причем если q не есть корень из единицы, то $\sigma^2 = \mathrm{id}$, а если q есть примитивный корень из единицы степени l, то $d_{\sigma i} = d_i$ и $l | d_i(a_{ij} - a_{\sigma i, \sigma j})$ для всех i, j.

2. *Если $q \in \mathbb{R}$, то*

$$\varphi(K_i) = K_{\sigma i}, \qquad \varphi(E_i) = -s_i F_{\sigma i} K_{\sigma i}, \qquad \varphi(F_i) = -s_i K_{\sigma i}^{-1} F_{\sigma i},$$

где $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $s_i = 1$ для $\sigma i \neq i$ и $s_i = \pm 1$ для $\sigma i = i$.

3. *Если $q \in i\mathbb{R}$, то*

$$\varphi(K_i) = K_{\sigma i}, \qquad \varphi(E_i) = -s_i F_{\sigma i} K_{\sigma i}, \qquad \varphi(F_i) = (-1)^{d_i} s_i K_{\sigma i}^{-1} F_{\sigma i},$$

где $\sigma^2 = \mathrm{id}$, $s_i = 1$ для $\sigma i \neq i$ и $s_i = \pm 1$ для $\sigma i = i$ при четном d_i, а при d_i нечетном $s_i = \pm i$ для $\sigma i = i$.

Отметим, что некоторые стандартные формы случаев 2 и 3 могут быть эквивалентны между собой. Легко установить, что при $d_i a_{ij} \in 2\mathbb{Z}$ вещественные формы с $q \in \mathbb{R}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с вещественными формами с $q \in i\mathbb{R}$, поэтому достаточно рассматривать только случаи 1 и 2.

Чтобы описать полное множество попарно неэквивалентных вещественных форм $\Phi_{\mathfrak{g}}$ алгебры $U_q\mathfrak{g}$, рассмотрим множество $\mathcal{R}_{\mathfrak{g}}$ всех вещественных форм алгебры $\mathfrak{g}$ и множество всех ее борелевских подалгебр $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$. Пусть $\mathfrak{g}_0 \in \mathcal{R}_{\mathfrak{g}}$ и $\Omega_{\mathfrak{g}_0}$ есть множество орбит $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$ в $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$. Пусть

$$\Xi_{\mathfrak{g}} = \begin{cases} \{(\mathfrak{g}_0, \Omega) \in \mathcal{R}_{\mathfrak{g}} \times \Omega_{\mathfrak{g}_0} \mid \dim_{\mathbb{R}} \Omega = 1/2 \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}\} & \text{при } |q| = 1, \\ \{(\mathfrak{g}_0, \Omega) \in \mathcal{R}_{\mathfrak{g}} \times \Omega_{\mathfrak{g}_0} \mid \dim_{\mathbb{R}} \Omega = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}\} & \text{при } q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Теорема 1.28. *Если $|q| = 1$ или $q \in \mathbb{R}$, то множества $\Phi_{\mathfrak{g}}$ и Ξ находятся во взаимно однозначном соответствии.*

§ 4. Квантовый дубль

Нижеследующая конструкция позволяет более явно описать универсальную R-матрицу для стандартного квантования $U\mathfrak{g}(A)$. В известном смысле эта конструкция является квантованием «классического дубля» биалгебры — $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$.

1. Некоторые сведения об алгебрах Хопфа. Рассмотрим биалгебру $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$. Обозначим через m^{op} противоположное умножение в алгебре A ($m^{\mathrm{op}}(a \otimes b) = m(b \otimes a)$) и Δ^{op} — противоположное коумножение (если $\Delta(x) = \sum x_i' \otimes x_i''$, то $\Delta^{\mathrm{op}}(x) = \sum x_i'' \otimes x_i'$). Биалгебра A называется *коммутативной*, если $m^{\mathrm{op}} = m$, и *кокоммутативной*, если $\Delta^{\mathrm{op}} = \Delta$. Если $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ — биалгебра, то $(A, m^{\mathrm{op}}, \eta, \Delta, \varepsilon)$ и $(A, m, \eta, \Delta^{\mathrm{op}}, \varepsilon)$ — также биалгебры.

Отметим, что, вообще говоря, антипод в алгебре Хопфа не обладает свойством $S^2 = 1$, более того, он не обязан быть биективным. Предполагая, что $(A, m, \eta, \Delta^{\mathrm{op}}, \varepsilon, S')$ — алгебра Хопфа, т. е. в A существует *косой антипод*, получим, что алгеброй Хопфа будет также $(A, m^{\mathrm{op}}, \eta, \Delta, \varepsilon, S')$. Кроме того, всегда $SS' = S'S = 1$, а в коммутативном или кокоммутативном случае $S' = S$.

