ГЛАВА 3

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

§ 1. Основные понятия теории представлений квантовых групп

1. Представления старшего веса. Мы начнем с основных определений и фактов теории представлений, которые, надо заметить, в точности повторяют свои классические аналоги. Более привычное в классике «геометрическое» изложение необходимо перевести на дуальный язык алгебр функций. Эта работа была проделана Б. Паршаллом и Дж. Вонгом [117]. Там же читатель может найти подробные доказательства.

Поскольку квантовая группа G_q может быть описана как в терминах своей алгебры функций $k[G_q]$, так и в терминах квантования универсальной обертывающей $U_q\mathfrak{g}$, *представлением* квантовой группы G_q мы будем называть конечномерный *комодуль* V над $k[G_q]$ при первой реализации и конечномерный *модуль* над $U_q\mathfrak{g}$ при второй. Иногда, например, для комодуля V над $k[G_q]$ с кодействием

$$\rho\colon V \to k[G_q] \otimes V$$

будет использоваться обозначение (V, ρ) или (V, ρ_V). Представление называется *неприводимым*, если оно не содержит нетривиальных подпредставлений.

В начале этой главы излагается теория представлений (т. е. комодулей) для квантовой группы $GL_{P,Q,c}(n)$. Существенно различны случаи, когда c не есть корень из единицы или $c = 1$ и $\operatorname{char} k = 0$ и когда c есть примитивный корень из единицы степени l. В первом из этих случаев теория представления параллельна классической над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль; во втором — напоминает модулярную теорию представлений.

Мы дадим явное описание всех неприводимых конечномерных комодулей над $M_{P,Q,c}(n)$ и $\mathrm{GL}_{P,Q,c}(n)$, когда c не является корнем из 1, используя квантовое многообразие флагов.

На протяжении §§ 1,2, если не оговорено противное, $G = \mathrm{GL}_{P,Q,c}(n)$, $M = M_{P,Q,c}(n)$.

Рассмотрим в $k[G]$ идеалы

$$I_T = \langle z_i^j \mid i \neq j \rangle, \qquad I_+ = \langle z_i^k \mid i < k \rangle, \qquad I_- = \langle z_i^k \mid i > k \rangle.$$

Легко проверить, что они являются хопфовыми, т. е. соответствующие факторалгебры $k[T] = k[G]/I_T$ и $k[B_\pm] = k[G]/I_\pm$ суть алгебры Хопфа, представляющие тор, нижнюю и верхнюю борелевские подгруппы соответственно. Подчеркнем важное обстоятельство: при стандартном многопараметрическом квантовании $\mathrm{GL}(n)$ максимальный тор остался неизменным (и изоморфным произведению $\mathbb{G}_m \times \ldots \times \mathbb{G}_m$). Для произвольной квантовой группы G_q разумно считать квантовым аналогом максимального тора максимальную коммутативную факторалгебру алгебры Хопфа $k[G_q]$.

Пусть β_0: $k[G] \to k[T]$ и $\beta_\pm$: $k[G] \to k[B_\pm]$ — соответствующие канонические проекции. Очевидно, что $k[T] = k[t_1, \ldots, t_n]$ при отождествлении $t_i = z_i^i \bmod I_T$.

Пусть V есть представление G; ограничим его на T:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\delta} & k[G] \otimes V \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_0 \otimes \mathrm{id}} \\ V & \xrightarrow{\delta|_T} & k[T] \otimes V \end{array}$$

Вектор $v \in V$ называется вектором веса $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, если $\delta|_T(v) = t_1^{\lambda_1} \ldots t_n^{\lambda_n} \otimes v = t^\lambda \otimes v$.

Упорядочим веса лексикографически (можно считать, что мы выбрали и зафиксировали в G стандартную систему корней: простые корни суть $z_i^i (z_{i+1}^{i+1})^{-1}$).

Теорема 3.1 (теорема о плотности большой клетки). *Отображение* $(\beta_+ \otimes \beta_-) \circ \Delta$: $k[G] \to k[B_+] \otimes k[B_-]$ *инъективно.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы о стандартности размерности алгебры M.

