

Хорошо известно, что в таком случае на каждой алгебре  $A$ , на которой кодействует  $k[SL_J(2)]$ , действует дифференцирование  $D_A$ , задавая фильтрацию

$$A^{\leq k} = \{a \in A \mid D_A^k a = 0\}.$$

(Это следует считать аналогом весового разложения.)

Если взять в качестве  $A$  алгебру  $A_J$ , то  $D_J(x) = y$ ,  $D_J(y) = 0$ ; и однородные компоненты  $A_J$  оказываются неприводимыми представлениями  $SL_J(2)$ .

**Теорема 3.8.** Каждое конечномерное представление  $SL_J(2)$  вполне приводимо. Неприводимые представления исчерпываются однородными компонентами алгебры  $A_J$ .

Полная приводимость представлений  $SL_J(2)$  следует из полупростоты соответствующей алгебры Шура (см. п. 3.3.4).

Аналог теоремы Петера–Вейля также справедлив для  $SL_J(2)$ :

$$M_J(2) = \bigoplus_{i \geq 0} (A_J)_i \otimes (A_J)_i.$$

## § 2. Квантовое пространство флагов группы $GL_{R, Q, c}(n)$

**1. Формулы Бине–Коши.** Введем предварительно некоторые обозначения. Мультииндекс — это набор вида  $I = (i_1, \dots, i_k)$  с  $1 \leq i_s \leq n$ ; число  $k$  называется длиной мультииндекса —  $l(I)$ . Мультииндекс называется упорядоченным, если  $i_1 \leq \dots \leq i_k$ ; множество упорядоченных мультииндексов обозначим  $\mathcal{I}$ . Положим  $[i] = (1, \dots, i)$ ,  $\widehat{i} = (1, \dots, \widehat{i}, \dots, n)$ . Символ  $*$  означает конкатенацию мультииндексов:  $I * J = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ . По определению  $I + J$  есть мультииндекс, получающийся упорядочением  $I * J$ .  $S_I$  есть группа перестановок, действующая на множестве  $I$ .

Для упорядоченного мультииндекса  $I$  положим  $\xi_I = \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} \in (B_P)_k$ . Введем квантовый аналог знака перестановки  $\varepsilon_P(\sigma I)$  для всех  $\sigma \in S_I$  по правилу  $\xi_{\sigma I} = \varepsilon_P(\sigma I) \xi_I$ . Пусть равенство  $\xi_S \xi_T = \varepsilon_P(S * T) \xi$  определяет  $\varepsilon_P(S * T)$  при непересекающихся  $S$  и  $T$ ; в противном случае  $\varepsilon_P(S * T) = 0$ .

Выберем в  $(B_P)_k$  базис  $\{\xi_I \mid I \in \mathcal{I}, l(I) = k\}$  и определим квантовые миноры  $|Z_I^J|$  для  $I, J \in \mathcal{I}$  равенством  $\delta_B(\xi_I) = \sum_J |Z_I^J| \otimes \xi_J$ , более явно,

$$|Z_I^J| = \sum_{\sigma \in S_J} \varepsilon_P(\sigma J) z_{i_1}^{\sigma(j_1)} \dots z_{i_k}^{\sigma(j_k)}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta |Z_I^J| = \sum_K |Z_I^K| \otimes |Z_K^J|.$$

**Лемма 3.9.** Справедлив следующий аналог формул Бине–Коши:

$$1) \varepsilon_P(S * T)|Z_{S+T}^I| = \sum_{K+L=I} \varepsilon_P(K * L)|Z_S^K||Z_T^L|;$$

$$2) \varepsilon_Q(S * T)|Z_I^{S+T}| = \sum_{K+L=I} \varepsilon_Q(K * L)|Z_K^S||Z_L^T|.$$

**2. Пространство флагов квантовой группы  $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, c}(n)$ .** Это пространство описывается в терминах своей алгебры однородных функций (поскольку классические пространства флагов суть проективные многообразия).

**Определение 3.10.** Алгебра однородных функций на пространстве полных флагов  $\mathbb{F}$  порождается над  $k$  образующими  $\pi_I$  — «плоккеровыми координатами» с  $1 \leq l(I) \leq n$  и имеет следующие соотношения.

1. «Антисимметричность»  $\pi_{\sigma I} = \varepsilon_P(\sigma I)\pi_I$  для  $\sigma \in S_I$ .