Обозначим через A^0 алгебру Хопфа A' (п. 1.1.5) с обращенным коумножением.

2. Определение квантового дубля.

Теорема-определение 1.29. *Для данной алгебры Хопфа A с биективным антиподом существует единственная такая алгебра Хопфа $\mathcal{D}(A)$, называемая дублем алгебры A, что*

1) *$\mathcal{D}(A)$ содержит A и A^0 в качестве подалгебр;*

2) *как коалгебра $\mathcal{D}(A) \cong A \otimes A^0$;*

3) *Элемент R, являющийся образом канонического элемента из $A \otimes A^0$ при вложении $A \otimes A^0 \to \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A)$, обладает свойством $\Delta^{\mathrm{op}}(x) = R\Delta(x)R^{-1}$ для всех $x \in \mathcal{D}(A)$.*

Набросок доказательства. Пусть $\{e_\alpha\}$ — базис A, $\{e^\beta\}$ — сопряженный базис в A^0. Тогда канонический элемент имеет вид $R = \sum e_\alpha \otimes e^\alpha$. Для определения структуры алгебры на $A \otimes A^0$ необходимо уметь вычислять произведение $e^\alpha e_\beta$, т. е. иметь формулу вида $e^\alpha e_\beta = \sum c^{\alpha\gamma}_{\beta\delta} e_\gamma e^\delta$. Запишем условие 3), взяв в качестве x элемент базиса A. Слева получится линейная комбинация произведений вида $e^\alpha e_\beta$, а справа — $e_\gamma e^\delta$. Воспользовавшись подходящим следствием из аксиом алгебры Хопфа A, можно получить такие соотношения:

$$e^\alpha e_\beta = d^{\gamma\delta\nu}_\beta m^\alpha_{\nu\tau\rho} (s')^\rho_\gamma e_\delta e^\tau,$$

где d, m, s' — матрицы коумножения $A \to A \otimes A \otimes A$, умножения $A \otimes A \otimes A \to A$ и косого антипода $A \to A$ соответственно. В инвариантой форме для $f \in A$, $\varphi \in A^0$ имеем

$$\varphi f = \sum \langle \varphi'_i, f'''_i \rangle \langle S^{-1}\varphi'''_i, f'_i \rangle f''_i \varphi''_i,$$

где $(\Delta \otimes 1)\Delta f = \sum f'_i \otimes f''_i \otimes f'''_i$ и $(\Delta \otimes 1)\Delta\varphi = \sum \varphi'_i \otimes \varphi''_i \otimes \varphi'''_i$.

Предложение 1.30. *В алгебре $\mathcal{D}(A)$ выполнены следующие соотношения:*

1) $(\Delta \otimes 1)R = R^{13}R^{23}$, $(1 \otimes \Delta)R = R^{12}R^{13}$;

2) $R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}$.

Доказательство. Для $R = \sum e_\alpha \otimes e^\alpha$ имеем $(\Delta \otimes 1)R = d^{\beta\gamma}_\alpha e_\beta \otimes e_\gamma \otimes e^\alpha$ и $R^{13}R^{23} = (m^0)^{\beta\gamma}_\alpha e_\beta \otimes e_\gamma \otimes e^\alpha$. Но умножение m^0 в A^0 совпадает с коумножением Δ в A. Аналогично доказывается второе соотношение, а утверждение 2) есть формальное следствие утверждения 1).

3. Дубль и квантование $U\mathfrak{g}(A)$. Пусть $\mathfrak{b}_+$ и $\mathfrak{b}_-$ — борелевские подалгебры в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ с симметризуемой матрицей Картана A. Предположим, что отображение $\delta\colon \mathfrak{g} \to \Lambda^2\mathfrak{g}$, задающее структуру биалгебры Ли на $\mathfrak{g}$, таково, что $\delta(\mathfrak{b}_\pm) \subset \Lambda^2\mathfrak{b}_\pm$ (именно так обстоит дело в случае δ_{st}). Предположим также, что удалось проквантовать $U_h\mathfrak{b}_\pm$ и после квантования имеем $\Delta(U_h\mathfrak{b}_\pm) \subset U_h\mathfrak{b}_\pm \otimes U_h\mathfrak{b}_\pm$. Идея состоит в том, чтобы «собрать» алгебру $U_h\mathfrak{g}$ из двух «половинок» $U_h\mathfrak{b}_+$ и $U_h\mathfrak{b}_-$, используя квантовый дубль. Отметим, что на классическом уровне $\mathcal{D}(\mathfrak{b}_+) = \mathfrak{b}_+ \oplus \mathfrak{b}_- \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$.

