quad (4)$$

3) R удовлетворяет квантовому уравнению Янга–Бакстера

$$R^{12} R^{13} R^{23} = R^{23} R^{13} R^{12}. \quad (\text{QYBE})$$

Заметим, что (QYBE) является формальным следствием равенств (2) и (4). Действительно, из $(\Delta \otimes 1)R = R^{13} R^{23}$ следует, что $(\Delta^{\text{op}} \otimes 1)R = R^{23} R^{13}$, но по (2)

$$(\Delta^{\text{op}} \otimes 1)R = R^{12}((\Delta \otimes 1)R)(R^{-1})^{12} = R^{12} R^{13} R^{23} (R^{12})^{-1}.$$

Обозначим разность левой и правой частей (QYBE) через $\text{YB}(R)$. Если $R \in (U \otimes U)[[h]]$ — обратимый элемент и $R = 1 + hr + O(h^2)$, то $\text{YB}(R) = 0$ влечет $\text{yb}(r) = 0$, а из условия унитарности (3) вытекает $r^{12} + r^{21} = 0$.

Отметим теперь, что в случае квазитреугольной биалгебры Ли изложенные рассуждения нуждаются в модификации (см., напр., [136]). Рецепт формального квантования из п. 1.3.2 для квазитреугольных алгебр лишь гипотетически приводит к универсальной R -матрице.

5. Квантование алгебр Каца–Муди. Здесь мы укажем явные формулы для квантования алгебры Каца–Муди с симметризируемой матрицей Картана A , структура биалгебры Ли на которой задается стандартным выбором тройки Манина, или, что то же самое, стандартным решением (MCYBE). Пусть $d_i a_{ij} = d_j a_{ij}$, $q = e^{h/2}$.

Образующие алгебры $U_h g(A)$ (используется также обозначение $U_q g(A)$) те же, что и у $U g(A)$: $H_i, X_i^\pm, i = 1, \dots, n$.

Соотношения (мультипликативная структура):

$$[H_i, H_j] = 0,$$

$$[H_i, X_j^\pm] = \pm a_{ij} X_j^\pm,$$

$$[X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij} \frac{e^{hd_i H_i/2} - e^{-hd_i H_i/2}}{e^{hd_i/2} - e^{-hd_i/2}} = \delta_{ij} \frac{q^{d_i H_i} - q^{-d_i H_i}}{q^{d_i} - q^{-d_i}},$$

квантовые соотношения Серра:

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \left\{ \begin{matrix} 1-a_{ij} \\ k \end{matrix} \right\}_{q^{d_i}} (X_i^\pm)^k X_j^\pm (X_i^\pm)^{1-a_{ij}-k} = 0, \quad i \neq j.$$

Здесь $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_q = \frac{\{n\}_q!}{\{k\}_q! \{n-k\}_q!}$, $\{n\}_q! = \{1\}_q \dots \{n\}_q$, $\{s\}_q = \frac{q^s - q^{-s}}{q - q^{-1}}$.

Коумножение: $\Delta H_i = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i$,

$$\Delta X_i^\pm = X_i^\pm \otimes q^{d_i H_i/2} + q^{-d_i H_i/2} \otimes X_i^\pm.$$

Коединица: $\varepsilon(H_i) = 0$, $\varepsilon(X_i^\pm) = 0$.

Антисимметрия: $S(H_i) = -H_i$,

$$S(X_i^\pm) = -q^{d_i H_i/2} X_i^\pm q^{-d_i H_i/2} = -q^{\pm d_i a_{ii}/2} X_i^\pm.$$

Обсудим эти формулы. Во-первых, непосредственным вычислением нетрудно проверить, что указанная структура алгебры Хопфа корректно определена. Во-вторых, хорошо видно появление формальных рядов по h (подчеркнем, что $q = e^{h/2}$ и, например, $q^H = 1 + \frac{hH}{2} + \frac{h^2 H^2}{4 \cdot 2!} + \dots$); тем самым, применяя к элементу \mathfrak{g} коумножение, мы выходим за пределы \mathfrak{g} (чего не происходило в классическом случае). В-третьих, рассматривая коумножение, нетрудно убедиться в том, что получилось квантование $(U_q \mathfrak{g}(A), \delta_{st})$. В-четвертых, не слишком явно, но заметно, что умножение «почти не изменилось», в то время как коумножение существенно деформировалось (точный смысл этого замечания будет прояснен в § 5 гл. 2).

