Определение 2.1. Алгебра Хопфа H_q, зависящая от параметра (параметров) q, называется *квантованием* аффинной алгебраической группы G, если:

1) алгебра H_q изоморфна $k[G]$ при некотором значении q («принцип соответствия»);

2) $\dim H_q = \dim k[G]$ при почти всех значениях q («теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта»).

Мы будем писать $H_q = k[G_q]$. Аналогично мы говорим и о квантовании полугруппы.

Комментарий. Смысл первого требования очевиден; второе же, будучи трактуемо неформально, означает, что «квантовых симметрий столько же, сколько и классических», формально же это требование нуждается в уточнении в конкретных случаях. Скажем, если построена градуированная алгебра — деформация $k[\mathrm{Mat}(n)]$, то требуется, чтобы размерности соответствующих градуировочных компонент совпадали.

Принятие этого определения в качестве руководящей идеи связано с определенными издержками. Во-первых, не всегда тривиальным оказывается вопрос о существовании антипода в биалгебре, являющейся квантованием полугруппы $\mathrm{Mat}(n)$. Во-вторых, решение вопроса о размерности квантования $\mathrm{Mat}(n)$ связано с привлечением посторонних методов разной степени мощности, тогда как квантование $U_q\mathfrak{g}$ из первой главы получалось естественным путем и по построению обладало ПБВ-свойством. В-третьих, вполне вероятно (так оно и оказывается) появление квантований, отличных от стандартного $U_q\mathfrak{g}$.

§ 2. R-матричные и универсальные кодействующие биалгебры

1. R-матричные биалгебры. Эти алгебры получаются из аксиоматизации коммутационных соотношений в алгебре $\mathcal{O}_h(G)$: $\widetilde{R}Z_1Z_2 = Z_2Z_1\widetilde{R}$, при этом $YB(\widetilde{R}) = 0$. В дальнешем нам будет удобно рассматривать оператор $R = P\widetilde{R}$, где $P(x \otimes y) = y \otimes x$ — оператор перестановки. Тогда $RZ \otimes Z = Z \otimes ZR$ и

$$R^{12}R^{23}R^{12} = R^{23}R^{12}R^{23}. \qquad \text{(BE)}$$

К сожалению, по традиции соотношение на R также называют (квантовым) уравнением Янга–Бакстера. Но оно есть не что иное, как соотношение в группе кос для перестановок соседних нитей. Условимся о следующей компромиссной терминологии: разность левой и правой частей (BE) обозначим $\mathrm{BE}(R)$ (от «braid equation»), а оба равенства $\mathrm{YB}(\widetilde{R}) = 0$ и $\mathrm{BE}(R) = 0$ будем называть уравнениями Янга–Бакстера, поясняя, если нужно, какое равенство имеется в виду.

Определение 2.2. Пусть R есть некоторая матрица порядка n^2. Положим $M_R = k\langle Z\rangle/(R(Z\otimes Z)-(Z\otimes Z)R)$. Здесь $k\langle Z\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра, порожденная z_i^j, а идеал порождается матричными элементами матрицы $R(Z\otimes Z)-(Z\otimes Z)R$, где $(Z\otimes Z)_{ij}^{kl} = z_i^k z_j^l$ — кронекеровское произведение матриц.

Предложение 2.3. *Алгебра M_R является биалгеброй с коумножением $\Delta(Z) = Z\otimes Z$ и коединицей $\varepsilon(Z) = E$.*

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned}\Delta(R(Z\otimes Z)-(Z\otimes Z)R) &= \\ &= R(Z\otimes Z)\otimes(Z\otimes Z)-(Z\otimes Z)\otimes(Z\otimes Z)R = \\ &= R(Z\otimes Z)\otimes(Z\otimes Z)-(Z\otimes Z)R\otimes(Z\otimes Z)+ \\ &\quad +(Z\otimes Z)\otimes R(Z\otimes Z)-(Z\otimes Z)\otimes(Z\otimes Z)R = \\ &= (R(Z\otimes Z)-(Z\otimes Z)R)\otimes(Z\otimes Z)- \\ &\qquad -(Z\otimes Z)\otimes(R(Z\otimes Z)-(Z\otimes Z)R) = 0 \text{ в } M_R,\end{aligned}$$

а также

$$\varepsilon(R(Z\otimes Z)-(Z\otimes Z)R) = R(E\otimes E)-(E\otimes E)R = 0.$$

Пример. При $R = P$: $x\otimes y \mapsto y\otimes x$ получаем $M_P = k[Z] \cong \cong k[\mathrm{Mat}(n)]$.