Теорема 1.31. *Для биалгебры Ли $(\mathfrak{g}(A), \delta_{\mathrm{st}})$ алгебры Хопфа $(U_h\mathfrak{b}_\pm)^0$ и $U_h\mathfrak{b}_\mp$ изоморфны.*

Заметим, что после квантования обнаружилась замечательная симметрия между $U\mathfrak{b}_+$ и $U\mathfrak{b}_-$, отсутствовавшая на классическом уровне; действительно, обе эти алгебры Хопфа кокоммутативны, но не коммутативны.

Теорема 1.32. *Имеется изоморфизм алгебр Хопфа $\mathcal{D}(U_h\mathfrak{b}_+)$ и $U_h\mathfrak{g} \otimes U_h\mathfrak{h}$.*

(Поясним, что алгебра Хопфа $U_h\mathfrak{h}$ изоморфна $U\mathfrak{h}[[h]]$.)

Это позволяет выписать, более или менее явно, универсальную R-матрицу. Именно,

$$R = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}_+^n} \exp\left[h\left(\tfrac{1}{2}t_0 + \tfrac{1}{4}(H_\beta \otimes 1 - 1 \otimes H_\beta)\right)\right] P_\beta.$$

В этой формуле:

t_0 — элемент $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$, отвечающий каноническому скалярному произведению,

$n = \operatorname{rk}\mathfrak{g}$ — размер матрицы Картана,

$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ и $H_\beta = \sum \beta_i H_i$,

$P_\beta \in U_h\mathfrak{b}_+ \otimes U_h\mathfrak{b}_-$ — многочлен от $u_i^+ = X_i^+ \otimes 1$ и $u_i^- = 1 \otimes X_i^-$, однородный по каждому переменному.

Кроме того, многочлены P_β должны обладать следующими свойствами:

1) $\deg_{u_i^\pm} P_\beta = \beta_i$,

2) $P_0 = 1$,

3) $P_\beta \equiv 0 \pmod{h^{k_\beta}}$ и $P_\beta \not\equiv 0 \pmod{h^{k_\beta - 1}}$, где $k_\beta = \min\{k \mid H_\beta$ представим в виде суммы k положительных корней$\}$,

4) коэффициенты $h^{-|\beta|}P_\beta$ — рациональные функции от e^{ch}, $c \in \mathbb{C}$.

4. Пример: вычисление квантового дубля для $\mathfrak{sl}(2)$. В качестве иллюстрации к теоремам предыдущего пункта приведем подробное

вычисление для $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2)$. Удобно выбрать другую систему образующих в $U_h\mathfrak{g}$. Именно, положим $E = q^{H/2}X$, $F = q^{-H/2}Y$. Тогда

$$[E, F] = \frac{q^H - q^{-H}}{1 - q^{-2}}, \qquad [H, E] = 2E, \qquad [H, F] = -2F,$$
$$\Delta E = E \otimes q^H + 1 \otimes E, \qquad \Delta F = F \otimes 1 + q^{-H} \otimes F.$$

Используя квантовый дубль, мы восстановим эти формулы, зная лишь квантование $U_h\mathfrak{b}_+$. Алгебра $U_h\mathfrak{b}_+$ порождается H и E. Вычислим $(U_h\mathfrak{b}_+)^0$. Базис $U_h\mathfrak{b}_+$ состоит из мономов H^aE^b. Пусть в $(U_h\mathfrak{b}_+)$ образующие η и ε таковы, что $\langle \eta, H\rangle = \langle \varepsilon, E\rangle = 1$, $\langle \eta, E\rangle = \langle \varepsilon, H\rangle = 0$, а базис состоит из мономов $\eta^\alpha\varepsilon^\beta$.

Лемма 1.33. $\langle \eta^\alpha\varepsilon^\beta, H^aE^b\rangle = \delta_{\alpha a}\delta_{\beta b}a![b]_{q^{-2}}!$.

