§ 5. Деформации биалгебр

1. Деформации и их когомологическое описание.

Определение 2.25. Пусть A есть алгебра над полем k. Ее *деформацией* называется такая $k[[h]]$-алгебра A_h, что $A_h \cong A \otimes_k k[[h]]$ как векторные пространства над k и $A_h/hA_h \cong A$ как алгебры.

Если продолжить на $A[[h]]$ умножение в A, то мы получим *тривиальную деформацию* алгебры A.

Две деформации A_h и A'_h назовем *эквивалентными*, если существует $k[[h]]$-изоморфизм φ_h алгебр A_h и A'_h, индуцирующий на A тождественный автоморфизм.

Скажем, что алгебра A является *жесткой*, если всякая ее деформация эквивалентна тривиальной.

Можно представлять себе деформацию алгебры A с умножением m как введение на пространстве $A[[h]]$ умножения m_h, совпадающего в нулевом приближении с умножением m_0 в алгебре A:

$$m_h(a, b) = m_0(a, b) + \sum_{i>0} m_i(a, b)h^i.$$

Отображение m_1: $A[[h]] \otimes A[[h]] \to A[[h]]$ называется *инфинитезимальной деформацией*. Требование ассоциативности умножения m_h равносильно выполнению серии равенств ($k = 1, 2, \ldots$)

$$am_k(b, c) - m_k(ab, c) + m_k(a, bc) - m_k(a, b)c = \\ = \sum_{\substack{i+j=k \\ j \geqslant 1}} \left(m_i(m_j(a, b), c) - m_i(a, m_j(b, c))\right). \quad (\mathrm{ASS}_k)$$

В частности, при $k = 1$

$$am_1(b, c) - m_1(ab, c) + m_1(a, bc) - m_1(a, b)c = 0.$$

Это значит, что m_1 есть не что иное, как 2-коцикл Хохшильда: $m_1 \in HH^2(A, A)$.

Хорошо известно, что классы эквивалентности инфинитезимальных деформаций находятся в биективном соответствии с элементами $HH^2(A, A)$; и если $HH^2(A, A) = 0$, то алгебра A является жесткой.

Предположим, что теперь (A, m_0, Δ_0) есть биалгебра, и будем рассматривать ее деформации в классе биалгебр. Это означает, что на пространстве $A[[h]]$ вводится коумножение $\Delta_h = \Delta_0 + \sum \Delta_i h^i$. Нетрудно выписать необходимые и достаточные условия коассоциативности Δ_h в терминах Δ_i. В первом приближении

$$(\Delta_1 \otimes 1)\Delta_0(a) + (\Delta_0 \otimes 1)\Delta_1(a) - \\ - (1 \otimes \Delta_0)\Delta_1(a) - (1 \otimes \Delta_1)\Delta_0(a) = 0. \quad (\mathrm{COASS}_1)$$

Кроме того, нужно учесть, что Δ_h — гомоморфизм алгебр. Оказывается, все эти условия тоже допускают когомологическую интерпретацию.

2. Когомологии Хохшильда. Напомним вкратце определение когомологий Хохшильда для алгебр и для коалгебр. Пусть A есть алгебра над k, а M — A-бимодуль. Пусть $C_H^j(A, M) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes j}, M)$, а дифференциал d_H: $C_H^j(A, M) \to C_H^{j+1}(A, M)$ задается формулой

$$(d_H f)(a_1, \ldots, a_{j+1}) = a_1 f(a_2, \ldots, a_{j+1}) + \\ + \sum_{i=1}^{j} (-1)^i f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{j+1}) + (-1)^{j+1} f(a_1, \ldots, a_j) a_{j+1}.$$

По определению *когомологии Хохшильда* алгебры A с коэффициентами в M — $HH^j(A, M)$ — суть когомологии комплекса $C_H^{\cdot}(A, M)$.

Пример. Если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, то $HH^2(U\mathfrak{g}, U\mathfrak{g}) = 0$. Поэтому структура алгебры на $U\mathfrak{g}$ является жесткой. Это означает, что после подходящего выбора образующих коммутационные соотношения в $U_h\mathfrak{g}$ станут классическими.