Имеется весьма простой способ изготовить серию комодулей над биалгеброй M_R. Именно, возьмем многочлен $f\in k[t]$ и положим $A_f = k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle/(f(R)x\otimes x)$, а кодействие $\delta_f\colon A_f\to M_R\otimes A_f$ определим стандартной формулой $\delta_f(x) = Z\otimes x$. Действительно, тогда

$$\begin{aligned}\delta_f(f(R)x\otimes x) &= f(R)Z\otimes Z\otimes x\otimes x = \\ &= (f(R)Z\otimes Z - Z\otimes Zf(R))\otimes x\otimes x + Z\otimes Z\otimes(f(R)x\otimes x),\end{aligned}$$

и поэтому кодействие задано корректно.

Ясно, однако, что запас указанных комодулей невелик: комодуль A_f нетривиален, если f является делителем минимального многочлена оператора R. Исчерпывающее описание этих комодулей дается теоремой Е. Е. Мухина [35].

Теорема 2.4. *Пусть $A = k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle/(I)$ есть комодуль над M для полупростого оператора R относительно кодействия $\delta(x) = Z\otimes x$ и идеал (I) порожден своей второй компонентой. Тогда комодуль A изоморфен некоторому A_f.*

2. Квантование групп классических серий. Здесь приводится список R-матриц и некоторых их свойств, отвечающих стандартному квантованию групп серий A, B, C, D.

Серия A.
Решение QYBE:

$$\widetilde{R} = \sum_{i \neq j} e_{ii} \otimes e_{jj} + q \sum_{i} e_{ii} \otimes e_{ii} + (q - q^{-1}) \sum_{i<j} e_{ij} \otimes e_{ji}.$$

Минимальный многочлен для R: $(R - q^{-1})(R + q) = 0$.

Комодули: $A_{t-q^{-1}}$ задается соотношениями $x_i x_j = q^{-1} x_j x_i$ при $i < j$; A_{t+q} — соотношениями $x_i x_j = -q x_j x_i$ при $i < j$ и $x_i^2 = 0$.

Серии B, C, D. Обозначения: $N = 2n + 1$ для B_n, $N = 2n$ для C_n, D_n; $i' = N + 1 - i$.

Решение QYBE:

$$\widetilde{R} = q \sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq i'}}^{N} e_{ii} \otimes e_{ii} + b_n + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j,\, j'}}^{N} e_{ii} \otimes e_{jj} + q \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i'}}^{N} e_{i'i'} \otimes e_{ii} +$$

$$+ (q - q^{-1}) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} e_{ij} \otimes e_{ji} - (q - q^{-1}) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} q^{\rho_i - \rho_j} \varepsilon_i \varepsilon_j e_{ij} \otimes e_{i'j'}.$$

Здесь

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{для } C_n, D_n; \\ e_{n+1,\,n+1} \otimes e_{n+1,\,n+1} & \text{для } B_n; \end{cases}$$

$$\varepsilon_i = 1, \qquad i = 1, \ldots, N, \qquad \text{для } B_n, D_n;$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i = 1, \ldots, N/2; \\ -1, & i = N/2+1, \ldots, N, \end{cases} \qquad \text{для } C_n;$$

$$(\rho_1, \ldots \rho_N) = \begin{cases} (n-1/2, n-3/2, \ldots, 1/2, -1/2, \ldots, -n+1/2) & \text{для } B_n; \\ (n, n-1, \ldots, 1, -1, \ldots, -n) & \text{для } C_n; \\ (n-1, n-2, \ldots, 1, 0, 0, -1, \ldots, -n+1) & \text{для } D_n. \end{cases}$$

Минимальный многочлен для R: $(R - q^{-1})(R + q)(R - \varepsilon q^{N-\varepsilon}) = 0$, где $\varepsilon = 1$ для B_n и D_n, $\varepsilon = -1$ для C_n при условии

$$(1 + q^{-2})(1 + \varepsilon q^{-\varepsilon + N - 1})(1 - \varepsilon q^{N - \varepsilon}) \neq 0.$$

При этом $R = q^{-1} P^- - q P^+ + \varepsilon q^{N-\varepsilon} P^0$, где P^-, P^+ и P^0 — проекторы рангов $\frac{N(N+1)}{2} - 1$, $\frac{N(N-1)}{2}$, 1 соответственно для серий B_n, C_n и $\frac{N(N+1)}{2}$, $\frac{N(N-1)}{2} - 1$, 1 для серии C_n.

