удовлетворяют (BE) *и задают структуру сильной R-матричной алгебры на $M_{P,Q}$. Кроме того,*

$$(R_\pm - 1)(R_\pm + c^{\pm 1}) = 0.$$

Выпишем явно (i, j)-фрагменты матриц R_+ и R_-.

$$R_+\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-c & p_{ij} & 0 \\ 0 & q_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_-\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{ij}^{-1} & 0 \\ 0 & p_{ij}^{-1} & 1-c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим алгебру $M_{P,Q}$, параметры которой удовлетворяют дополнительному соотношению $p_{ij}q_{ij} = c^{\operatorname{sgn}(j-i)}$, через $M_{P,Q,c}$. Это обозначение симметрично, но избыточно, так как деформация имеет всего $(n^2 - n + 2)/2$ независимых параметров.

Нетрудно видеть, что $\tilde{R}$-матрица Садбери является решением QYBE, отвечающим следующему решению $r_S \in \Lambda^2 \mathrm{gl}(n)$ модифицированного классического уравнения Янга–Бакстера:

$$r_S = r_0 + r_{\mathrm{st}} = \sum_{i<j} (\alpha_{ij} - 1) e_{ii} \wedge e_{jj} + \frac{1}{2} \sum_{i<j} e_{ij} \wedge e_{ji}.$$

Здесь $q_{ij} = e^{h\alpha_{ij}/2}$, $p_{ij}q_{ij} = e^h$ при $i < j$.

Жорданова квантовая полугруппа $M_{J,p,q}$ является сильной R-матричной:

$$R_J = \begin{pmatrix} 1 & p & -p & pq \\ 0 & 0 & 1 & -q \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При этом $R_J^2 = 1$.

Итак, получается некоторый способ построения (постоянных) решений (BE): по семейству квадратичных алгебр строится универсальная кодействующая, которая при хорошем стечении обстоятельств оказывается сильной R-матричной, давая тем самым решения (BE).

§ 3. Квантовый детерминант и антипод

1. Хопфова оболочка. Чтобы из квантовой полугруппы получить квантовую группу, на соответствующей биалгебре надо задать антипод. В классическом случае (от $k[\mathrm{Mat}(n)]$ к $k[\mathrm{GL}(n)]$) необходимо лишь обратить детерминант. В общем же квантовом случае аналог детерминанта может быть и не определен.

Имеется следующая общая конструкция изготовления алгебры Хопфа из биалгебры.

Теорема 2.16. 1. *Пусть M — биалгебра, порожденная элементами мультипликативной матрицы. Рассмотрим категорию морфизмов биалгебр φ: $M \to G$, где G — алгебра Хопфа. Эта категория имеет инициальный объект, называемый хопфовой оболочкой M.*

2. *Если $M = M(\mathcal{A})$ и φ: $M(\mathcal{A}) \to G(\mathcal{A})$ — хопфова оболочка, то кодействия $(\varphi \otimes 1) \circ \delta_\alpha$: $A_\alpha \to G(\mathcal{A}) \otimes A_\alpha$ универсальны в смысле теоремы* 2.9.

Набросок доказательства. Пусть $M = k\langle Z\rangle/(I_M)$. Положим $G = k\langle Z_0, Z_1, \ldots\rangle/(I_G)$, где соотношения, по которым происходит факторизация, таковы:

— соотношения для Z, записанные для Z_{2s},

— соотношения для Z, записанные для Z_{2s+1}, с обращенным порядком умножения,

— для s четного $Z_s Z_{s+1} - E$, $Z_{s+1} Z_s - E$,

— для s нечетного $Z_s^t Z_{s+1}^t - E$, $Z_{s+1}^t Z_s^t - E$.

Структура алгебры Хопфа на G такова: $\Delta(Z_s) = Z_s \otimes Z_s$ при четном s, $\Delta(Z_s) = (Z_s^t \otimes Z_s^t)^t$ при нечетном s; $\varepsilon(Z_s) = E$; $S(Z_s) = Z_{s+1}$.