Другую важную серию примеров жестких алгебр доставляют *сепарабельные* алгебры (они характеризуются условием $HH^1(A, M) = 0$ для любого модуля M; эквивалентно, k-алгебра является сепарабельной, если она изоморфна конечному произведению колец матриц над алгебрами с делением, центры которых суть сепарабельные расширения k).

Очевидно, что левая часть уравнения (ASS_k) есть в точности $(d_H m_k)(a, b, c)$. Правая же часть есть некоторый 3-коцикл. Можно показать, что отображение $m = m_0 + m_1 h + \ldots + m_{n-1} h^{n-1}$ задает структуру ассоциативной $k[h]/(h^n)$-алгебры на $A[h]/(h^n)$ тогда и только тогда, когда выполнены уравнения $(\mathrm{ASS}_1), \ldots (\mathrm{ASS}_{n-1})$; в этом случае правая часть (ASS_k) является кограницей в том и только том случае, когда $m(a, b)$ поднимается до структуры ассоциативной $k[h]/(h^{n+1})$-алгебры на $A[h]/(h^{n+1})$. Подчеркнем, что далеко не всякая инфинитезимальная деформация из $HH^2(A, A)$ поднимается до ассоциативного умножения. Говорят, что уравнения (ASS) являются *препятствием* к такому поднятию.

Определим теперь «ко-Хохшильдов» комплекс, отвечающий за деформации коалгебр. Пусть M есть бикомодуль над коалгеброй A (ρ: $M \to M \otimes A$, λ: $M \to A \otimes M$ — соответствующие кодействия). Положим $C_C^j(A, M) = \mathrm{Hom}_k(M, A^{\otimes j})$. Не совсем привычная формула для дифференциала списывается с d_H:

$$(d_C f)(x) = (f \otimes 1)\rho(x) + \\ + \sum_{i=1}^{j} (-1)^i (1 \otimes \ldots \otimes \Delta \otimes \ldots \otimes 1) f(x) + (-1)^{j+1} (1 \otimes f)\lambda(x)$$

для $f \in C_C^j(A, M)$, $x \in M$, здесь Δ в $1 \otimes \ldots \otimes \Delta \otimes \ldots \otimes 1$ стоит на i-м месте. Положим $CH^j(A, M) = H^j(C_C^{\cdot}(A, M))$.

Легко видеть, что левая часть (COASS_1) есть $d_C\Delta_1$. Аналогично случаю алгебр, $CH^2(A, A)$ отвечает за эквивалентные инфинитезимальные деформации, а равенство $CH^2(A, A) = 0$ влечет жесткость коалгебры A.

Пример. Коалгебры $k[G]$ для редуктивной группы G и $k[\mathrm{Mat}(n)]$ являются жесткими.

Можно определить также класс *косепарабельных* коалгебр.

3. Инфинитезимальные деформации биалгебр. Согласованная деформация алгебраической и коалгебраической структур может быть интерпретирована в терминах некоторого бикомплекса. Отметим сразу же, что деформация алгебры Хопфа как биалгебры снова оказывется алгеброй Хопфа. Положим $C_B^{ij}(A, A) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes i}, A^{\otimes j})$. Дифференциал в $C_B^{j}(A, A)$ — это дифференциал Хохшильда d_H в $C_H^{i}(A, A^{\otimes j})$; дифференциал в $C_B^{i}(A, A)$ — это дифференциал «ко-Хохшильда» d_C в $C_C^{i}(A, A^{\otimes i})$. Рассмотрим также бикомплекс $\widehat{C}_B^{\cdot}(A, A)$, получающийся из бикомплекса $C_B^{\cdot}(A, A)$ отбрасыванием нулевого столбца и нулевой строки. Пусть $H^i(A, A) = H^i(\mathrm{tot}\, C_B^{\cdot}(A, A))$ и $\widehat{H}^i(A, A) = H^i(\mathrm{tot}\, \widehat{C}_B^{\cdot}(A, A))$.