Комодули. Ортогональный случай (B_n,D_n).
Симметрическая алгебра:

$$x_i x_j = q^{-1} x_j x_i, \qquad i < j, \quad i \neq j';$$

$$x_{i'} x_i = x_i x_{i'} + (q^{-2} - 1) \sum_{j=1}^{i'-1} q^{\rho_j - \rho_{i'}} x_j x_{j'} - \frac{q^{-2} - 1}{1 + q^{-N+2}} \sum_{j=1}^{N} q^{\rho_j - \rho_{i'}} x_j x_{j'}.$$

Пример. При $N=3$ соотношения в симметрической алгебре квантового ортогонального пространства имеют вид

$$x_1x_2=q^{-1}x_2x_1, \qquad x_2x_3=q^{-1}x_3x_2, \qquad x_1x_3-x_3x_1=(q^{1/2}-q^{-1/2})x_2^2.$$

Внешняя алгебра:

$$x_i^2=0, \qquad i\neq i',$$
$$x_ix_j=-qx_jx_i, \qquad i<j, \quad i\neq j';$$
$$x_{i'}x_i=q^{-2}x_ix_{i'}+(q^{-2}-1)\sum_{j=1}^{i'-1}q^{\rho_j-\rho_{i'}}x_jx_{j'}-\frac{q^{-2}-1}{1+q^{-N}}\sum_{j=1}^{N}q^{\rho_j-\rho_{i'}}x_jx_{j'}.$$

Пример. Соотношения во внешней алгебре квантового ортогонального пространства при $N=3$ имеют вид

$$x_1^2=x_3^2=0,$$
$$x_1x_2=-qx_2x_1, \qquad x_2x_3=-qx_3x_2,$$
$$x_1x_3=q^{-2}x_3x_1+q(q^{-1/2}-q^{1/2})x_2^2.$$

Симплектический случай (C_n).

$$x_ix_j=q^{-1}x_jx_i, \qquad i<j, \quad i\neq j';$$
$$x_{i'}x_i=x_ix_{i'}+(q^{-2}-1)\sum_{j=1}^{i'-1}q^{\rho_j-\rho_{i'}}\varepsilon_{i'}\varepsilon_jx_jx_{j'}, \qquad i<i'.$$

Пример. При $N=4$ соотношения в координатной алгебре квантового симплектического пространства имеют вид:

$$x_1x_2=q^{-1}x_2x_1, \quad x_1x_3=q^{-1}x_3x_1, \quad x_2x_4=q^{-1}x_4x_2, \quad x_3x_4=q^{-1}x_4x_3,$$
$$x_2x_3=q^{-2}x_3x_2+(q^{-1}-q)x_1x_4, \quad x_4x_1=q^2x_1x_4$$

Напомним, что R-матрица для серии A была вычислена нами в 1.4.4, другие же R-матрицы можно вычислять индуктивно (см. [93]), используя соотношение $\Delta^{\mathrm{op}}(x)R=R\Delta(x)$ для подходящего x из квантового дубля $\mathcal{D}(U_h\mathfrak{b}_+)$.

Введем матрицу $C=C_0q^\rho$, где $(C_0)_{ij}=\varepsilon_i\delta_{i'j}$, $\rho=\mathrm{diag}(\rho_1,\ldots,\rho_N)$, $i,j=1,\ldots,N$. Отметим, что $C^2=\varepsilon E$. По определению для серий B,C,D антипод в M_R задается формулой $S(Z)=CZ^tC^{-1}$. Полученные таким образом алгебры Хопфа называются соответственно $\mathrm{SO}_q(2n+1)$, $\mathrm{Sp}_q(2n)$, $\mathrm{SO}_q(2n)$. Легко видеть, что $S^2(Z)=(CC^t)Z(CC^t)^{-1}$.

3. Вещественные формы $\mathrm{SL}_q(n)$. Напомним, что вещественной формой алгебры Хопфа H называется задание отображения $*$: $H\to H$, являющегося антиавтоморфизмом алгебр и автоморфизмом коалгебр, причем $a^{**}=a$ и $S(S(a^*)^*)=a$.

Рассмотрим квантовые группы серии A.

1. Если $q \in \mathbb{C}$ и $|q|=1$, то $\overline{R}=R^{-1}$. Поэтому из $RZ\otimes Z=Z\otimes ZR$ следует $RZ^*\otimes Z^*=Z^*\otimes Z^*R$ и $Z^*=UZU^{-1}$, где U — диагональная матрица такая, что $U\overline{U}=E=\overline{U}U$. Применяя автоморфизм вида $z_i^j \mapsto \alpha_i\alpha_j^{-1}z_i^j$, можно считать $U=E$. Итак, при $|q|=1$ имеем антиинволюцию $z_i^j \mapsto z_i^j$, полученная вещественная форма называется $\mathrm{SL}_q(n, \mathbb{R})$.