Появление здесь транспонирования вызвано следующим равенством в алгебре Хопфа: $S(XY) = (S(Y)^t S(X)^t)^t$ для матриц X и Y с элементами из этой алгебры. Отметим, что если антипод задан на образующих, то на всю алгебру он распространяется по антигомоморфности. Легко проверить корректность такого распространения.

Аналогичное утверждение может быть доказано и в суперслучае.

Ввиду громоздкости этой конструкции, обратимся к случаю, когда в квантовой полугруппе M имеется квантовый детерминант.

2. Квантовый детерминант. Напомним, что градуированная алгебра B над полем k называется *фробениусовой* ранга d, если она конечномерна, $B = \bigoplus_{i=1}^{d} B_i$, причем $\dim_k B_d = 1$ и умножение

$$B_i \otimes B_{d-i} \to B_d$$

есть невырожденное спаривание для всех i.

Пусть биалгебра M кодействует на фробениусовой алгебре $B = k\langle \xi_1, \ldots, \xi_n\rangle/(I_B)$ по правилу $\delta_B(\xi) = Z \otimes \xi$. Выберем образующую ω в B_d и определим *квантовый детерминант* как такой элемент $\det_{M,B}$, что $\delta_B(\omega) = \det_{M,B} \otimes \omega$. Будем называть M *алгеброй с детерминантом.*

Теорема 2.17. *Пусть M — слабая R-матричная алгебра:*

$$M = k\langle Z\rangle/(R(Z \otimes Z) - (Z \otimes Z)R).$$

Положим

$$M^t = k\langle Y\rangle/(R^t Y \otimes Y - Y \otimes YR^t).$$

Пусть

1) M — *алгебра с детерминантом* D;

2) M^t — *алгебра с детерминантом* D^t;

3) *отображение* τ: $M^t \to M$, $\tau(Y) = Z^t$, *переводит* D^t *в* D.

Тогда алгебра $M\langle D^{-1}\rangle$, *полученная добавлением некоммутативного формального обратного элемента к* D, *является алгеброй Хопфа, изоморфной хопфовой оболочке* M.

Набросок доказательства. Из условий 1 и 2 вытекает наличие таких матриц V и W, что $ZV^t = D$ и $WZ^t = D^t$. Применив ко второму равенству τ и учитывая условие 3, получаем $\tau(W)Z = D$. Обратив D, положим

$$S(Z) = V^t D^{-1} = D^{-1}\tau(W),$$
$$S(D^{-1}) = D, \quad \Delta(D^{-1}) = D^{-1} \otimes D^{-1}$$

и $\varepsilon(D^{-1}) = 1$. Пользуясь слабой R-матричностью, докажем корректность задания S на образующих алгебры $M\langle D^{-1}\rangle$, после чего стандартно доказывается возможность продолжения S на всю алгебру $M\langle D^{-1}\rangle$.

Напомним, что если в биалгебре имеется антипод, то он единствен.

Замечание. Если предположить, что M есть сильная R-матричная алгебра, а минимальный многочлен R имеет степень 2, то можно проверить выполнение условий Оре. То есть справедливо

Предложение 2.18. *Существует такая матрица* $\Gamma \in \mathrm{Mat}(n, k)$, *что* $ZD\Gamma = \Gamma DZ$.

После этого можно вместо $M\langle D^{-1}\rangle$ рассмотреть локализацию $M_{(D)}$. Нехитрое доказательство этого предложения будет приведено в п. 4.1.2.