Предложение 3.2. *Всякое ненулевое представление B_+ имеет одномерное подпредставление; таким образом, всякое ненулевое представление G имеет B_+-инвариантную прямую.*

Определение 3.3. Если представление V квантовой группы G порождается B_+-инвариантным вектором v_λ веса λ, то V называется *представлением старшего веса*, а v_λ — *старшим вектором.*

Теорема 3.4. *Пусть V — представление старшего веса λ и v_λ — старший вектор. Тогда*

1) *любой вес в V не превосходит λ, и кратность λ равна* 1;

2) *представление V обладает единственным максимальным подпредставлением, и фактор по нему будет неприводимым представлением старшего веса λ. Это последнее представление обозначается $L(\lambda)$.*

Легко видеть, что неприводимые представления суть представления старшего веса и неприводимые представления с равными старшими весами изоморфны.

2. Двойственность Фробениуса. Пусть G_q есть некоторая квантовая группа, а B — ее подгруппа, т. е. имеется эпиморфизм алгебр Хопфа β: $k[G_q] \to k[B]$. Тогда для представлений G определен функтор ограничения на B

$$\mathrm{Res}_B^{G_q} : \mathrm{Rep}\, G_q \to \mathrm{Rep}\, B, \qquad (V, \rho) \mapsto (V, (\beta \otimes 1) \circ \rho).$$

Теорема 3.5. *Функтор* $\mathrm{Res}_B^{G_q}$ *обладает правым сопряженным функтором* $\mathrm{Ind}_B^{G_q} : \mathrm{Rep}\, B \to \mathrm{Rep}\, G_q$, *т. е.*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}\, B}(\mathrm{Res}_B^{G_q} V, U) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}\, G_q}(V, \mathrm{Ind}_B^{G_q} U).$$

Доказательство опирается на явное описание *индуцированного представления*

$$\mathrm{Ind}_B^{G_q} U = \{f \in k[G_q] \otimes_k U \mid (1 \otimes \beta \otimes 1) \circ (\Delta_{k[G_q]} \otimes 1)(f) = (1 \otimes \rho_U)(f)\},$$

а кодействие получается из ограничения $\Delta_{k[G_q]} \otimes 1$.

Замечание. Можно доказать, что $\mathrm{Res}_B^{G_q}$ — точный функтор, а $\mathrm{Ind}_B^{G_q}$ точен слева; категория же представлений любой квантовой группы содержит достаточно много инъективных объектов. Следовательно, можно говорить о производных функторах $R^i \mathrm{Ind}_B^{G_q}$, которые в классическом контексте совпадают с $H^i(G/B, \cdot)$.

Нам понадобится следующий частный случай предыдущей конструкции. Пусть λ — некоторый вес. Рассмотрим одномерное представление B_-, которое традиционно обозначается через λ и задается формулой $1 \mapsto t^\lambda \otimes 1$. Положим

$$H^0(\lambda) = \mathrm{Ind}_{B_-}^G(\lambda) = \{f \in k[G] \mid (1 \otimes \beta_-) \circ \Delta(f) = f \otimes t^\lambda\}$$

(предполагается, что $t_i \in k[T]$ отождествляются с z_i^i из $k[B_-]$). Геометрический аналог этого объекта есть не что иное, как пространство сечений $H^0(\mathrm{GL}(n)/B_-, \mathcal{O}_\lambda)$, где $\mathrm{GL}(n)/B_-$ — пространство полных флагов, а $\mathcal{O}_\lambda$ — обратимый пучок, отвечающий характеру λ.

Теорема 3.6. *Пусть* $H^0(\lambda) \neq 0$. *Тогда*

1) *представление* $H^0(\lambda)$ *обладает единственным неприводимым подпредставлением, изоморфным* $L(\lambda)$;

2) *любой другой композиционный фактор представления* $H^0(\lambda)$ *имеет вес, строго меньший чем* λ.

Назовем вес $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ доминантным, если $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Множество всех доминантных весов обозначается P_+, а множество положительных доминантных весов — P_{++}.

Теорема 3.7. *Следующие условия на* $\lambda \in C(T)$ *эквивалентны:*
1) λ *доминантен;*
2) $H^0(\lambda) \neq 0$;
3) $L(\lambda)$ *существует.*

Доказательство этой теоремы существенным образом опирается на информацию о строении представлений $GL_{p,q}(2)$, которая будет изложена в следующем пункте. А пока приведем некоторые примеры.

