ГЛАВА 2

АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ТЕОРИИ КВАНТОВЫХ ГРУПП

§ 1. Предварительные соображения

1. Комодули над алгеброй Хопфа. Дополним приведенные ранее сведения об алгебрах Хопфа. Назовем векторное пространство V (левым) *комодулем* над алгеброй Хопфа H, если задано такое линейное отображение $\delta\colon V \to H \otimes V$, называемое *кодействием*, что следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & H \otimes V \arrow[d, "\Delta \otimes 1"'] \\ H \otimes V \arrow[r, "1 \otimes \delta"] & H \otimes H \otimes V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & H \otimes V \arrow[d, "\varepsilon \otimes 1"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Выбору базиса $v_1, \ldots, v_n$ в комодуле V отвечает такая матрица $Y \in \mathrm{Mat}(n, H)$, что $\delta(v_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_i^j \otimes v_j$. Из определения комодуля следует, что

$$\Delta(y_i^j) = \sum y_i^k \otimes y_k^j, \quad \varepsilon(y_i^j) = \delta_i^j$$
$$\text{(символическая запись: } \Delta(Y) = Y \otimes Y, \quad \varepsilon(Y) = E).$$

Такие *матрицы* Y называются *мультипликативными*.

Если $\dim V = 1$, то мультипликативная матрица есть просто элемент $g \in H$ такой, что $\Delta(g) = g \otimes g$ и $\varepsilon(g) = 1$. Такие *элементы* g называются *мультипликативными*; они образуют моноид, а если H — алгебра Хопфа, то группу, называемую *группой характеров* $\mathrm{X}(H)$ биалгебры H. Это наименование связано с тем, что, очевидно, мультипликативные элементы взаимно однозначно отвечают одномерным комодулям биалгебры H.

Пример. Группа $X(k[GL(n)])$ изоморфна $\mathbb{Z}$ и порождается детерминантом.

2. Четыре лика алгебраической группы. Здесь мы напомним четыре идейно различных понимания термина «алгебраическая группа».

A. Группа есть *групповой объект* в подходящей категории. Это означает, что имеются объект G некоторой категории с финальным объектом e и отображения $\mu\colon G \times G \to G$, $\iota\colon G \to G$, $u\colon e \to G$, такие, что коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times 1"] \arrow[d, "1 \times \mu"] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[d] & G \arrow[l, "\delta"'] & G \times G \arrow[l, "\delta"'] \arrow[d] \\ e \times G \arrow[r, "u \times 1"] & G \times G \arrow[u, "\mu"] & G \times e \arrow[l, "1 \times u"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & e \arrow[r] & G \\ G \times G \arrow[rr, "\iota \times 1", "1 \times \iota"'] & & G \times G, \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

где $\delta(g)$ — диагональное отображение (его существование и единственность выводятся из категорных свойств прямого произведения); в категории множеств $\delta(g) = (g, g)$. Считая, что мы находимся в категории схем, аффинных алгебраических многообразий, гладких многообразий, получаем соответственно групповую схему, аффинную алгебраическую группу, группу Ли.

Например, в категории аффинных алгебраических многообразий над полем k имеем

$$GL(n, k) = \{X \in \mathrm{Mat}(n, k) \mid \exists Y \in \mathrm{Mat}(n, k)\colon XY = YX = E\}.$$

B. Алгебра регулярных функций $\mathcal{O}(G) = k[G]$ на аффинной алгебраической группе есть алгебра Хопфа. Это уже обсуждалось в гл. 1.

Переход от **B** к **A** состоит в рассмотрении спектра данной коммутативной алгебры Хопфа H; $\operatorname{Spec} H$ — некоторая групповая схема.

C. Алгебраическая группа G над полем k есть функтор из категории k-алгебр в категорию групп: именно, для k-алгебры A группа $G(A)$ состоит из A-точек группы G.

Примеры. Если $\mathbb{G}_a$ — аддитивная группа, то $\mathbb{G}_a(A) = A^+$ — аддитивная подгруппа алгебры A. Если $\mathbb{G}_m$ — мультипликативная группа, то $\mathbb{G}_m(A) = A^\times$ — мультипликативная подгруппа алгебры A. Группа $\mathrm{GL}(n)(A) = GL(n, A)$ — группа обратимых матриц с элементами из A.

Переход от **C** к **B** осуществим, если функтор G оказывается представимым, т. е. существует такая k-алгебра H_G, что

$$G(A) = \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(H_G, A).$$

При этом H_G оказывается алгеброй Хопфа.

Примеры. $H_{\mathbb{G}_a} = k[t]$; $\Delta t = t \otimes 1 + 1 \otimes t$, $\varepsilon t = 0$, $\mathrm{S}\, t = -t$. $H_{\mathbb{G}_m} = k[t, t^{-1}]$; $\Delta t = t \otimes t$, $\varepsilon t = 1$, $\mathrm{S}\, t = t^{-1}$.