2. Если $q \in \mathbb{R}$, то $\overline{R}=R$ и $Z^*=US(Z^t)U^{-1}$, где $U \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Действуя автоморфизмом $z_i^j \mapsto \alpha_i\alpha_j^{-1}z_i^j$, можно привести матрицу U к диагональной форме: $U=\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i=\pm 1$. В результате получается антиинволюция $z_i^j \mapsto \varepsilon_i\varepsilon_j^{-1}S(z_j^i)$, соответствующая вещественная форма называется $\mathrm{SO}_q(n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Когда все $\varepsilon_i=1$, эта квантовая группа обозначается $\mathrm{SO}_q(n)$.

Аналогично получаются вещественные формы $\mathrm{Sp}_q(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_q(n, n)$ $(N=2n)$, $\mathrm{SO}_q(n, n+1)$ $(N=2n+1)$ и $\mathrm{SO}_q(n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ с $\varepsilon=\pm 1$, когда $q \in \mathbb{R}$. Компактная форма последней квантовой группы есть $\mathrm{SO}_q(n)$ и получается при $\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_n=1$.

4. От M_R к квантованию $U\mathfrak{g}$. Отметим прежде одно обстоятельство, не имеющее классического аналога. Каждая линейная алгебраическая группа (по определению) есть подгруппа в $\mathrm{GL}(n)$ для подходящего n. Но координатные алгебры квантовых групп $\mathrm{SO}_q(n)$, $\mathrm{Sp}_q(n)$ суть подалгебры разных M_R. Это — иллюстрация тезиса «квантование снимает вырождение».

Пусть $k[G_q]$ есть подалгебра M_R. Квантование U_R универсальной обертывающей $U\mathfrak{g}$ $(\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\, G)$ получается в результате следующей процедуры. Рассмотрим подалгебру U_R в $M_R^*=\mathrm{Hom}_k(M_R, k)$, порожденную элементами $l_{ij}^{\pm}$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$\langle L^{\pm}, \underbrace{Z\otimes\ldots\otimes Z}_{k\text{раз}}\rangle = R_1^{\pm}\ldots R_k^{\pm}, \tag{1}$$

где $L^{\pm}=(l_{ij}^{\pm})$, $R^+=RP$ и $R^-=R^{-1}P$, $R_i^{\pm}=1\otimes\ldots\otimes R^{\pm}\otimes\ldots\otimes 1$, $R_i^{\pm}$ действует на i-й и $(i+1)$-й аргументы.

Лемма 2.5. 1. *Корректность задания соотношений в алгебре U посредством* (1) *равносильна равенству* $\mathrm{BE}(R)=0$.

2. *Алгебра U_R является биалгеброй с коумножением $\Delta(L^{\pm})=L^{\pm}\otimes \otimes L^{\pm}$ и коединицей $\varepsilon(L^{\pm})=E$. В U_R выполнены соотношения*

$$R^+L_1^{\pm}L_2^{\pm}=L_2^{\pm}L_1^{+}R^+, \qquad R^+L_1^{+}L_2^{-}=L_2^{-}L_1^{+}R^+.$$

Поскольку в случае стандартного квантования групп классических серий матрица $\widetilde{R}=PR$ (решение (YB)) является верхнетреугольной и можно считать, что $\det \widetilde{R}=1$, матрицы L^+ и L^- будут соответственно нижне- и верхнетреугольными, а $l_{ii}^+l_{ii}^-=l_{ii}^-l_{ii}^+=1$ и $l_{11}^+\ldots l_{nn}^+=1$. Итак, алгебра U_R имеет «нужное» количество образующих.

Теорема 2.6. *Пусть $\widehat{U}_R$ есть расширение U_R посредством добавления элементов $\log l_{ii}^{+}$. Тогда для R-матриц классических серий, нормированных так, чтобы $\det \widetilde{R} = 1$, биалгебры $\widehat{U}_R$ и $U_q\mathfrak{g}$ изоморфны.*

Доказательство состоит в прямом вычислении (см. [47]). Например, для $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2)$ имеем

$$L^{+} = \begin{pmatrix} q^{H} & 0 \\ (q-q^{-1})X^{-} & q^{-H} \end{pmatrix}, \qquad L^{-} = \begin{pmatrix} q^{-H} & -(q-q^{-1})X^{+} \\ 0 & q^{H} \end{pmatrix}.$$

5. Универсальные кодействующие биалгебры. Преимущество вышеизложенного подхода состоит в явном описании определяющих соотношений в квантовой (полу)группе, что облегчает исследование ее свойств. Однако появление в этой картине R-матрицы окружено тайной. Поясним, что если мы хотим написать R-матрицу для заданной биалгебры Ли, то нужно найти квантование $U\mathfrak{g}$ (при этом конструкция квантового дубля не всегда оказывается пригодной). Упомянутое же выше индуктивное вычисление довольно утомительно.