Пример. Пусть $\omega_s = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (единицы стоят на первых s местах) — фундаментальный доминантный вес. Тогда $L(\omega_s) \cong \cong (B_P)_s$, причем старший вектор есть $\xi_1 \ldots \xi_s$. Действительно, компонента $(B_P)_s$ порождена над k векторами $\xi = \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_s}$. Имеем $\delta_T(\xi_I) = = t_{i_1} \ldots t_{i_s} \otimes \xi_I$. Среди полученных весов ω_s — старший. Ясно, что $(B_P)_s$ — неприводимое представление G, поэтому оно изоморфно $L(\omega_s)$.

Пример. Вычислим, используя теорему 3.7, группу характеров (т. е. мультипликативных элементов) $X(G)$. Если $\lambda \in X(G)$, то существуют представления $L(\pm\lambda)$, поэтому оба веса λ и $-\lambda$ доминантны, следовательно, $\lambda = m\omega_n$ где $m \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $X(G) \cong \mathbb{Z}\omega_n$ и порождается квантовым детерминантом.

3. Представления $\mathrm{GL}_{p,q}(2)$. Напомним, что $k[\mathrm{GL}_{p,q}(2)]$ есть алгебра Хопфа, порожденная элементами a, b, c, d мультипликативной матрицы $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и элементом D^{-1}, формально обратным квантовому детерминанту $D = ad - p^{-1}bc$. Соотношения в $k[\mathrm{GL}_{p,q}(2)]$ таковы:

$$ab = p^{-1}ba, \qquad ac = q^{-1}ca, \qquad cd = p^{-1}dc, \qquad bd = q^{-1}db,$$
$$ad - da = (q^{-1} - p)cb, \qquad bc = pq^{-1}cb.$$

Элемент D «почти централен»: $ZD\Gamma = \Gamma DZ$, где $\Gamma = \mathrm{diag}(q^{-1}, p^{-1})$. Антипод имеет вид

$$S(Z) = D^{-1} \begin{pmatrix} d & -qb \\ q^{-1}c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -pb \\ p^{-1}c & a \end{pmatrix} D^{-1}.$$

Мономы $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta (D^{-1})^\varepsilon$ с $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \geqslant 0$ порождают $k[\mathrm{GL}_{p,q}(2)]$ как линейное пространство.

Одномерные представления $\mathrm{GL}_{p,q}(2)$ имеют вид $U_\mu = \langle u_\mu \rangle$, $\mu \in \mathbb{Z}$, с кодействием $u_\mu \mapsto D^\mu \otimes u_\mu$ при $\mu \geqslant 0$ и $u_\mu \mapsto (D^{-1})^\mu \otimes u_\mu$ при $\mu < 0$.

Однородные компоненты A_λ алгебры $A = k\langle x, y\rangle / (xy - q^{-1}yx)$ также являются представлениями $\mathrm{GL}_{p,q}(2)$, причем $\dim A_\lambda = \lambda + 1$. Выберем базис в A_λ: $v_\lambda, \ldots, v_0$, где $v_i = x^i y^{\lambda - i}$, и напишем мультипликативную матрицу, воспользовавшись квантовым биномом Ньютона

(см. п. 3.4.1). Имеем

$$\delta(v_i) = \sum_{j=0}^{\lambda} w_i^j \otimes v_j =$$

$$= \sum_{l=0}^{\lambda} \left(\sum_{s+t=l} \begin{bmatrix} \lambda - i \\ s \end{bmatrix}_{pq} \begin{bmatrix} i \\ t \end{bmatrix}_{pq} q^{s(i-t)} a^{\lambda - i - s} b^s c^{i-t} d^i \right) \otimes v_{\lambda - l}.$$

Отсюда легко следует, что представление A_λ неприводимо тогда и только тогда, когда либо pq не есть корень из единицы, либо $pq = 1$ и $\operatorname{char} k = 0$. Действительно, если $V \subset A_\lambda$ — собственный подкомодуль, $0 \neq u = \sum c_i v_i \in V$ и, например, $c_{i_0} \neq 0$, то $\delta(u) = \sum \left(\sum c_i w_i^j \right) \otimes v_j$. Но для всех j имеем $\sum c_i v_i \neq 0$, поскольку в $w_{i_0}^j$ коэффициент пропорционален $\begin{bmatrix} \lambda - i_0 \\ s \end{bmatrix}_{pq} \begin{bmatrix} i_0 \\ s - j \end{bmatrix}_{pq} \neq 0$, а при фиксированном j элементы w_i^j линейно независимы.