2. Соотношения Ходжа  $H(k, L, I, J)$ , где  $1 \leq k \leq l(L)$ ,  $l(L) = k - 1$ ,  $l(I) - 1 \geq l(J) + k$

$$H(k, L, I, J) = \sum_{K \subset I} \varepsilon_Q((I - K) * K) \pi_{L*(I-K)} \pi_{K*J}.$$

3. Соотношения коммутации  $C(J, I)$ ,  $l(J) = j < i = l(I)$

$$C(J, I) = \pi_J \pi_I - \varepsilon_P^{-1}([j] * ([i] - [j])) \sum_{\substack{K \subset I \\ l(K)=k}} \varepsilon_Q((I - K) * K) \pi_{J*(I-K)} \pi_K$$

Введем градуировку на  $\mathbb{F}$ . Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  — разбиение с

$$n \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_s > 0.$$

Пусть

$$\mathbb{F}^\alpha = \left\langle \pi_{I_1} \dots \pi_{I_s} \mid l(I_k) = \alpha_k \right\rangle.$$

Из соотношений коммутации следует, что  $\mathbb{F}^\alpha \mathbb{F}^\beta \subset \mathbb{F}^{\alpha+\beta}$  (мультииндекс  $\alpha + \beta$  получается упорядочением  $\alpha * \beta$ ), поэтому  $\mathbb{F} = \bigoplus_\alpha \mathbb{F}^\alpha$  — градуированная алгебра. Отметим, что имеются изоморфизмы векторных пространств  $\mathbb{F}^{(k)} \cong (B_p)_k$  и  $\mathbb{F}^{(1, \dots, 1)} \cong (A_Q)_s$ ,  $s = l((1, \dots, 1))$ . Первый следует из п. 1 определения 3.10, а второй — из соотношения  $H(1, \emptyset, (i, j), \emptyset)$ .

Положим  $d_I = |Z_I^{[i]}|$ ,  $i = l(I)$ . Пусть  $\mathbb{D}$  — подалгебра в  $M$ , порожденная всеми  $d_I$ . На  $\mathbb{D}$  вводится градуировка разбиениями, как и на  $\mathbb{F}$ :

$$\mathbb{D}^\alpha = \left\langle d_{I_1} \dots d_{I_s} \mid l(I_k) = \alpha_k \right\rangle.$$

Оказывается, что  $\mathbb{D} = \bigoplus_\alpha \mathbb{D}^\alpha$ . На  $\mathbb{D}$  имеется естественная структура  $M$ -комодуля

$$d_I \mapsto \sum |Z_I^J| \otimes d_J.$$

**Теорема 3.11.** Пространство  $\mathbb{F}$  является  $M$ -комодулем со структурным отображением  $\pi_I \mapsto \sum |Z_I^J| \otimes \pi_J$ . Отображение  $\varphi: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{D}$ , переводящее  $\pi_I$  в  $d_I$ , есть корректно определенный морфизм  $M$ -комодулей.

Доказательство состоит в применении формул Бине–Коши.

**3. Стандартные мономы.** Теперь мы покажем, что базис в пространствах  $\mathbb{F}$  и  $\mathbb{D}$  состоит из стандартных мономов.

**Определение 3.12.** Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  — разбиение с  $n \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_s > 0$ .

1. Схема Юнга  $Y(\alpha)$  есть множество  $\{(i, j) \mid 1 \leq j \leq s, 1 \leq i \leq \alpha_j\}$ .
2. Таблица Юнга  $T$  типа  $\alpha$  есть отображение  $T: Y(\alpha) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ .

3. Таблица Юнга  $T$  называется *стандартной*, если числа в ее строках строго возрастают (слева направо), а в столбцах — неубывают (сверху вниз).

4. Моном  $\pi_{I_1} \dots \pi_{I_s}$  (соответственно,  $d_{I_1} \dots d_{I_s}$ ) называется *стандартным*, если таблица Юнга со строками  $I_1, \dots, I_s$  стандартна.

**Теорема 3.13.** Пространства  $\mathbb{F}$  и  $\mathbb{D}$  порождаются над  $k$  стандартными мономами.

Доказательство легко следует из того, что комбинаторная структура квантовых соотношений Ходжа в точности повторяет классическую.