Другой способ построения квантовых полугрупп основан на рассмотрении группы $\mathrm{GL}(n)$ как группы автоморфизмов (соответственно, $\mathrm{Mat}(n)$ — как полугруппы эндоморфизмов) n-мерного векторного пространства V. При этом $k[\mathrm{GL}(n)]$ кодействует на $k[V]$. Предлагается деформировать последнюю алгебру и восстановить деформацию $\mathrm{GL}(n)$ или $\mathrm{Mat}(n)$ из требования кодействия.

Теорема 2.7. *Пусть задано $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha = 1, \ldots, m\}$ — конечное семейство алгебр вида*

$$A_\alpha = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / (I_\alpha),$$

где I_α — конечномерное подпространство, порождающее идеал. Тогда существуют единственная алгебра $M(\mathcal{A})$ и семейство кодействий, являющихся гомоморфизмами алгебр,

$$\delta_\alpha\colon A_\alpha \to M(\mathcal{A}) \otimes A_\alpha, \qquad \delta_\alpha(x_i) = \sum_{j=1}^{n} z_i^j \otimes x_j$$

универсальные в следующем смысле. Если имеется алгебра N и семейство кодействий, являющихся гомоморфизмами алгебр,

$$\delta'_\alpha\colon A_\alpha \to N \otimes A_\alpha, \qquad \delta'_\alpha(x_i) = \sum_{j=1}^{n} u_i^j \otimes x_j,$$

($U = (u_i^j) \in \mathrm{Mat}(n, N)$), то существует единственный гомоморфизм алгебр $\varphi\colon M(\mathcal{A}) \to N$ такой, что все диаграммы

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "\delta_\alpha"] \arrow[dr, "\delta'_\alpha"'] & M(\mathcal{A}) \otimes A_\alpha \arrow[d, "\varphi \otimes 1"] \\ & N \otimes A_\alpha \end{tikzcd}$$

коммутативны.

Вместо доказательства рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть $A = k\langle x, y\rangle/(xy - q^{-1}yx)$. Будем искать универсальную кодействующую в виде факторалгебры $k\langle a, b, c, d\rangle/(*)$ по таким соотношениям, чтобы сопоставление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

продолжалось до эндоморфизма алгебры A. Из соотношения $xy = q^{-1}yx$ имеем

$$(a \otimes x + b \otimes y)(c \otimes x + d \otimes y) = q^{-1}(c \otimes x + d \otimes y)(a \otimes x + b \otimes y).$$

Заметив, что базис в A_2 образован x^2, xy, y^2, раскрываем скобки и приравниваем коэффициенты:

$$ac = q^{-1}ca, \qquad bd = q^{-1}db, \qquad ad - da = q^{-1}cb - qbc.$$

Очевидно, что полученная алгебра M не является коммутативной при $q = 1$. Рассмотрим деформацию внешней алгебры $B = k\langle \xi, \eta\rangle/(\xi\eta + q\eta\xi, \xi^2, \eta^2)$ и построим алгебру $M(A, B)$, кодействующую одновременно на A и B:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Получим соотношения

$$ab = q^{-1}ba, \qquad cd = q^{-1}dc, \qquad ad - da = -qcb + q^{-1}bc.$$

Если $q = 1$, то $M(A, B) \cong k[\mathrm{Mat}(n)]$. При $q^2 \neq -1$ получаем полный набор коммутационных соотношений между a, b, c, и d (ибо $ad - da = (q^{-1} - q)bc$ и $bc = cb$). В противном же случае «одного соотношения не хватает» и размерность алгебры $M(A, B)$ оказывается больше стандартной.

В случае, когда все алгебры семейства $\mathcal{A}$ *квадратичны*, т. е. $I_\alpha \subset V \otimes V$, можно явно описать пространство соотношений в $M(\mathcal{A})$. Если алгебра $A = \mathbb{T}(V)/(I)$ квадратична, то двойственная к ней квадратичная алгебра определяется так: $A^! = \mathbb{T}(V^*)/(I^\perp)$, где $I^\perp \subset V^* \otimes V^*$ — аннулятор I. Пусть базис в V есть $x_1, \ldots, x_n$, а двойственный базис в V^* — $\chi^1, \ldots, \chi^n$. Отождествим $x_i \otimes \chi^j$ с z_i^j (для всех α) и будем писать $a \bullet b = S_{(23)}(a \otimes b) \in k\langle Z\rangle_2$ для $a \in (A_1)^{\otimes 2}$ и $b \in (A_1^!)^{\otimes 2}$. Тогда

$$M(\mathcal{A}) \cong k\langle Z\rangle \Big/ \Big(\sum_\alpha I_\alpha \bullet I_\alpha^\perp\Big).$$

Определение 2.8. Алгебра $M(\mathcal{A})$ называется *универсальной кодействующей* на семейство $\mathcal{A}$.

