§ 5. Квазитреугольные алгебры Хопфа

1. Определение квазитреугольной алгебры. Предложение 1.23 и определение квантового дубля естественным образом приводят к следующему общему понятию.

Определение 1.38. Пара (A, R), где A — алгебра Хопфа, а $R \in A \otimes A$ — обратимый элемент, называется *почти кокоммутативной алгеброй Хопфа*, если

$$\Delta^{\mathrm{op}}(a) = R\Delta(a)R^{-1} \quad \text{для всех } a \text{ из } A.$$

Если к тому же

$$(\Delta \otimes 1)R = R^{13}R^{23}, \qquad (1 \otimes \Delta)R = R^{12}R^{13},$$

то (A, R) называется *квазитреугольной алгеброй Хопфа.*

Если в квазитреугольной алгебре Хопфа $R^{12}R^{21} = 1$, то она называется *треугольной.*

Следствие 1.39. *В квазитреугольной алгебре Хопфа* $YB(R) = 0$.

Предложение 1.40. *Если (квази)треугольная алгебра Хопфа A есть QUE-алгебра с классическим пределом $\mathfrak{g}$ и $R = 1 + rh + O(h^2)$, то $(\mathfrak{g}, r)$ — (квази)треугольная биалгебра Ли.*

Полезно изучить свойства категории представлений таких алгебр — эти категории оказываются тензорными.

2. Тензорные категории. Категория $\mathcal{C}$ называется *тензорной*, если заданы

— бифунктор $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $(X, Y) \mapsto X \otimes Y$;

— семейство изоморфизмов $a_{XYZ}\colon X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z$ (морфизмы ассоциативности);

— семейство изоморфизмов $c_{XY}\colon X \otimes Y \to Y \otimes X$ (морфизмы коммутативности);

— пара (U, u), где U — объект $\mathcal{C}$, а $u\colon U \to U \otimes U$ — изоморфизм (единичный объект, обозначаемый иногда $\underline{1}$).

Эти данные должны быть согласованы в следующем смысле.

1. Коммутативна каждая диаграмма вида (*«диаграмма пятиугольника»*)

$$\begin{tikzcd}
 & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \arrow[dr, "a"] & \\
X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T)) \arrow[ur, "a"] \arrow[d, "1 \otimes a"'] & & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) \arrow[rr, "a"] & & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T \arrow[u, "a \otimes 1"']
\end{tikzcd}$$

(Здесь и далее подразумевается надлежащий набор индексов у a и c.)

2. Коммутативны *«диаграммы согласованности»* a и c

$$\begin{tikzcd}
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "1\otimes c"] & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "c"] & Z\otimes(X\otimes Y) \arrow[d, "a"'] \\
X\otimes(Z\otimes Y) \arrow[r, "a"] & (X\otimes Z)\otimes Y \arrow[r, "c\otimes 1"] & (Z\otimes X)\otimes Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "a"] & (X\otimes Y)\otimes Z & Z\otimes(X\otimes Y) \arrow[l, "c"'] \arrow[d, "a"'] \\
X\otimes(Z\otimes Y) \arrow[r, "a"] \arrow[u, "1\otimes c"] & (X\otimes Z)\otimes Y & (Z\otimes X)\otimes Y \arrow[l, "c\otimes 1"']
\end{tikzcd}$$

3. Функтор $X \mapsto U\otimes X$ является автоэквивалентностью категории $\mathcal{C}$.

Если в тензорной категории морфизмы коммутативности таковы, что $c_{YX}\circ c_{XY}=\mathrm{id}_{X\otimes Y}$, то она называется *симметрической*. В этом случае достаточно требовать коммутативности лишь одной из диаграмм согласованности. Наличие единичного объекта в тензорной категории отражают иногда термином *моноидальная категория*.

Примерами могут служить категории $\underline{\mathrm{Vec}}_k$ и $Z_2-\underline{\mathrm{Vec}}_k$ векторных пространств и суперпространств соответственно. Морфизмы ассоциативности в них тождественны; в первом случае $c_{XY}(x\otimes y)=y\otimes x$, во втором $c_{XY}(x\otimes y)=(-1)^{\tilde{x}\tilde{y}}y\otimes x$.