Предложение 2.26. 1. *Элементы $\widehat{H}^2(A, A)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности инфинитезимальных деформаций биалгебры A.*

2. *Если $\widehat{H}^2(A, A) = 0$, то A — жесткая биалгебра.*

3. *Точная последовательность бикомплексов*

$$0 \to \widehat{C} \to C \to C/\widehat{C} \to 0$$

влечет длинную точную последовательность

$$\ldots \to H^n(A, A) \to \widehat{H}^n(A, A) \to HH^{n+1}(A, k) \oplus CH^{n+1}(A, k) \to \ldots$$

Пример. Если G — дискретная группа, то из-за сепарабельности $k[G]$ групповая алгебра G не допускает нетривиальных деформаций.

Следующая теорема описывает деформационные когомологии для наиболее важных случаев.

Теорема 2.27. 1. *Если G есть алгебраическая группа или $\mathrm{Mat}(n)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, то для когомологий G с полиномиальными коэффициентами имеем*

$$\begin{aligned} H^n(k[G], k[G]) &= \\ &= CH^{n+1}(k, k[G]) \oplus CH^n(\mathfrak{g}^*, k[G]) \oplus \ldots \oplus CH^0(\Lambda^{n+1}\mathfrak{g}^*, k[G]) = \\ &= H^{n+1}_{\mathrm{alg}}(G, k) \oplus H^n_{\mathrm{alg}}(G, \mathfrak{g}) \oplus \ldots \oplus H^0_{\mathrm{alg}}(G, \Lambda^{n+1}\mathfrak{g}), \end{aligned}$$

$$\widehat{H}^n(k[G], k[G]) = \\ = CH^n(\mathfrak{g}^*, k[G]) \oplus \ldots \oplus CH^2(\Lambda^{n-1}\mathfrak{g}^*, k[G]) \oplus Z^1(\Lambda^n\mathfrak{g}^*, k[G]) = \\ = H^n_{\mathrm{alg}}(G, \mathfrak{g}) \oplus \ldots \oplus H^2_{\mathrm{alg}}(G, \Lambda^{n-1}\mathfrak{g}) \oplus Z^1_{\mathrm{alg}}(G, \Lambda^n\mathfrak{g}).$$

При этом $H^i_{\mathrm{alg}}(G, \Lambda^i\mathfrak{g}) \cong CH^i(\Lambda^i\mathfrak{g}^*, k[G])$. *В частности,*

$$\widehat{H}^2(k[G], k[G]) = H^2_{\mathrm{alg}}(G, \mathfrak{g}) \oplus Z^1_{\mathrm{alg}}(G, \Lambda^2\mathfrak{g}).$$

2) *Если* $\mathfrak{g}$ — *некоторая алгебра Ли, то для когомологий Шевалле—Эйленберга алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *имеем*

$$H^n(U\mathfrak{g}, U\mathfrak{g}) = H^{n+1}_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, k) \oplus H^n_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \oplus \ldots \oplus H^0_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, \Lambda^{n+1}\mathfrak{g}),$$
$$\widehat{H}^n(U\mathfrak{g}, U\mathfrak{g}) = H^n_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \oplus \ldots \oplus H^2_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, \Lambda^{n-1}\mathfrak{g}) \oplus Z^1_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, \Lambda^n\mathfrak{g}).$$

В частности, $\widehat{H}^2(U\mathfrak{g}, U\mathfrak{g}) = H^2_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \oplus Z^1_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, \Lambda^2\mathfrak{g})$.

Доказательство этой теоремы основано на рассмотрении подходящей спектральной последовательности и теореме Хохшильда—Костанта—Розенберга. Его можно найти в [85].

Если G есть редуктивная алгебраическая группа или $G = \mathrm{Mat}(n)$, то $k[G]$ — косепарабельная коалгебра и $\widehat{H}^2(k[G], k[G]) = Z^1_{\mathrm{alg}}(G, \Lambda^2\mathfrak{g})$. Использование лемм Уайтхеда для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ приводит к равенству $\widehat{H}^2(U\mathfrak{g}, U\mathfrak{g}) = Z^1_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, \Lambda^2\mathfrak{g})$.

Итак, нами дано описание пространств инфинитезимальных деформаций. Отметим, что оно полностью соответствует описанию структур группы Пуассона—Ли на группе G (см. п. 1.2.1): если бивекторное поле η задает скобку Пуассона на G, согласованную с групповым умножением, то $\eta \in Z^1(G, \Lambda^2\mathfrak{g})$. Тождество Якоби накладывает на η дополнительные соотношения. На языке теории деформаций эти дополнительные соотношения отвечают препятствию.