Для формальных удобств зачастую выбирают другую систему образующих алгебры $U_q \mathfrak{g}(A)$: X_i^\pm и $K_i^{\pm 1}$ ($= q^{d_i H_i/2}$). В терминах этих образующих описание $U_q \mathfrak{g}(A)$ таково.

Соотношения:

$$\begin{aligned} K_i K_j &= K_j K_i, & K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1, \\ K_i X_j^\pm K_i^{-1} &= q^{\pm d_i a_{ij}} X_j^\pm, \\ [X_i^+, X_j^-] &= \delta_{ij} \frac{K_i^2 - K_i^{-2}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}, \end{aligned}$$

соотношения Серра не изменяются.

Коумножение: $\Delta K_i^{\pm 1} = K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1}$, $\Delta X_i^\pm = X_i^\pm \otimes K_i + K_i^{-1} \otimes X_i^\pm$.

Коединица: $\varepsilon(K_i^\pm) = 1$, $\varepsilon(X_i^\pm) = 0$.

Антисимметрия: $S(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\mp 1}$, $S(X_i^\pm) = -K_i X_i^\pm K_i^{-1}$.

Пример (принадлежащий П. П. Кулишу, Н. Ю. Решетихину и Е. К. Скланину и положивший начало изучению квантовых групп) — квантование $\text{sl}(2)$. В терминах стандартных образующих H , X , Y

структуря биалгебры Ли задается элементом $r = \frac{1}{2}X \wedge Y$. В $U_q \text{sl}(2)$ имеем

$$\begin{aligned} [H, X] &= 2X, & [H, Y] &= -2Y, & [X, Y] &= (q^H - q^{-H})/(q - q^{-1}); \\ \Delta X &= X \otimes q^{H/2} + q^{-H/2} \otimes X, & \Delta Y &= Y \otimes q^{H/2} + q^{-H/2} \otimes Y, \\ \Delta H &= H \otimes 1 + 1 \otimes H; \\ \varepsilon(X) &= \varepsilon(Y) = \varepsilon(H) = 0; \\ S(X) &= -q^2 X, & S(Y) &= -q^{-2} Y, & S(H) &= -H. \end{aligned}$$

Бывает удобно вместо определенного только что квантования U_g рассматривать изоморфную ему алгебру, также обозначаемую $U_q \mathfrak{g}(A)$, с образующими E_i, F_i и K_i^\pm , $i = 1, \dots, n$ (образующие Люстига). Описание же $U_q \mathfrak{g}(A)$ в этих образующих таково.

Соотношения:

$$\begin{aligned} K_i K_j &= K_j K_i, & K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1, \\ K_i E_j K_i^{-1} &= q^{d_i a_{ij}} E_j, \\ K_i F_j K_i^{-1} &= q^{-d_i a_{ij}} F_j, \\ [E_i, F_j] &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}, \end{aligned}$$

соотношения Серра получаются из вышеприведенных заменой X_i^\pm на E_i и F_i .

Коумножение:

$$\begin{aligned} \Delta K_i^\pm &= K_i^\pm \otimes K_i^\pm, & \Delta E_i &= E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \\ \Delta F_i &= F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i. \end{aligned}$$

Коединица: $\varepsilon(K_i^\pm) = 1$, $\varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0$.

Антитоп: $S(K_i^\pm) = K_i^\mp$, $S(E_i) = -K_i^{-1} E_i$, $S(F_i) = -F_i K_i$.

Почему эта алгебра изоморфна определенной выше, объясняется в п.1.4.4.