Следствие 2.9. *Алгебра $M = M(\mathcal{A})$ естественно наделяется структурой биалгебры.*

Доказательство. Из свойства универсальности следует существование морфизмов алгебр $\Delta\colon M \to M \otimes M$ и $\varepsilon\colon M \to k$ таких, что коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "\delta_\alpha"] \arrow[d, "\delta_\alpha"'] & M \otimes A_\alpha \arrow[d, "\Delta \otimes 1"] \\ M \otimes A_\alpha \arrow[r, "1 \otimes \delta_\alpha"] & M \otimes M \otimes A_\alpha \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "\delta_\alpha"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & M \otimes A_\alpha \arrow[d, "\varepsilon \otimes 1"] \\ & A_\alpha \end{tikzcd}$$

Кроме того, представив $M(\mathcal{A})$ в виде $k\langle Z\rangle/(I_M)$, имеем

$$\Delta(z_i^j) = \sum z_i^k \otimes z_k^j, \qquad \varepsilon(z_i^j) = \delta_i^j.$$

6. Нестандартные квантования Mat(n). Примеры.

Пример 1 (квантование А. Садбери [126]). Пусть $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ — матрицы параметров, причем

$$p_{ij}p_{ji} = q_{ij}q_{ji} = q_{ii} = p_{ii} = 1.$$

Положим

$$A_Q = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/(x_i x_j - q_{ij}^{-1} x_j x_i),$$
$$B_P = k\langle \xi_1, \ldots, \xi_n\rangle/(\xi_i \xi_j + p_{ij}\xi_j\xi_i, \xi_i^2).$$

Эти алгебры суть простейшие некоммутативные аналоги симметрической и грассмановой алгебр из предыдущего примера. Рассмотрим универсальную кодействующую алгебру $M(A_Q, B_P) = M_{P,Q}$.

Частными случаями здесь являются двухпараметрическая деформация $k[\mathrm{Mat}(n)]$, предложенная в [80] и [132], и нестандартная однопараметрическая деформация из [74]. Именно, в первом случае надо положить

$$p_{ij} = p^{\mathrm{sgn}(j-i)} \quad \text{и} \quad q_{ij} = q^{\mathrm{sgn}(j-i)},$$

а во втором

$$p_{ij} = 1 \quad \text{и} \quad q_{ij} = q^{\mathrm{sgn}(j-i)}.$$

Полагая в первом случае $p = q$, получаем стандартную однопараметрическую деформацию В. Г. Дринфельда и М. Джимбо.

Вычислим соотношения в $M_{P,Q}$, пользуясь приведенными выше соображениями. Для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и $1 \leqslant k < l \leqslant n$ имеем

$$z_i^k z_j^k - q_{ij}^{-1} z_j^k z_i^k,$$
$$z_i^k z_i^l - p_{kl}^{-1} z_i^l z_i^k,$$
$$z_i^k z_j^l - q_{ij}^{-1} q_{kl} z_j^l z_i^k + q_{kl} z_i^l z_j^k - q_{ij}^{-1} z_j^k z_i^l,$$
$$z_i^k z_j^l - p_{ij} p_{kl}^{-1} z_j^l z_i^k + p_{kl}^{-1} z_i^l z_j^k - p_{ij} z_j^k z_i^l.$$

Пример 2. Пусть $n = 2$,

$$A = k\langle x, y\rangle/(xy - yx + qy^2),$$
$$B = k\langle \xi, \eta\rangle/(\xi\eta + \eta\xi, p\xi\eta + \xi^2, \eta^2) \cong (k\langle u, v\rangle/(uv - vu - pu^2))^!.$$

Тогда $M(A, B) = M_{J_{p,q}}$ — «жорданова» квантовая полугруппа.

Нетрудно обобщить этот рецепт на суперслучай. Рассмотрим суперпространство $V = k^{m|n}$. Пусть $I = (I_1, \ldots, I_{n+m})$ — его формат, т. е. четность координаты x_i есть $\widetilde{x_i} = I_i \in \mathbb{Z}_2$. Рассмотрев деформации суперсимметрической и суперкососимметрической алгебр пространства V

$$A_Q = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/(x_i x_j - (-1)^{I_i I_j} q_{ij}^{-1} x_j x_i),$$
$$B_P = k\langle \xi_1, \ldots, \xi_n\rangle/(\xi_i \xi_j + (-1)^{I_i I_j} p_{ij} \xi_j \xi_i),$$

легко получить универсальную кодействующую супербиалгебру, являющуюся деформацией $\mathrm{Mat}(m|n)$. Отметим, что четность образующей z_i^j есть $I_i + I_j$.