Доказательство. Заметим, что

$$(\Delta H)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H^{n-k} \otimes H^k,$$
$$(\Delta E)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} E^{n-k} \otimes (q^H)^{n-k}E^k.$$

(Здесь $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$, $[n]_q! = [1]_q \ldots [n]_q$, $[s]_q = \frac{q^s - 1}{q - 1}$.) Тогда, например,

$$\langle \varepsilon^\beta, E^b\rangle = \langle m(\varepsilon^{\beta-1} \otimes \varepsilon), E^b\rangle = \langle \varepsilon^{\beta-1} \otimes \varepsilon, \Delta E^b\rangle =$$
$$= \left\langle \varepsilon^{\beta-1} \otimes \varepsilon, \sum_{k=0}^{b} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} E^{b-k} \otimes (q^H)^{b-k}E^k \right\rangle =$$
$$= \delta_{\beta b}[b]_{q^{-2}} \langle \varepsilon^{\beta-1}, E^{b-1}\rangle = \delta_{\beta b}[b]_{q^{-2}}!,$$

поскольку $\langle \varepsilon, (q^H)^{b-1}E\rangle = \left\langle \varepsilon, E + (b-1)HE\frac{h}{2} + \ldots \right\rangle = 1$.

Лемма 1.34. $H^\alpha E^\beta \cdot H^aE^b = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (-2\beta)^k H^{\alpha+a-k}E^{\beta+b}$.

Доказательство основано на формуле $E^\beta H^a = (H - 2\beta)^a E^\beta$.

Лемма 1.35. *В биалгебре* $(U_h\mathfrak{b}_+)'$ *имеем*

$$\Delta\eta = \eta \otimes 1 + 1 \otimes \eta, \qquad \Delta\varepsilon = 1 \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes e^{-2\eta},$$
$$[\eta, \varepsilon] = -\frac{h}{2}\varepsilon.$$

Доказательство. Вычислим, например, $\Delta\varepsilon$:

$$\langle \Delta\varepsilon, H^\alpha E^\beta \otimes H^aE^b\rangle = \left\langle \varepsilon, \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (-2\beta)^k H^{\alpha+a-k}E^{\beta+b} \right\rangle.$$

Ненулевые значения спаривания возможны лишь при $\beta + b = 1$ и $\alpha + a - k = 0$, т. е. $\langle \Delta\varepsilon, 1 \otimes E\rangle = 1$ и $\langle \Delta\varepsilon, E \otimes H^a\rangle = (-2)^a$.

Переходя к $(U_h\mathfrak{b}_+)^0$ (т. е. обратив коумножение) и сделав замену

$$\eta \mapsto \frac{h}{4}H, \qquad \varepsilon \mapsto cF \qquad (c \neq 0), \tag{5}$$

получим алгебру, изоморфную $U_h\mathfrak{b}_-$. Теперь мы можем выписать универсальную R-матрицу для $\mathrm{sl}(2)$:

$$R = \sum_{\alpha,\beta} H^\alpha E^\beta \otimes \frac{1}{\alpha![\beta]_{q^{-2}}!}\eta^\alpha\varepsilon^\beta = q^{H\otimes H/2}\sum_{\beta\geqslant 0}\frac{c^\beta}{[\beta]_{q^{-2}}!}(q^{H/2}X)^\beta \otimes (q^{-H/2}Y)^\beta.$$

Для сходимости этого формального ряда достаточно потребовать $c = h + O(h^2)$. Вычислим коммутационные соотношения в дубле $\mathcal{D}(U_h\mathfrak{b}_+)$.

Лемма 1.36. *В $\mathcal{D}(U_h\mathfrak{b}_+)$ имеют место соотношения*

$$[H, E] = 2E, \qquad [E, \eta] = -\frac{h}{2}E, \qquad [H, \eta] = 0,$$
$$[\eta, \varepsilon] = -\frac{h}{2}\varepsilon, \qquad [H, \varepsilon] = -2\varepsilon, \qquad [E, \varepsilon] = e^{hH/2} - e^{-2\eta}.$$

Доказательство. Запишем $R = \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}H^\alpha E^\beta \otimes \eta^\alpha\varepsilon^\beta$ и воспользуемся соотношением $\Delta^{\mathrm{op}}(x) = R\Delta(x)R^{-1}$ для $x = H$. Тогда

$$\sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}(H^{\alpha+1}E^\beta \otimes \eta^\alpha\varepsilon^\beta + H^\alpha E^\beta \otimes H\eta^\alpha\varepsilon^\beta) =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}(H^\alpha E^\beta H \otimes \eta^\alpha\varepsilon^\beta + H^\alpha E^\beta \otimes \eta^\alpha\varepsilon^\beta H).$$