Заметим, что множество морфизмов в категории $\underline{\mathrm{Vec}}_k$ само является объектом этой категории, в то время как в абстрактной ситуации это всего лишь множество. Это наблюдение формализуется в определении внутреннего Hom'а.

Рассмотрим функтор $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Set}$, $T\mapsto\mathrm{Hom}(T\otimes X, Y)$. Если этот функтор представим, то представляющий его объект называется *внутренним* $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$. Представимость означает равенство

$$\mathrm{Hom}(T\otimes X, Y)=\mathrm{Hom}(T, \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y))$$

при надлежащем условии универсальности. Положив $T=\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$, получаем канонический *морфизм вычисления* $\mathrm{ev}_{X,Y}\colon \underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)\otimes\otimes X\to Y$. Будем предполагать в дальнейшем существование $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ для всех X, Y.

Пусть $X^\vee=\underline{\mathrm{Hom}}(X, \underline{1})$. Тогда определены отображения $X^\vee\otimes X\to\underline{1}$ и $\underline{1}\to X\otimes X^\vee$. Имеется также отображение $X\to X^{\vee\vee}$, не являющееся, вообще говоря, изоморфизмом. Говорят, что тензорная категория с внутренними Hom'ами является *жесткой*, если отображение $X\to X^{\vee\vee}$ является изоморфизмом для всех X, а также

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X_1, Y_1)\otimes\underline{\mathrm{Hom}}(X_2, Y_2)\cong\underline{\mathrm{Hom}}(X_1\otimes X_2, Y_1\otimes Y_2).$$

В этом случае объекты $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ и $Y\otimes X^\vee$ изоморфны.

В жесткой тензорной категории определен *внутренний ранг* объекта. Сквозное отображение

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X, X) \to X \otimes X^{\smile} \xrightarrow{c} X^{\smile} \otimes X \xrightarrow{\mathrm{ev}} \underline{1}.$$

называется *внутренним следом* и обозначается $\underline{\mathrm{Tr}}$. Взяв $\mathrm{id}_X \in \underline{\mathrm{Hom}}(X, X)$, положим $\underline{\mathrm{rk}}(X) = \underline{\mathrm{Tr}}(\mathrm{id}_X)$. Для наших примеров $\underline{\mathrm{Tr}}$ есть, соответственно, след и суперслед, а $\underline{\mathrm{rk}}$ — размерность и разность $m-n$ для пространства суперразмерности $m|n$.

3. Представления квазитреугольных алгебр Хопфа. На категории представлений $H - \underline{\mathrm{mod}}$ алгебры Хопфа H можно ввести тензорное умножение следующим образом. Если ρ_i: $H \to \mathrm{End}(V_i)$, $i = 1, 2$, два представления, то определим ρ: $H \to \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$ как сквозное отображение

$$H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H \xrightarrow{\rho_1 \otimes \rho_2} \mathrm{End}(V_1) \otimes \mathrm{End}(V_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2).$$

В качестве морфизмов ассоциативности возьмем тождественные: $x \otimes (y \otimes z) \mapsto (x \otimes y) \otimes z$. Если H почти кокоммутативна, то определены и морфизмы коммутативности

$$V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\rho_1 \otimes \rho_2(R)} V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{P} V_2 \otimes V_1,$$

где $P(x \otimes y) = y \otimes x$; на элементах имеем

$$c_{V_1 V_2}(v_1 \otimes v_2) = \sum \rho_2(r_i'')v_2 \otimes \rho_1(r_i')v_1, \qquad \text{если} \quad R = \sum r_i' \otimes r_i''.$$

Коммутативность диаграмм согласованности a и c равносильна квазитреугольности H. Наконец, симметричность $H - \underline{\mathrm{mod}}$ равносильна треугольности H. Что касается единичного объекта, то, разумеется, $U = k$, а аксиома 3 в терминах R записывается как $(\varepsilon \otimes 1)R = 1 = (1 \otimes \varepsilon)R$. Но это равенство следует из квазитреугольности: достаточно применить $\varepsilon \otimes 1 \otimes 1$ и $1 \otimes \varepsilon \otimes 1$ к равенствам $(\Delta \otimes 1)R = R^{13}R^{23}$, $(1 \otimes \Delta)R = R^{12}R^{13}$ соответственно.