Итак, запас примеров существенно расширился. Интересно выяснить теперь, каким образом они связаны с предыдущей конструкцией и результатами гл. 1. Отметим, что к преимуществам описанного способа относится возможность исследования свойств сложного объекта — универсальной кодействующей — исходя из свойств более простых образований. Это хорошо видно на примере квантового детерминанта.

7. Взаимосвязь универсальных кодействующих и R-матричных биалгебр.

Определение 2.10. Биалгебра $M = k\langle Z\rangle/(I_M)$, порожденная элементами мультипликативной матрицы Z, называется *слабой R-матричной алгеброй*, если существует такая невырожденная матрица $R \in \mathrm{Mat}(n^2, k)$, что подпространство I_M порождается элементами матрицы $R(Z \otimes Z) - (Z \otimes Z)R$, в символической записи

$$M = k\langle Z\rangle/(R(Z \otimes Z) - (Z \otimes Z)R).$$

Определение 2.11. Биалгебра $M = k\langle Z\rangle/(I_M)$ называется *универсальной*, если существует такое семейство $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha = 1, \ldots, m\}$, что $M \cong M(\mathcal{A})$.

Итак, конструкция из п. 2.2.1 позволяет строить слабые R-матричные алгебры, а из п. 2.2.5 — универсальные.

Пусть $M = k\langle Z\rangle/(I_M)$. Определим множество

$$\mathcal{R}(M) = \{S \in \mathrm{Mat}(n^2, k) \mid SZ \otimes Z - Z \otimes ZS \in I_M\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{R}(M)$ — алгебра. Инвариантное определение ее таково. Пусть $V \otimes V$ есть M-комодуль, отвечающий мультипликативной матрице $Z \otimes Z$, тогда $\mathcal{R}(M) = \mathrm{End}_{M\text{-comod}}(V \otimes V)$.

Теорема 2.12. *Пусть все алгебры A_α квадратичны и*

$$V^{\otimes 2} = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} I_\alpha.$$

Тогда

а) *$\mathcal{R}(M)$ порождается проекторами P_α: $(k^n)^{\otimes 2} \to I_\alpha$;*

б) *$M(\mathcal{A})$ есть слабая R-матричная алгебра, если $m \leqslant \operatorname{Card} k^\times$, причем в качестве матрицы R можно взять $\sum \lambda_\alpha P_\alpha$, где все $\lambda_\alpha \neq 0$ различны.*

Покажем, что из условия $V^{\otimes 2} = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} I_\alpha$ следует, что $M(\mathcal{A})$ есть слабая R-матричная алгебра. Возьмем m различных ненулевых элементов k и рассмотрим оператор $R = \sum \lambda_\alpha P_\alpha$. Обозначим

$$R_\alpha = \prod_{\beta \neq \alpha} (R - \lambda_\beta).$$

Легко видеть, что M_R кодействует на A_α тогда и только тогда, когда

$$\langle R_\alpha Z \otimes Z(R - \lambda_\alpha)\rangle \subset \langle R(Z \otimes Z) - (Z \otimes Z)R\rangle .$$

Но

$$R_\alpha Z \otimes Z(R - \lambda_\alpha) = 0 \bmod (R(Z \otimes Z) - (Z \otimes Z)R),$$

поскольку

$$R_\alpha(R(Z \otimes Z) - (Z \otimes Z)R) = R_\alpha Z \otimes Z(R - \lambda_\alpha).$$

Подобрав многочлены $f_\alpha(t)$ такие, что

$$\sum_\alpha f_\alpha(t) \prod_{\beta \neq \alpha} (t - \lambda_\beta) = 1,$$

видим, что

$$\langle R(Z \otimes Z) - (Z \otimes Z)R\rangle \subset I_{\mathcal{A}}.$$

Итак, $M(\mathcal{A}) = M_R$.

Теорема 2.13. 1. *Пусть M есть слабая R-матричная алгебра, заданная полупростым оператором R. Тогда M является универсальной кодействующей на семейство*

$$\mathcal{A} = \{A_\lambda = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / (\operatorname{Ker}(R - \lambda_\alpha)) \mid \lambda \text{ — собственное значение } R\}.$$

2. *Если оператор R не полупрост, то M не является универсальной.*

Доказательства этих теорем основаны на рассмотрении жордановой формы оператора R и технически довольно сложны.

Пример. Пусть M есть универсальная кодействующая на две квадратичные алгебры A и B и выполнено условие теоремы 2.12. Пусть P_A, P_B — проекторы на I_A и I_B. Положим $R_0 = P_A - P_B$; то-

гда $\mathcal{R}(M(A, B))$ порождается R_0, причем $R_0^2 = 1$. Теперь при условии $p_{ij}q_{ij} \neq -1$ для всех $i < j$ нетрудно указать слабую R-матрицу для $M_{P,Q}$:

$$(R_0)_{ii}^{ii} = 1,$$
$$(R_0)_{ij}^{ij} = -(R_0)_{ji}^{ji} = \frac{1 - p_{ij}q_{ij}}{1 + p_{ij}q_{ij}},$$
$$(R_0)_{ij}^{ji} = \frac{2p_{ij}}{1 + p_{ij}q_{ij}}, \qquad (R_0)_{ji}^{ij} = \frac{2q_{ij}}{1 + p_{ij}q_{ij}},$$

Все остальные элементы равны 0.