Приведя подобные слагаемые, получим

$$\sum_{\alpha,\beta} H^\alpha E^\beta \otimes f_{\alpha\beta}(H + 2\beta)\eta^\alpha\varepsilon^\beta = \sum_{\alpha,\beta} H^\alpha E^\beta \otimes f_{\alpha\beta}\eta^\alpha\varepsilon^\beta H,$$

откуда при $\beta = 0$, $\alpha = 1$ следует $H\eta = \eta H$, а при $\beta = 1$, $\alpha = 0$ — $[H, \varepsilon] = -2\varepsilon$.

При $x = E$ получим $[E, \eta] = -\frac{h}{2}E$ и $[E, \varepsilon] = e^{hH/2} - e^{-2\eta}$. Отделим теперь «лишнюю» алгебру $U_h\mathfrak{h}$.

Лемма 1.37. *Пусть $\widetilde{H} = \frac{1}{2}(H + \frac{4}{h}\eta)$, $\widetilde{\eta} = \frac{1}{2}(H - \frac{4}{h}\eta)$, тогда*

$$[\widetilde{H}, E] = 2E, \qquad [\widetilde{H}, \varepsilon] = -2\varepsilon, \qquad [E, \varepsilon] = (q^{\widetilde{H}} - q^{-\widetilde{H}})q^{\widetilde{\eta}},$$

а $\widetilde{\eta}$ лежит в центре $\mathcal{D}(U_h\mathfrak{b}_+)$. Поэтому $U_h\,\mathrm{sl}(2) \cong \mathcal{D}(U_h\mathfrak{b}_+)/(\widetilde{\eta})$.

После замены (5) коммутационные соотношения в $\mathcal{D}(U_h\mathfrak{b}_+)/(\eta)$ примут вид

$$[E, F] = \frac{q^H - q^{-H}}{c}, \qquad [H, E] = 2E, \qquad [H, F] = -2F.$$

Поскольку $q^H - q^{-H} = hH + O(h^2)$ и $c = h + O(h^2)$, классические пределы этих соотношений есть в точности соотношения в $U\,\mathrm{sl}(2)$. Выбор разных конкретных значений c приводит к изоморфным алгебрам Хопфа. В. Г. Дринфельд полагает $c = h$; у Люстига и в ряде работ японской школы $c = q - q^{-1}$ (а в качестве образующих используются E, F и K);

Джимбо выбирает $c = 1 - q^{-2}$. Мы будем придерживаться последнего выбора. Запишем теперь окончательную формулу для R.

$$R = q^{H \otimes H/2} \sum_{\beta \geqslant 0} \frac{(1-q^{-2})^\beta}{[\beta]_{q^{-2}}!} (q^{H/2}X)^\beta \otimes (q^{-H/2}Y)^\beta.$$

Вычислим R_ρ для тавтологического представления ρ: $U_h\,\mathrm{sl}(2) \to \to \mathrm{Mat}(2, k)$, при котором

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и потому $\rho(q^H) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$. Тогда

$$R_\rho = \rho(q^{H \otimes H/2}) \left(1 \otimes 1 + (1 - q^{-2}) \begin{pmatrix} 0 & q^{1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1/2} & q^{1/2} - q^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Домножив на $q^{1/2}$, получим традиционную форму записи:

$$R'_\rho = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

Коммутационные соотношения для $*$-умножения в $\mathcal{O}_h(\mathrm{Mat}(2))$ найдем из формулы $R_\rho Z^1 *_h Z^2 = Z^2 *_h Z^1 R_\rho$, положив $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{gathered} a * b = q^{-1} b * a, \\ a * c = q^{-1} c * a, \\ b * d = q^{-1} d * b, \\ c * d = q^{-1} d * c, \\ b * c = c * b, \\ a * d - d * a = (q^{-1} - q) b * c. \end{gathered}$$

Нетрудно сообразить, что универсальная R-матрица для $\mathrm{sl}(n)$ будет такой:

$$R = q \sum_i e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{i \neq j} e_{ii} \otimes e_{jj} + (q - q^{-1}) \sum_{i<j} e_{ij} \otimes e_{ji}.$$

В заключение заметим, что случай общей алгебры $\mathfrak{g}(A)$ по существу вытекает из разобранного, поскольку любая простая алгебра Ли «собрана» из подалгебр, изоморфных $\mathrm{sl}(2)$.