Подчеркнем, что разница в обозначениях $U_h \mathfrak{g}$ и $U_q \mathfrak{g}$ должна напоминать следующую тонкость. Алгебра $U_h \mathfrak{g}$ есть $k[[h]]$ -алгебра, причем формальный параметр h может быть специализирован только в нуль. В то же время в $U_q \mathfrak{g}$ параметр q допускает специализацию в любые ненулевые элементы поля k , кроме тех, для которых $q^{2d_i} = 1$ для какого-нибудь i .

Относительно единственности предложенного квантования верно следующее утверждение.

Теорема 1.24. $U_h \mathfrak{g}$ есть единственное (с точностью до замен $h \mapsto h + O(h)$) квантование A биалгебры Ли $(\mathfrak{g}, \delta_{\text{st}})$, для которого существуют такие кокоммутативная подалгебра Хопфа $C \subset A$ и отображение $\vartheta: A \rightarrow A$, что

- 1) отображение $C/hC \rightarrow U\mathfrak{g}$ инъективно и его образ есть $U\mathfrak{h}$;
 2) $\vartheta^2 = \text{id}$, $\vartheta(C) = C$, ϑ — автоморфизм A как алгебры и антавтоморфизм как коалгебры, причем $\vartheta \bmod h$ — инволюция Картана.

(В случае $A = U_h\mathfrak{g}$ имеем $C = U\mathfrak{h}[[h]]$, $\vartheta(X_i^\pm) = -X_i^\mp$, $\vartheta|_C = -\text{id}$.)

6. Действие квантовой группы Вейля.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$. Рассмотрим группу $W_q = W_q(A)$, порожденную образующими T_1, \dots, T_n ($n = \text{rk } \mathfrak{g}$), которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} T_i T_j &= T_j T_i \quad \text{при } a_{ij} a_{ji} = 0, \\ T_i T_j T_i &= T_j T_i T_j \quad \text{при } a_{ij} a_{ji} = 1, \\ (T_i T_j)^{a_{ij} a_{ji}} &= (T_j T_i)^{a_{ij} a_{ji}} \quad \text{при } a_{ij} a_{ji} > 1. \end{aligned}$$

Эта группа называется *квантовой группой Вейля*. Отметим, что факторизация этой группы по дополнительным соотношениям $T_i^2 = e$, $i = 1, \dots, n$, приводит к обычной группе Вейля $W = W(A)$, ассоциированной с алгеброй Ли \mathfrak{g} . Образы образующих T_i в группе W мы будем обозначать через s_i . Напомним, что на инвариантном языке группа Вейля определяется как группа, порожденная отражениями относительно простых корней алгебры Ли \mathfrak{g} . Таким образом, группа W действует на решетке $\Lambda = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{\mathbb{Z}}$, порожденной простыми корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Оказывается, квантовая группа Вейля W_q действует на квантовой универсальной обертывающей $U_q\mathfrak{g}$.

Следующее определение обобщает определение присоединенных действий $\text{ad}_r x(y) = [x, y]$, $\text{ad}_l x(y) = [y, x]$ в алгебре Ли \mathfrak{g} . Пусть U — алгебра Хопфа и $\Delta x = \sum x'_i \otimes x''_i$. Положим

$$\begin{aligned} \text{ad}_r x(y) &= \sum x'_i y S(x''_i), \\ \text{ad}_l x(y) &= \sum S(x'_i) y x''_i, \end{aligned}$$

где S — антипод в U .