D. Аффинная алгебраическая группа «есть» тензорная категория. Точнее, категория конечномерных представлений $\underline{\mathrm{Rep}}_k\, G$ над полем k аффинной алгебраической группы G является жесткой абелевой тензорной категорией (см. 1.5.2). Обратно, если заданы жесткая абелева тензорная категория $\mathcal{C}$ такая, что $k = \mathrm{End}(\underline{1})$ (это поле), и забывающий точный k-линейный тензорный функтор ω: $\mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Vec}}_k$, то функтор тензорных автоморфизмов $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ на категории k-алгебр представим некоторой групповой схемой G и определяет эквивалентность категорий $\mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Rep}}_k\, G$. При некоторых дополнительных условиях на $\mathcal{C}$ схема G оказывается алгебраическим многообразием. Классический вариант этого утверждения, относящийся к представлениям компактных групп, был установлен Т. Таннакой и М. Г. Крейном (см. [26]).

3. Эвристическое определение квантования. В первой главе было показано, что процедура квантования группы Пуассона–Ли приводит естественным образом к некоммутативным и некокоммутативным алгебрам Хопфа. Поэтому для квантовой группы интерпретация **B** имеет смысл. Этого нельзя сказать о точке зрения **A**: некоммутативная алгебраическая геометрия пока не предложила аналога функтора Spec, приводящего к разумной топологической картине. Что же касается представления о квантовой группе как о функторе, то и оно не имеет удовлетворительного толкования. Дело в том, что умножение m: $A \otimes A \to A$ в алгебре A является гомоморфизмом алгебр только если A коммутативна:

$$m(a \otimes b \cdot c \otimes d) = m(ac \otimes bd) = acbd \neq abcd = m(a \otimes b) \cdot m(c \otimes d).$$

Описание **D**, как мы уже видели (п. 1.5.3), имеет смысл и оказывается особенно полезным в топологических приложениях.

Итак, на данном этапе остается доступным определение квантовой группы как некоторой алгебры Хопфа. Чтобы произвол не был столь велик, примем следующее эвристическое определение квантования.

Определение 2.1. Алгебра Хопфа H_q, зависящая от параметра (параметров) q, называется *квантованием* аффинной алгебраической группы G, если:

1) алгебра H_q изоморфна $k[G]$ при некотором значении q («принцип соответствия»);

2) $\dim H_q = \dim k[G]$ при почти всех значениях q («теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта»).

Мы будем писать $H_q = k[G_q]$. Аналогично мы говорим и о квантовании полугруппы.

Комментарий. Смысл первого требования очевиден; второе же, будучи трактуемо неформально, означает, что «квантовых симметрий столько же, сколько и классических», формально же это требование нуждается в уточнении в конкретных случаях. Скажем, если построена градуированная алгебра — деформация $k[\mathrm{Mat}(n)]$, то требуется, чтобы размерности соответствующих градуировочных компонент совпадали.

Принятие этого определения в качестве руководящей идеи связано с определенными издержками. Во-первых, не всегда тривиальным оказывается вопрос о существовании антипода в биалгебре, являющейся квантованием полугруппы $\mathrm{Mat}(n)$. Во-вторых, решение вопроса о размерности квантования $\mathrm{Mat}(n)$ связано с привлечением посторонних методов разной степени мощности, тогда как квантование $U_q\mathfrak{g}$ из первой главы получалось естественным путем и по построению обладало ПБВ-свойством. В-третьих, вполне вероятно (так оно и оказывается) появление квантований, отличных от стандартного $U_q\mathfrak{g}$.

§ 2. R-матричные и универсальные кодействующие биалгебры

1. R-матричные биалгебры. Эти алгебры получаются из аксиоматизации коммутационных соотношений в алгебре $\mathcal{O}_h(G)$: $\widetilde{R}Z_1Z_2 = Z_2Z_1\widetilde{R}$, при этом $YB(\widetilde{R}) = 0$. В дальнешем нам будет удобно рассматривать оператор $R = P\widetilde{R}$, где $P(x \otimes y) = y \otimes x$ — оператор перестановки. Тогда $RZ \otimes Z = Z \otimes ZR$ и

$$R^{12}R^{23}R^{12} = R^{23}R^{12}R^{23}. \qquad \text{(BE)}$$

К сожалению, по традиции соотношение на R также называют (квантовым) уравнением Янга–Бакстера. Но оно есть не что иное, как соотношение в группе кос для перестановок соседних нитей. Условимся о следующей компромиссной терминологии: разность левой и правой частей (BE) обозначим $\mathrm{BE}(R)$ (от «braid equation»), а оба равенства $\mathrm{YB}(\widetilde{R}) = 0$ и $\mathrm{BE}(R) = 0$ будем называть уравнениями Янга–Бакстера, поясняя, если нужно, какое равенство имеется в виду.