Более наглядно R_0 можно представить в виде следующей подматрицы, называемой (i, j)-*фрагментом*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - p_{ij}q_{ij}}{1 + p_{ij}q_{ij}} & \frac{2p_{ij}}{1 + p_{ij}q_{ij}} & 0 \\ 0 & \frac{2p_{ij}}{1 + p_{ij}q_{ij}} & \frac{p_{ij}q_{ij} - 1}{1 + p_{ij}q_{ij}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Строки и столбцы этой подматрицы занумерованы последовательностью (ii, ij, ji, jj), $i < j$.

Легко убедиться, что R_0, вообще говоря, не является решением (BE).

Скажем, что слабая R-матричная алгебра является *сильной R-матричной*, если в качестве задающего ее оператора R можно выбрать решение (BE).

Теорема 2.14. *Пусть $M = M(A, B)$ — слабая R-матричная алгебра. Тогда имеется не более двух, с точностью до пропорциональности, матриц из $\mathcal{R}(M)$, задающих на $M(A, B)$ структуру сильной R-матричной алгебры.*

Доказательство. Рассмотрев равенство

$$\mathrm{BE}(R_0 + \lambda) = \mathrm{BE}(R_0) + \lambda^2((R_0)_{12} - (R_0)_{23}),$$

получим требуемое утверждение.

Прямое вычисление позволяет выяснить вопрос о сильной R-матричности алгебры $M_{P,Q}$.

Теорема 2.15. *Алгебра $M_{P,Q}$ является сильной R-матричной тогда и только тогда, когда $p_{ij}q_{ij} = c^{\mathrm{sgn}(j-i)}$ для некоторого $c \in k^\times$ и $c \neq -1$. Матрицы*

$$R_\pm = \frac{1 - c^{\pm 1}}{2} + \frac{1 + c^{\pm 1}}{2} R_0$$

удовлетворяют (BE) *и задают структуру сильной R-матричной алгебры на $M_{P,Q}$. Кроме того,*

$$(R_\pm - 1)(R_\pm + c^{\pm 1}) = 0.$$

Выпишем явно (i, j)-фрагменты матриц R_+ и R_-.

$$R_+\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-c & p_{ij} & 0 \\ 0 & q_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_-\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{ij}^{-1} & 0 \\ 0 & p_{ij}^{-1} & 1-c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим алгебру $M_{P,Q}$, параметры которой удовлетворяют дополнительному соотношению $p_{ij}q_{ij} = c^{\operatorname{sgn}(j-i)}$, через $M_{P,Q,c}$. Это обозначение симметрично, но избыточно, так как деформация имеет всего $(n^2 - n + 2)/2$ независимых параметров.

Нетрудно видеть, что $\tilde{R}$-матрица Садбери является решением QYBE, отвечающим следующему решению $r_S \in \Lambda^2 \mathrm{gl}(n)$ модифицированного классического уравнения Янга–Бакстера:

$$r_S = r_0 + r_{\mathrm{st}} = \sum_{i<j} (\alpha_{ij} - 1) e_{ii} \wedge e_{jj} + \frac{1}{2} \sum_{i<j} e_{ij} \wedge e_{ji}.$$

Здесь $q_{ij} = e^{h\alpha_{ij}/2}$, $p_{ij}q_{ij} = e^h$ при $i < j$.

Жорданова квантовая полугруппа $M_{J,p,q}$ является сильной R-матричной:

$$R_J = \begin{pmatrix} 1 & p & -p & pq \\ 0 & 0 & 1 & -q \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При этом $R_J^2 = 1$.

Итак, получается некоторый способ построения (постоянных) решений (BE): по семейству квадратичных алгебр строится универсальная кодействующая, которая при хорошем стечении обстоятельств оказывается сильной R-матричной, давая тем самым решения (BE).

§ 3. Квантовый детерминант и антипод

1. Хопфова оболочка. Чтобы из квантовой полугруппы получить квантовую группу, на соответствующей биалгебре надо задать антипод. В классическом случае (от $k[\mathrm{Mat}(n)]$ к $k[\mathrm{GL}(n)]$) необходимо лишь обратить детерминант. В общем же квантовом случае аналог детерминанта может быть и не определен.

Имеется следующая общая конструкция изготовления алгебры Хопфа из биалгебры.