Пусть теперь $U_q\mathfrak{g}$ есть квантование \mathfrak{g} ; K_i , F_i , E_i — образующие Люстинга. Для $\lambda = m_1 \alpha_1 + \dots + m_n \alpha_n \in \Lambda$, $m_i \in \mathbb{Z}$, положим $K_\lambda = K_1^{m_1} \dots K_n^{m_n}$. Можно проверить, что нижеследующие формулы определяют действие группы W_q на $U_q\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} T_i K_\lambda &= K_{s_i \lambda}, \\ T_i E_i &= -F_i K_i, \\ T_i F_i &= -K_i^{-1} E_i, \\ T_i E_j &= -(\text{ad}_l E_i)^{-a_{ij}} E_j, \quad i \neq j, \\ T_i F_j &= -(\text{ad}_r F_i)^{-a_{ij}} F_j, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

7. Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта. Выберем приведенное разложение элемента максимальной длины w_0 из группы Вейля

W : $w_0 = s_{i_1} \dots s_{i_N}$. Положим $\beta_t = s_{i_1} \dots s_{i_{t-1}} (\alpha_{i_t})$. Таким образом, мы получаем упорядочение множества положительных корней $\{\beta_1 \dots \beta_N\}$ алгебры Ли \mathfrak{g} . Пусть теперь

$$\begin{aligned} E_{\beta_t} &= T_{i_1} \dots T_{i_{t-1}} (E_{i_t}), \\ F_{\beta_t} &= T_{i_1} \dots T_{i_{t-1}} (F_{i_t}). \end{aligned}$$

Проверяется, что полученные элементы алгебры $U_q \mathfrak{g}$ не зависят от выборы приведенного разложения элемента w_0 .

Теорема 1.25. 1. Мономы $E^l = E_{\beta_1}^{k_1} \dots E_{\beta_N}^{k_N}$ с $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (соответственно, $F^k = F_{\beta_N}^{k_N} \dots F_{\beta_1}^{k_1}$ с $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) образуют базис векторного пространства $U_q \mathfrak{n}_+$ (соответственно, $U_q \mathfrak{n}_-$).

2. Мономы $E^l K_\lambda F^k$ с $l, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ и $\lambda \in \Lambda$ образуют базис векторного пространства $U_q \mathfrak{g}$.

3. Имеет место изоморфизм векторных пространств $U_q \mathfrak{g} \cong U_q \mathfrak{n}_+ \otimes U_q \mathfrak{h} \otimes U_q \mathfrak{n}_-$.

8. Вещественные формы $U_q \mathfrak{g}$. Будем считать, что основное поле есть \mathbb{C} , а q — некоторое комплексное число.

Определение 1.26. Вещественной формой алгебры Хопфа $U_q \mathfrak{g}$ называется такое отображение $\varphi: U_q \mathfrak{g} \rightarrow U_q \mathfrak{g}$, что

- 1) φ есть полулинейная антиинволюция алгебры $U_q \mathfrak{g}$;
- 2) φ есть гомоморфизм коалгебр;
- 3) $\varepsilon(\varphi(x)) = \overline{\varepsilon(x)}$ для всех $x \in U_q \mathfrak{g}$;
- 4) $(\varphi \circ S)^2 = \text{id}$.

Две вещественные формы φ_1 и φ_2 называются эквивалентными, если существует такой автоморфизм ρ алгебры $U_q \mathfrak{g}$, что $\rho \varphi_1 = \varphi_2 \rho$.

Следуя [138], мы дадим описание вещественных форм алгебры $U_q \mathfrak{g}(A)$. Пусть $D = D(A)$ — диаграмма Дынкина алгебры $\mathfrak{g}(A)$, $\text{Aut } D$ — группа ее автоморфизмов.

Легко видеть, что вещественная форма может существовать только в следующих трех случаях: 1) $|q| = 1$; 2) $q \in \mathbb{R}$ и 3) $q \in i\mathbb{R}$, причем в последнем случае — лишь когда $d_i a_{ij} \in 2\mathbb{Z}$ для всех i, j . Нам будет удобно воспользоваться образующими Люстига. Нижеследующий результат получается прямым вычислением из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта.

Теорема 1.27. Всякую вещественную форму $U_q \mathfrak{g}(A)$ можно привести к одному из следующих стандартных видов (σ есть некоторый элемент $\text{Aut } D$).