Лемма 2.28. *Пусть* G *есть редуктивная алгебраическая группа или* $G = \mathrm{Mat}(n)$ *и* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$. *Тогда*

$$H^n(k[G], k[G]) \cong (\Lambda^{n+1}\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}, \qquad H^n(k[G], k[G]) \cong \Lambda^n\mathfrak{g}/(\Lambda^n\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.$$

В условиях леммы $(\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0$, поэтому $\widehat{H}^2(k[G], k[G]) \cong \Lambda^2\mathfrak{g}$. Можно показать, что элемент $\widehat{H}^3(k[G], k[G]) \cong \Lambda^3\mathfrak{g}/(\Lambda^3\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, являющийся препятствием для инфинитезимальной деформации γ, есть не что иное, как $[\gamma, \gamma]/2$, т. е. половина квадрата Схоутена. Напомним, что $\mathrm{yb}(\gamma) = [\gamma, \gamma]/2$. Поэтому данные квантования в смысле гл. 1 — элемент $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, являющийся решением (модифицированного) CYBE, — находятся в биекции с данными квантования в смысле теории деформаций — инфинитезимальной деформацией с нулевым препятствием.

4. Глобальные деформации GL(2) и SL(2). Пространство инфинитезимальных деформаций $\widehat{H}^2(k[G], k[G])$ естественно представлять себе как касательное пространство к некоему «глобальному» пространству деформаций $\mathcal{M}(G)$ (пространству модулей деформаций) заданной группы, в то время как инфинитезимальные деформации, выделяемые условием равенства нулю препятствия, естественно отождествить с касательным конусом к этому «глобальному» пространству. Заведомое несовпадение указанных множеств инфинитезимальных деформаций указывает, что пространство $\mathcal{M}(G)$ будет иметь особенности.

Описание желаемого «глобального» пространства деформаций для произвольно заданной группы G неизвестно. Задача значительным образом зависит от априорных требований, предъявляемых к «глобальному» пространству, хотя бы потому, что существенно разные (особые) многообразия могут иметь в заданной точке совпадающие касательное пространство и *касательный конус*. Мы опишем решение задачи для случаев GL(2) и SL(2).

Пусть $G = \mathrm{GL}(2)$ или $\mathrm{SL}(2)$. Рассмотрим особое многообразие $\mathcal{M}(G)$, точки которого задают некоторые алгебры Хопфа H_Q. Назовем $\mathcal{M}(G)$ глобальным пространством деформаций для G, если

1) для некоторой точки Q_0 имеем $H_{Q_0} \cong k[G]$;

2) для всех Q из $\mathcal{M}(G)$ имеем $\dim H_Q = \dim k[G]$ (имеется в виду стандартность размерности градуировочных компонент соответствующей деформации Mat(2));

3) алгебра H_Q для почти всех Q является слабой R-матричной с полупростой матрицей R;

4) если $G = \mathrm{SL}(2)$, то H_Q есть деформация GL(2), содержащая центральный мультипликативный элемент степени 2 (квантовый детерминант).

Будет установлено, что касательное пространство $T_{Q_0}\mathcal{M}(G)$ совпадает с $Z^1(G, \Lambda^2\mathfrak{g})$, а касательный конус $C_{Q_0}\mathcal{M}(G)$ — с

$$Z^1(G, \Lambda^2\mathfrak{g}) \cap \{r \in \Lambda^2\mathfrak{g} \mid \mathrm{yb}(r) \in (\Lambda^3\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\} = \mathrm{Zyb}(G).$$

Поясним, что касательный конус $C_Q\mathcal{M}$ к (особому) многообразию $\mathcal{M}$ в точке Q — это множество классов эквивалентности путей в $\mathcal{M}$, проходящих через точку Q. Поскольку вместе с касательным вектором v вектор λv также лежит в $C_Q\mathcal{M}$, множество $C_Q\mathcal{M}$ называется конусом. Оно не обязательно является линейным пространством (пример: $\mathcal{M}$ — кривая $y^2 = x^2(x+1)$, в точке $Q = (0,0)$ она имеет касательный конус, состоящий из двух прямых $x = \pm y$; в неособой точке Q $\dim T_Q\mathcal{M} = 1$, но $\dim T_{(0,0)}\mathcal{M} = 2$).