Введем новое основное кольцо  $K$  — кольцо многочленов от  $c$ ,  $q_{ij}$ ,  $p_{ij}$ , факторизованное по очевидным соотношениям, добавим к нему также величины  $([m]_c!)^{-1}$  для всех целых  $m \geq 0$ . Кроме того, мы предполагаем, что  $\mathrm{char} k = 0$ . Имеется морфизм специализации  $\mathrm{Ev}: K \rightarrow k$ , при котором  $c$ ,  $q_{ij}$ ,  $p_{ij}$  переходят в 1, а  $([m]_c!)^{-1}$  в  $(m!)^{-1}$ . Определим также сквозные морфизмы

$$\begin{aligned} E_m: M &\rightarrow M \otimes_K k \rightarrow M_1, & E_m(z_i^j) &= (z^1)_i^j, \\ E_d: \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{D} \otimes_K k \rightarrow \mathbb{D}_1, & E_d(d_I) &= d_I^1, \\ E_f: \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{F} \otimes_K k \rightarrow \mathbb{F}_1, & E_f(\pi_I) &= \pi_I^1. \end{aligned}$$

Здесь  $M$ ,  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{F}$  рассматриваются как модули над  $K$ ;  $\otimes_K$  берется относительно  $\mathrm{Ev}$ ; а  $k$ -алгебры  $M_1$ ,  $\mathbb{D}_1$ ,  $\mathbb{F}_1$  суть коммутативные аналоги  $M$ ,  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{F}$  (их образующие снабжены верхним индексом 1).

Отметим, что корректная определенность  $E_f$  следует из теоремы Ходжа о том, что стандартные мономы образуют базис в алгебрах  $\mathbb{F}$  и  $\mathbb{D}_1$  [51, 90], которые поэтому являются изоморфными. Действительно, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D} \\ E_f \downarrow & & \downarrow E_d \\ \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbb{D}_1, \end{array}$$

в которой  $\varphi_i$  — изоморфизм. Композиция  $E_d \circ \varphi$  переводит соотношения из  $\mathbb{F}$  в 0, поэтому и  $E_f$  переводит их в 0.

**Теорема 3.14.** Стандартные мономы образуют базис над  $K$  в алгебрах  $\mathbb{F}$  и  $\mathbb{D}$ .

Идея доказательства состоит в том, чтобы привести возможную нетривиальную линейную комбинацию стандартных мономов над  $K$  к аналогичному соотношению над  $k$ , используя последовательную специализацию параметров в 1. Но по теореме Ходжа стандартные мономы линейно независимы над  $k$ .

**Следствие 3.15.**  $K$ -алгебры  $\mathbb{D}$  и  $\mathbb{F}$  изоморфны.

Рассмотрим полученные результаты с точки зрения теории представлений.

**Предложение 3.16.** Для каждого разбиения  $\alpha$  конечномерный свободный  $K$ -модуль  $\mathbb{F}^\alpha$  является представлением  $M$  со старшим весом  $\alpha^*$ , изоморфным некоторому подпредставлению  $H^0(\alpha^*)$ ; при этом  $\alpha^*$  есть доминантный положительный вес.

По следствию 3.15 представление  $\mathbb{F}^\alpha$  изоморфно  $\mathbb{D}^\alpha$ , а  $\mathbb{D}^\alpha$  можно рассматривать как подпредставление  $H^0(\alpha^*)$ . В следующем параграфе мы докажем, что  $\mathbb{F}^\alpha \cong H^0(\alpha^*) \cong L(\alpha^*)$ .

### § 3. Двойственность Шура–Вейля

#### 1. Классическая теорема двойственности Шура–Вейля.

Эта теорема устанавливает взаимосвязь действий алгебры эндоморфизмов  $\text{End}(V)$  и симметрической группы  $S_N$  в пространстве  $V^{\otimes N}$  ( $\text{End}(V)$  действует диагонально, а  $S_N$  — перестановками тензорных сомножителей). Рассмотрим те эндоморфизмы  $V^{\otimes N}$ , которые перестановочны с действием  $S_N$  («коммутант» этого действия). Тогда

$$\text{End}_{S_N}(V^{\otimes N}) \cong S^N(\text{End } V).$$

После квантования алгебра  $\text{End}(V)$  заменяется на алгебру  $M_r(n)$ . Вопрос в том, что будет аналогом групповой алгебры  $kS_N$ ?

**2. Обобщенные алгебры Гекке и Шура.**  $YB$ -пространством называется пара  $\underline{V} = (V, R)$ , состоящая из конечномерного векторного пространства  $V$  над  $k$  и оператора  $R \in \text{End}(V^{\otimes 2})$  с условием  $B(E(R)) = 0$  (см. 2.2.1).

Произведение  $YB$ -пространств  $\underline{V}$  и  $\underline{W}$  есть  $YB$ -пространство

$$\underline{V} \times \underline{W} = (V \otimes W, (1 \otimes P \otimes 1) \circ (R_V \otimes R_W) \circ (1 \otimes P \otimes 1)),$$

где  $P$  — оператор перестановки тензорных сомножителей.