Ясно, что U_μ и A_λ суть представления старших весов (μ, μ) и $(\lambda, 0)$ соответственно. Поэтому представление произвольного старшего доминантного веса $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ есть $U_{\lambda_2} \otimes A_{\lambda_1 - \lambda_2}$. В соответствии с общей теорией неприводимое представление $L(\lambda)$ есть подпредставление $H^0(\lambda)$. Нам нужно показать теперь, что если $H^0(\lambda) \neq 0$, то λ есть доминантный вес.

Достаточно проверить, что если $H^0((\lambda, 0)) \neq 0$, то $\lambda \geqslant 0$. Для этого рассмотрим ненулевой элемент

$$f = \sum k_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta (D^{-1})^\varepsilon \in H^0((\lambda, 0)).$$

Очевидно, что $H^0((\lambda, 0))$ как правое представление T есть пространство веса $(\lambda, 0)$. Поэтому в сумму должны входить мономы, степени которых связаны соотношением $(\alpha + \gamma - \varepsilon, \beta + \delta - \varepsilon) = (\lambda, 0)$. Пусть $f = \sum_{\varepsilon \geqslant 0} f_\varepsilon$, где

$$f_\varepsilon = \sum_{\substack{\alpha + \gamma = \lambda + \varepsilon \\ \beta + \delta = \varepsilon}} k_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta (D^{-1})^\varepsilon.$$

В выражении $(1 \otimes \beta_-)\Delta f_\varepsilon$ выделим член старшей степени по b:

$$(1 \otimes \beta_-)\Delta f_\varepsilon = h_\varepsilon \otimes t_1^\lambda b^\varepsilon + \ldots,$$

где

$$h_\varepsilon = \sum_{\substack{\alpha + \gamma = \lambda + \varepsilon \\ \beta + \delta = \varepsilon}} k_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} a^{\alpha + \beta} c^{\gamma + \delta} (D^{-1})^\varepsilon.$$

Выберем наибольший показатель ε такой, что $f_\varepsilon \neq 0$. Тогда либо $\varepsilon = 0$, либо $h_\varepsilon = 0$. В первом случае $\alpha + \gamma = \lambda \geqslant 0$, как и требовалось, причем $H^0((\lambda, 0))$ есть линейная оболочка мономов $a^{\lambda - \alpha} c^\alpha$. Второй же случай невозможен, поскольку мономы, участвующие в h_ε, линейно независимы и равенство $h_\varepsilon = 0$ влечет $f_\varepsilon = 0$, вопреки предположению.

Итак, неприводимые представления $\mathrm{GL}_{p,q}(2)$ при pq, не равном корню из единицы или $pq=1$, $\mathrm{char}\, k=0$ взаимно однозначно соответствуют старшим доминантным весам (λ_1, λ_2), причем $L((\lambda_1, \lambda_2)) = U_{\lambda_2} \otimes A_{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Рассматривая биалгебру $M_{p,q}(2)$ как универсальную кодействующую на A_q слева и на A_p справа, можно получить такой аналог теоремы Петера–Вейля:

$$M_{p,q}(2) = \bigoplus_{i \geqslant 0} (A_q)_i \otimes (A_p)_i.$$

Замечание. Как видно, относительно легкое перенесение на квантовый случай классических результатов стало возможным благодаря немногим конкретным свойствам группы $\mathrm{GL}_{P,Q,c}(n)$, а именно теореме плотности 3.1, наличию картановской подгруппы — максимального тора, стандартному строению представлений квантовой $\mathrm{GL}_{p,q}(2)$. Следует предположить, что эти свойства должны быть аксиоматизированы в гипотетической абстрактной структурной теории квантовых групп и их представлений. Интересно отметить, что картановская подгруппа жордановой деформации SL(2) изоморфна аддитивной группе $\mathbb{G}_a$, а не мультипликативной.