Изложенные соображения остаются в силе при рассмотрении категории комодулей $H - \underline{\mathrm{comod}}$ над алгеброй Хопфа H.

Пусть $H = \mathcal{O}(G)$ — алгебра регулярных функций на алгебраической группе G над полем k. Очевидным образом, $(\mathcal{O}(G), 1)$ — треугольная алгебра Хопфа. Оказывается, группу G можно восстановить по тензорной категории ее представлений. Для этого рассмотрим забывающий функтор ω: $\mathcal{O}(G) - \underline{\mathrm{comod}} \to \underline{\mathrm{Vec}}_k$ (функтор слоя) и группу его автоморфизмов как тензорного функтора $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$. Она будет изоморфна исходной группе G (см. также п. 2.1.2).

Это, неформально говоря, означает, что данную тензорную категорию можно рассматривать как категорию представлений некоторой квантовой группы.

4. Квантовый элемент Казимира.

Предложение 1.41. *Пусть (H, R) — почти кокоммутативная алгебра Хопфа и $R = \sum r_i' \otimes r_i''$. Тогда элемент $u = \sum S(r_i'')r$ обратим и*

$$S^2(x) = uxu^{-1} \qquad \text{для всех } x \in H.$$

Это означает, что тензорная категория $H - \underline{\mathrm{mod}}$ является жесткой (изоморфизм $X \to X^{\vee\vee}$ задается сопоставлением $x \mapsto ux$).

Обратимся к алгебре $U_h\mathfrak{g}(A)$. Из формулы для антипода легко следует, что $S^2(x) = q^{2\check{\rho}}xq^{-2\check{\rho}}$, где $\check{\rho} = \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha>0} H_\alpha$. В силу предложения в той же алгебре имеется элемент u, обладающий тем же свойством. Поэтому элемент $q^{-2\check{\rho}}u$ централен и, по лемме Шура, в неприводимом представлении $U_h\mathfrak{g}(A)$ должен действовать умножением на скаляр.

Предложение 1.42. *Пусть $L(\Lambda)$ есть неприводимый $U_h\mathfrak{g}(A)$-модуль, порожденный таким вектором v_Λ, что $H_i v_\Lambda = \lambda_i v_\Lambda$ и $X_i^+ v_\Lambda = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда $q^{-2\check{\rho}}u$ действует в $L(\Lambda)$ умножением на $q^{-(\Lambda, \Lambda+2\rho)}$.*

Для доказательства достаточно вычислить действие $q^{-2\check{\rho}}u$ на v_Λ. Из формулы п. 1.4.3 для универсальной R-матрицы и определения u следует, что все члены, происходящие из

$$\exp\left(\frac{h}{4}t_0(H_\beta \otimes 1 - 1 \otimes H_\beta)\right)P_\beta$$

с $\beta \neq 0$, переводят v_Λ в нуль. Но тогда

$$q^{-2\check{\rho}}q^{-\Sigma H_\alpha^2/2}v_\Lambda = q^{-(2\check{\rho}, \Lambda) - (\Lambda, \Lambda)}v_\Lambda.$$

Ввиду этого свойства $q^{-2\check{\rho}}u$ называется *квантовым элементом Казимира.*

Библиографический комментарий

Излагаемые в этой главе результаты принадлежат в основном В. Г. Дринфельду. Большая часть их была приведена без доказательств в знаменитой работе [19]. После ее выхода появилось несколько статей, в которых восстановлены некоторые опущенные доказательства; однако исчерпывающий комментарий к [19] пока отсутствует. В нашем изложении мы опирались на статьи Л. А. Тахтаджяна [136], Х. Дёбнера, Д. Хеннинга и В. Люке [76], а также на (неопубликованные) записки спецкурса Ю. И. Манина 1987–1988 гг.

Общая проблематика квантования обсуждается в монографиях М. В. Карасева В. П. Маслова [25] и Н. Харта [49]. Стандартные сведения об алгебрах Хопфа содержатся в [1, 52]; о группах и алгебрах Ли в [6, 43, 95].