Заметим, что $\mathcal{M}(G)$ является подмножеством в $\mathrm{Gr}(6, (V \otimes V^*)^{\otimes 2})$, где V — тавтологическое двумерное представление G. Действительно, алгебра M_Q задается подпространством квадратичных соотношений в $(V \otimes V^*)^{\otimes 2}$; а размерность $(M_Q)_2$ должна равняться 10. Каждое

такое подпространство в $(V\otimes V^*)^{\otimes 2}$ взаимно однозначно отвечает точке $(v,\varphi)\in\mathbb{P}(V^{\otimes 2})\times\mathbb{P}(V^{*\otimes 2})$ с условием $\varphi(v)\neq 0$. На этом многообразии действует группа PGL(2) следующим образом:

$$g.(v_1\otimes v_2,\varphi_1\otimes\varphi_2)=(v_1\otimes gv_2,\varphi_1\otimes(g^*)^{-1}\varphi_2).$$

Многообразие $\mathcal{M}(G)$ описывается в терминах орбит этого действия.

Лемма 2.29. *Группа* PGL(2) *имеет на* $\mathbb{P}(V^{\otimes 2})$ *две орбиты: замкнутую, состоящую из разложимых тензоров, и открытую* Ω, *являющуюся дополнением к первой.*

Пусть Ω^* — аналогичная PGL(2)-орбита в $\mathbb{P}(V^{*\otimes 2})$. Отождествим Ω и Ω^* с PGL(2), выбрав канонических представителей в них — $\Lambda^2 V$ и $\Lambda^2 V^*$ соответственно. Поэтому $\mathcal{M}(G)\subset\Omega\times\Omega^*\cong\mathrm{PGL}(2)\times\mathrm{PGL}(2)$.

Теорема 2.30.

1. $\mathcal{M}(\mathrm{GL}(2))=\{(g_1,g_2)\in\mathrm{PGL}(2)\times\mathrm{PGL}(2)\mid \mathrm{tr}(g_1g_2^{-1})\neq 0,\ g_1g_2=g_2g_1\}$. *Это многообразие четырехмерно и имеет единственную особую точку* (e,e).

2. $\mathcal{M}(\mathrm{SL}(2))=\{(g_1,g_2)\in\mathrm{PGL}(2)\times\mathrm{PGL}(2)\mid \mathrm{tr}(g_1g_2^{-1})\neq 0,\ g_1g_2=e\}$. *Это многообразие трехмерно и неособо.*

3. *Точки* (g_1,g_2) *и* (g_1',g_2') *многообразий* $\mathcal{M}(\mathrm{GL}(2))$ *и* $\mathcal{M}(\mathrm{SL}(2))$ *задают изоморфные биалгебры тогда и только тогда, когда* $t\,g_i\,t^{-1}=g_i'$ *для некоторого* $t\in\mathrm{PGL}(2)$.

В доказательстве этой теоремы участвуют соображения в духе леммы о слиянии.

Заключительный шаг основан на следующей интерпретации элементов $\mathrm{Zyb}(G)$. Если $G=\mathrm{SL}(2)$, то $Z^1(G,\Lambda^2\mathfrak{g})=\mathrm{Zyb}(G)=\Lambda^2\,\mathrm{sl}(2)$. Если $G=\mathrm{GL}(2)$, то имеют место изоморфизмы sl(2)-модулей $\mathrm{gl}(2)\cong\mathrm{sl}(2)\oplus\langle z\rangle$ и $\Lambda^2\,\mathrm{gl}(2)\cong\mathrm{sl}(2)\oplus\mathrm{sl}(2)$, где первая компонента отождествляется с $\Lambda^2\,\mathrm{sl}(2)$, а вторая — с антисимметрической частью $\mathrm{sl}(2)\otimes\langle z\rangle\oplus\mathrm{sl}(2)\otimes\langle z\rangle$. Фиксируем изоморфизм ψ: $\mathrm{sl}(2)\to\mathrm{sl}(2)$ между подпредсавлениями в разложении $\Lambda^2\,\mathrm{gl}(2)$. Оказывается, что элемент $r\in\Lambda^2\,\mathrm{gl}(2)$ задает структуру группы Пуассона–Ли на GL(2) тогда и только тогда, когда $r=\lambda x+\mu\psi(x)$, $\lambda,\mu\in k$. Далее, непосредственным вычислением получается