4. Представления $\mathrm{SL}_J(2)$. Алгебра Хопфа $k[\mathrm{GL}_J(2)]$ порождается элементами a, b, c, d мультипликативной матрицы $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и элементом D^{-1}, формально обратным к центральному квантовому детерминанту $D = da - cb + ca = ad - cb - ac$. Определяющие соотношения имеют вид (в форме симплификаторов)

$$\begin{aligned} ba &= ab - a^2 - bc + ac + ad, & db &= bd + d^2 + bc + ac + ad, \\ ca &= ac + c^2, & dc &= cd - c^2, \\ da &= ad - ac + cd - c^2, & cb &= bc - ac + cd. \end{aligned}$$

Мономы $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ с $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$ образуют базис биалгебры $k[M_J(2)]$. Антипод в $k[\mathrm{GL}_J(2)]$ задается формулой

$$S(Z) = D^{-1} \begin{pmatrix} -c + d & a - b + c - d \\ -c & a + c \end{pmatrix}.$$

По определению $k[\mathrm{SL}_J(2)] = k[\mathrm{GL}_J(2)]/(D-1)$.

Максимальная коммутативная факторалгебра $k[\mathrm{SL}_J(2)]$ изоморфна $k[\mathbb{G}_a] \cong k[t]$, иными словами, максимальным тором жордановой деформации SL(2) является аддитивная группа $\mathbb{G}_a$. Соответствующий эпиморфизм алгебр Хопфа $k[\mathrm{SL}_J(2)] \to k[\mathbb{G}_a]$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что в таком случае на каждой алгебре A, на которой кодействует $k[\mathrm{SL}_J(2)]$, действует дифференцирование D_A, задавая фильтрацию

$$A^{\leqslant k} = \{a \in A \mid D_A^k a = 0\}.$$

(Это следует считать аналогом весового разложения.)

Если взять в качестве A алгебру A_J, то $D_J(x) = y$, $D_J(y) = 0$; и однородные компоненты A_J оказываются неприводимыми представлениями $\mathrm{SL}_J(2)$.

Теорема 3.8. *Каждое конечномерное представление* $\mathrm{SL}_J(2)$ *вполне приводимо. Неприводимые представления исчерпываются однородными компонентами алгебры* A_J.

Полная приводимость представлений $\mathrm{SL}_J(2)$ следует из полупростоты соответствующей алгебры Шура (см. п. 3.3.4).

Аналог теоремы Петера–Вейля также справедлив для $\mathrm{SL}_J(2)$:

$$M_J(2) = \bigoplus_{i \geqslant 0} (A_J)_i \otimes (A_J)_i.$$

§ 2. Квантовое пространство флагов группы $\mathrm{GL}_{P,Q,c}(n)$

1. Формулы Бине–Коши. Введем предварительно некоторые обозначения. Мультииндекс — это набор вида $I = (i_1, \ldots, i_k)$ с $1 \leqslant i_s \leqslant n$; число k называется длиной мультииндекса — $l(I)$. Мультииндекс называется упорядоченным, если $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k$; множество упорядоченных мультииндексов обозначим $\mathcal{I}$. Положим $[i] = (1, \ldots, i)$, $\widehat{i} = (1, \ldots, \widehat{i}, \ldots, n)$. Символ $*$ означает конкатенацию мультииндексов: $I * J = (i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l)$. По определению $I + J$ есть мультииндекс, получающийся упорядочением $I * J$. S_I есть группа перестановок, действующая на множестве I.

Для упорядоченного мультииндекса I положим $\xi_I = \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k} \in (B_P)_k$. Введем квантовый аналог знака перестановки $\varepsilon_P(\sigma I)$ для всех $\sigma \in S_I$ по правилу $\xi_{\sigma I} = \varepsilon_P(\sigma I)\xi_I$. Пусть равенство $\xi_S \xi_T = \varepsilon_P(S * T)\xi$ определяет $\varepsilon_P(S * T)$ при непересекающихся S и T; в противном случае $\varepsilon_P(S * T) = 0$.

Выберем в $(B_P)_k$ базис $\{\xi_I \mid I \in \mathcal{I},\ l(I) = k\}$ и определим квантовые миноры $|Z_I^J|$ для $I, J \in \mathcal{I}$ равенством $\delta_B(\xi_I) = \sum_J |Z_I^J| \otimes \xi_J$, более явно,

$$|Z_I^J| = \sum_{\sigma \in S_J} \varepsilon_P(\sigma J) z_{i_1}^{\sigma(j_1)} \ldots z_{i_k}^{\sigma(j_k)}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta|Z_I^J| = \sum_K |Z_I^K| \otimes |Z_K^J|.$$