Пример. Для алгебры $M_{P,Q}$ комодуль B_P есть фробениусова алгебра. Отсюда

$$D = \det_{M, B_P} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_P(\sigma) z_1^{\sigma 1} \dots z_n^{\sigma n}.$$

Так как $(M_{P,Q})^t = M_{Q,P}$, то

$$D^t = \sum_{\rho \in S_n} \varepsilon_Q(\rho) y_1^{\rho 1} \dots y_n^{\rho n}.$$

Переходя для упрощения к $M_{P,Q,c}$, получаем следующее достаточное условие: если $[n]_c! = (1+c)(1+c+c^2)\dots(1+c+\dots+c^{n-1}) \neq 0$, то $\tau(D^t) = D$, и потому определена алгебра Хопфа $G_{P,Q,c} = M_{P,Q,c}\langle D^{-1}\rangle$. Антипод в ней задается следующей формулой:

$$S(z_j^i) = \varepsilon_P(j * \hat{j})\varepsilon_P^{-1}(i * \hat{i})|Z_i^{\hat{j}}|D^{-1} = \varepsilon_Q(\hat{i} * i)\varepsilon_Q^{-1}(\hat{j} * j)D^{-1}|Z_i^{\hat{j}}|,$$

где коэффициенты определяются из равенства

$$\xi_j \xi_1 \dots \widehat{\xi_j} \dots \xi_n = \varepsilon_P(j * \widehat{j}) \xi_1 \dots \xi_n,$$

в алгебре B_P, аналогично,

$$\xi_1 \dots \widehat{\xi_j} \dots \xi_n \xi_j = \varepsilon_Q(\widehat{j} * j) \xi_1 \dots \xi_n,$$

в алгебре B_Q, далее,

$$|Z_i^{\widehat{j}}| = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i)=j}} \varepsilon_P(\sigma) z_1^{\sigma 1} \dots \widehat{z_i^j} \dots z_n^{\sigma n}.$$

Для алгебры $M_{P,Q}$ можно указать похожие, но более громоздкие формулы.

Упомянутая в предложении 2.18 матрица Γ для M диагональна: $\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i = p_{i1} \dots p_{ii-1} q_{i+1i} \dots q_{ni}$.

3. Инвариант Крамера и квадрат антипода. Пусть B — фробениусова алгебра ранга d, $(\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_n^{(j)})$ — последовательность базисов B_1 и B_{d-1} соответственно, причем $\xi_k^{(2i)} \xi_l^{(2i+1)} = \delta_{kl} \omega$, а $\omega \in B_d$ — фиксированная образующая. Указанная последовательность однозначно определяется одним элементом. Пусть $j = 0$ и матрица C есть матрица перехода от $\{\xi_i^{(0)}\}$ к $\{\xi_i^{(2)}\}$, т. е. $\xi^{(2)} = C\xi^{(0)}$. Легко видеть, что при замене базиса $\{\xi_i^{(0)}\}$ матрица C заменится на сопряженную, следовательно, ее класс сопряженности является инвариантом фробениусовой алгебры, называемым *инвариантом Крамера.* (Высшие инварианты получаются посредством аналогичной процедуры из рассмотрения B_k и B_{d-k}.)

Пусть теперь $\delta_B(\xi^{(j)}) = Z_j \otimes \xi^{(j)}$. Тогда $Z_j Z_{j+1}^t = D$ и

$$Z_{2j} = C^j Z_0 C^{-j}, \qquad Z_{2j+1} = (C^t)^{-j} Z_1 (C^t)^j.$$

Поэтому $S(Z_0) = Z_1^t D^{-1}$ и

$$S^2(Z_0) = DS(Z_1)^t = D(Z_2^t D^{-1})^t = DCZ_0C^{-1}D^{-1}.$$

Предполагая, что $\Gamma DZ = ZD\Gamma$, получаем формулу для квадрата антипода: $S^2(Z) = (C\Gamma^{-1})Z(C\Gamma^{-1})^{-1}$.

Для алгебр $M_{P,Q}$ и $M_{P,Q,c}$ инвариант Крамера C есть диагональная матрица $C = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n)$, где $c_i = p_{1i} p_{2i} \dots p_{ni}$.