Теорема 2.31. *Имеют место следующие отождествления:*

1) $T_{(e,e)}\mathcal{M}(\mathrm{GL}(2))=Z^1(\mathrm{GL}(2),\Lambda^2\mathrm{gl}(2))$, $C_{(e,e)}\mathcal{M}(\mathrm{GL}(2))=\mathrm{Zyb}(\mathrm{GL}(2))$.

2) $T_{(e,e)}\mathcal{M}(\mathrm{SL}(2))=C_{(e,e)}\mathcal{M}(\mathrm{SL}(2))=Z^1(\mathrm{SL}(2),\Lambda^2\,\mathrm{sl}(2))=\mathrm{Zyb}(\mathrm{GL}(2))$.

Теперь можно ответить на вопрос, сколько же существует неизоморфных деформаций GL(2) и SL(2). Действуя на $\mathcal{M}(G)$ сопряжениями из PGL(2), приведем пару (g_1,g_2) к одному из следующих канонических видов.

Для $G = \mathrm{GL}(2)$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $G = \mathrm{SL}(2)$

$$g_1 = g_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad g_1 = g_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получающиеся отсюда деформации $k[\mathrm{Mat}(2)]$ суть соответственно $M_{p,q}(2)$, $M_{Jh}(2)$, $M_q(2)$, $M_{Jh}(2)$. Это тот же результат, что был извлечен ранее из других соображений.

5. Эвристические подходы к квантованию. Здесь мы вкратце наметим два подхода, которые гипотетически (возможно, при некоторых дополнительных условиях) приводят к деформации $\mathrm{Mat}(n)$, являющейся квантованием заданной скобки Пуассона.

А. Экспоненты. Идея состоит в том, что слабую R-матрицу надо брать в виде $\exp(hr)$, где $r \in \Lambda^2\mathfrak{g}$ задает кограничную скобку Пуассона на G.

Пример. Пусть $G = \mathrm{GL}(2)$, $r = r_{\mathrm{st}} = 1/2(e_{12} \otimes e_{21} - e_{21} \otimes e_{12})$. Имеем

$$\exp(hr) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(h/2) & \sin(h/2) & 0 \\ 0 & -\sin(h/2) & \cos(h/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить решение уравнения кос, рассмотрим сначала оператор $S = \exp(-hr^{21})P\exp(hr^{12}) = e^{hr}Pe^{hr} = e^{2hr}P$. Элементарное вычисление показывает, что $(S - \sin(h))/(1 - \sin(h))$ совпадает со стандартным решением уравнения кос при $q = \cos(h)/(1 - \sin(h))$. Поэтому $M_S = M_q(2)$.

Пример. $G = \mathrm{GL}(2)$, $r = r_J = \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \wedge e_{12}$. Тогда матрица $R_J = e^{hr}Pe^{hr}$ также совпадает с известным ранее решением уравнения кос, задающим жорданову деформацию $\mathrm{GL}(2)$.

Можно показать, что если $r \in \Lambda^2\mathfrak{g}$, $\mathrm{yb}(r) = 0$ и $r^3 = 0$ (имеется в виду матричное представление r), то $e^{2hr}P$ есть решение уравнения кос.

В. Универсальное кодействие. Если пуассонова структура на G такова, что матричные элементы представления ρ, стоящие в первой строке и первом столбце матрицы Z_ρ, образуют две пуассоновы подалгебры A и B в $k[Z_\rho]$, и если известны их квантования $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, то квантование всей алгебры $k[Z_\rho]$ можно получить универсальным кодействием слева на $\widetilde{B}$ и справа на $\widetilde{A}$. Именно такая ситуация возникает для r_{st}, r_S и некоторых других. Заметим, что этот рецепт отдаленно напоминает квантовый дубль.