1. Если $|q| = 1$, то

$$\varphi(K_i) = K_{\sigma(i)}, \quad \varphi(E_i) = -E_{\sigma(i)}, \quad \varphi(F_i) = -F_{\sigma(i)},$$

причем если q не есть корень из единицы, то $\sigma^2 = \text{id}$, а если q есть примитивный корень из единицы степени l , то $d_{\sigma i} = d_i$ и $l|d_i(a_{ij} - a_{\sigma i, \sigma j})$ для всех i, j .

2. Если $q \in \mathbb{R}$, то

$$\varphi(K_i) = K_{\sigma i}, \quad \varphi(E_i) = -s_i F_{\sigma i} K_{\sigma i}, \quad \varphi(F_i) = -s_i K_{\sigma i}^{-1} F_{\sigma i},$$

где $\sigma^2 = \text{id}$, $s_i = 1$ для $\sigma i \neq i$ и $s_i = \pm 1$ для $\sigma i = i$.

3. Если $q \in i\mathbb{R}$, то

$$\varphi(K_i) = K_{\sigma i}, \quad \varphi(E_i) = -s_i F_{\sigma i} K_{\sigma i}, \quad \varphi(F_i) = (-1)^{d_i} s_i K_{\sigma i}^{-1} F_{\sigma i},$$

где $\sigma^2 = \text{id}$, $s_i = 1$ для $\sigma i \neq i$ и $s_i = \pm 1$ для $\sigma i = i$ при четном d_i , а при d_i нечетном $s_i = \pm i$ для $\sigma i = i$.

Отметим, что некоторые стандартные формы случаев 2 и 3 могут быть эквивалентны между собой. Легко установить, что при $d_i a_{ij} \in 2\mathbb{Z}$ вещественные формы с $q \in \mathbb{R}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с вещественными формами с $q \in i\mathbb{R}$, поэтому достаточно рассматривать только случаи 1 и 2.

Чтобы описать полное множество попарно неэквивалентных вещественных форм Φ_g алгебры $U_q g$, рассмотрим множество \mathcal{R}_g всех вещественных форм алгебры g и множество всех ее борелевских подалгебр B_g . Пусть $\mathfrak{g}_0 \in \mathcal{R}_g$ и $\Omega_{\mathfrak{g}_0}$ есть множество орбит $\text{Aut } \mathfrak{g}_0$ в B_g . Пусть

$$\Xi_g = \begin{cases} \{(\mathfrak{g}_0, \Omega) \in \mathcal{R}_g \times \Omega_{\mathfrak{g}_0} \mid \dim_{\mathbb{R}} \Omega = 1/2 \dim_{\mathbb{R}} B_g\} & \text{при } |q| = 1, \\ \{(\mathfrak{g}_0, \Omega) \in \mathcal{R}_g \times \Omega_{\mathfrak{g}_0} \mid \dim_{\mathbb{R}} \Omega = \dim_{\mathbb{R}} B_g\} & \text{при } q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Теорема 1.28. Если $|q| = 1$ или $q \in \mathbb{R}$, то множества Φ_g и Ξ находятся во взаимно однозначном соответствии.

§ 4. Квантовый дубль

Нижеследующая конструкция позволяет более явно описать универсальную R -матрицу для стандартного квантования $Ug(A)$. В известном смысле эта конструкция является квантованием «классического дубля» биалгебры — $g \oplus g^*$.

1. Некоторые сведения об алгебрах Хопфа. Рассмотрим биалгебру $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$. Обозначим через m^{op} противоположное умножение в алгебре A ($m^{\text{op}}(a \otimes b) = m(b \otimes a)$) и Δ^{op} — противоположное коумножение (если $\Delta(x) = \sum x'_i \otimes x''_i$, то $\Delta^{\text{op}}(x) = \sum x''_i \otimes x'_i$). Биалгебра A называется *коммутативной*, если $m^{\text{op}} = m$, и *кокоммутативной*, если $\Delta^{\text{op}} = \Delta$. Если $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ — биалгебра, то $(A, m^{\text{op}}, \eta, \Delta, \varepsilon)$ и $(A, m, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon)$ — также биалгебры.