4. R-матричные алгебры с детерминантом. Д. И. Гуревичу [8] принадлежит следующий классификационный результат, относящийся к R-матричным алгебрам с детерминантом. Будем искать операторы R, удовлетворяющие условиям:

1) $\mathrm{BE}(R) = 0$;

2) $(R-1)(R+c) = 0$;

3) алгебра $B_R = k\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle / ((R+c)\xi \otimes \xi)$ фробениусова ранга 2.

Пусть $v = v^{kl} \xi_k \otimes \xi_l \in (B_R)_2$ — образующая. Рассмотрим проектор P: $V^{\otimes 2} \to (B_R)_2$, $P = -(1+c)^{-1}(R-1)$. Он имеет вид $P(\xi_i \otimes \xi_j) = u_{ij} v$ для некоторой матрицы u.

Теорема 2.19. *Следующие совокупности условий эквивалентны исходным условиям на R:*

1) $\sum u_{ij}v^{ij} = 1$, $uvu^t v^t = c(1+c)^{-2}$;

2) $\operatorname{tr} z = 1 + c^{-1}$, $c^{-1}(z^t)^{-1} = vzv^{-1}$, *где* $z = (1+c)uv^t$;

3) $\operatorname{tr} z = 1 + c^{-1}$ *и жорданова форма* z *вместе с любой клеткой, отвечающей собственному значению* λ, *содержит клетку того же размера, отвечающую собственному значению* $(\lambda c)^{-1}$ (*матрица* v, *осуществляющая подобие, отсюда определяется*).

Следствие 2.20. *Пусть* $k = \mathbb{C}$, $n = 2$. *Тогда в жордановом базисе* z *пара* (z, v) *может иметь один из следующих видов:*

1) $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $c \neq 1$;

2) $z = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & d \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, $c = 1$;

3) $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, v *любая*, $c = 1$.

Прямым вычислением легко убедиться в том, что с точностью до транспонирования первый случай приводит к $M_{p,q}(2)$ при $p = -ca/b$ и $q = -b/a$, а второй — к $M_{J\,p,q}(2)$ при $p = -d/b + \alpha$ и $q = d/b$. Третье семейство «порочно» с точки зрения размерности и поэтому не встречалось ранее.

5. Квантовый березиниан. Для определения квантового березиниана применяется его когомологическая интерпретация. Пусть биалгебра M кодействует на квадратичную супералгебру

$$B = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / (I_B).$$

Рассмотрим нечетно двойственную супералгебру

$$B^{\smile} = k\langle \xi_1, \ldots, \xi_n\rangle / (I_B^{\amalg}),$$

где $\widetilde{\xi}_i = \widetilde{x}_i + 1$, а $I_B^{\amalg}$ — ортогональное дополнение к I_B в смысле нечетного спаривания $\langle x_i, \xi_j\rangle = \delta_{ij}$. В тензорном произведении $K = B^{\smile} \otimes B$ рассмотрим канонический элемент $c = \sum \xi_i \otimes x_i$; отображение $d\colon K \to K$, $df = fc$, превращает K в комплекс. Пусть $H(K) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$. Легко установить, что $H(K)$ — одномерное пространство, порожденное элементом

$$\omega = \prod_{\widetilde{x}_j = 0} \xi_j \prod_{\widetilde{x}_j = 1} x_j \bmod (\operatorname{Im} d).$$

Рассмотрим хопфову оболочку G алгебры M. Она кодействует на K по правилу $\delta(x) = Z \otimes x$, $\delta(\xi) = S(Z)^{\mathrm{st}} \otimes \xi$; при этом $\delta(c) = 1 \otimes c$, и потому имеется кодействие $\delta_H\colon H(K) \to G \otimes H(K)$. По определению $\operatorname{Ber} Z$ — это такой элемент G, что $\delta_H(\omega) = \operatorname{Ber} Z \otimes \omega$.