в которой φ_l — изоморфизм. Композиция $E_d \circ \varphi$ переводит соотношения из $\mathbb{F}$ в 0, поэтому и E_f переводит их в 0.

Теорема 3.14. *Стандартные мономы образуют базис над K в алгебрах $\mathbb{F}$ и $\mathbb{D}$.*

Идея доказательства состоит в том, чтобы привести возможную нетривиальную линейную комбинацию стандартных мономов над K к аналогичному соотношению над k, используя последовательную специализацию параметров в 1. Но по теореме Ходжа стандартные мономы линейно независимы над k.

Следствие 3.15. *K-алгебры $\mathbb{D}$ и $\mathbb{F}$ изоморфны.*

Рассмотрим полученные результаты с точки зрения теории представлений.

Предложение 3.16. *Для каждого разбиения α конечномерный свободный K-модуль $\mathbb{F}^\alpha$ является представлением M со старшим весом α^*, изоморфным некоторому подпредставлению $H^0(\alpha^*)$; при этом α^* есть доминантный положительный вес.*

По следствию 3.15 представление $\mathbb{F}^\alpha$ изоморфно $\mathbb{D}^\alpha$, а $\mathbb{D}^\alpha$ можно рассматривать как подпредставление $H^0(\alpha^*)$. В следующем параграфе мы докажем, что $\mathbb{F}^\alpha \cong H^0(\alpha^*) \cong L(\alpha^*)$.

§ 3. Двойственность Шура–Вейля

1. Классическая теорема двойственности Шура–Вейля. Эта теорема устанавливает взаимосвязь действий алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}(V)$ и симметрической группы S_N в пространстве $V^{\otimes N}$ ($\mathrm{End}(V)$ действует диагонально, а S_N — перестановками тензорных сомножителей). Рассмотрим те эндоморфизмы $V^{\otimes N}$, которые перестановочны с действием S_N («коммутант» этого действия). Тогда

$$\mathrm{End}_{S_N}(V^{\otimes N}) \cong S^N(\mathrm{End}\, V).$$

После квантования алгебра $\mathrm{End}(V)$ заменяется на алгебру $M_?(n)$. Вопрос в том, что будет аналогом групповой алгебры kS_N?

2. Обобщенные алгебры Гекке и Шура. *YB-пространством* называется пара $\underline{V} = (V, R)$, состоящая из конечномерного векторного пространства V над k и оператора $R \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ с условием $\mathrm{BE}(R) = 0$ (см. 2.2.1).

Произведение YB-пространств $\underline{V}$ и $\underline{W}$ есть YB-пространство

$$\underline{V} \times \underline{W} = (V \otimes W, (1 \otimes P \otimes 1) \circ (R_V \otimes R_W) \circ (1 \otimes P \otimes 1)),$$

где P — оператор перестановки тензорных сомножителей.

Двойственное YB-пространство $\underline{V}^*$ определено, если R обратим:

$$\underline{V}^* = (V^*, (R^t)^{-1}).$$

С YB-пространством $\underline{V}$ ассоциируется YB-симметрическая алгебра

$$S(\underline{V}) = \mathbb{T}(V)/(\mathrm{Im}(R-1)).$$

Рассмотрим алгебру $M(\underline{V}) = S(\underline{V} \times \underline{V}^*)$. Выберем базис $\{v_i\}$ в V и двойственный базис $\{v^j\}$ в V^*. Положим $z_i^j = v_i \otimes v^j$. Нетрудно видеть, что

$$M(\underline{V}) = k\langle Z\rangle / (RZ \otimes Z - Z \otimes ZR),$$

где R — уже матрица оператора R в базисе $\{v_i \otimes v_j\}$.

Пусть $\underline{V} = (V, R)$ — YB-пространство. Рассмотрим $V^{\otimes N}$ как модуль над группой кос Bd_N, сопоставляя образующей σ_i оператор R^{ii+1}. Определим $H(\underline{V}, N)$ как подалгебру в $\mathrm{End}_k(V^{\otimes N})$, порожденную всеми операторами R^{ii+1}, $i = 1, \ldots, N-1$. Алгебра $H(\underline{V}, N)$ называется *обобщенной алгеброй Гекке.* Пусть $H(\underline{V}) = \varinjlim_N H(\underline{V}, N)$.

Определим, наконец, *обобщенную алгебру Шура* YB-пространства $\underline{V}$ – $\mathrm{Sch}(\underline{V})$, положив

$$\mathrm{Sch}(\underline{V}) = \widehat{\bigoplus_{N \geqslant 0}} \mathrm{Sch}(\underline{V})_N$$

($\widehat{\bigoplus}$ означает пополненную прямую сумму), где $\mathrm{Sch}(\underline{V})_0 = k$, $\mathrm{Sch}(\underline{V})_1 = \mathrm{End}\, V$, $\mathrm{Sch}(\underline{V})_N = \mathrm{End}_{H(\underline{V}, N)}(V^{\otimes N})$ при $N \geqslant 2$.

Пополнение необходимо для того, чтобы в алгебре $\mathrm{Sch}(\underline{V})$ была единица.

Лемма 3.17. *Алгебра* $\mathrm{Sch}(\underline{V})$ *является биалгеброй.*

Теорема 3.18 (двойственность Шура–Вейля). *Существует невырожденное спаривание* $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathrm{Sch}(\underline{V}) \otimes M(\underline{V}) \to k$ *такое, что*

1) $\langle Sch(\underline{V})_r, M(\underline{V})_s\rangle = 0$ *при* $r \neq s$;

2) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — *спаривание биалгебр, т. е.*

$$\langle \Delta a, xy\rangle = \langle a, x \otimes y\rangle, \qquad \langle a \otimes b, \Delta x\rangle = \langle ab, x\rangle.$$

3. Классическая алгебра Гекке. Мы дадим два эквивалентных варианта определения этого объекта.

А. Пусть (W, S) — система Кокстера, т. е. W — группа, порожденная отражениями, S — множество ее образующих; $l(w)$ — длина элемента $w \in W$, т. е. наименьшее количество образующих из S, участвующих в несократимой записи w. Алгебра Гекке $H_q(W, S)$ порождается как линейное пространство над полем k символами T_w для каждого элемента $w \in W$, а умножение задается таким правилом:

$$T_w T_s = \begin{cases} T_{ws}, & \text{при } l(ws) > l(w), \\ (q-1)T_w + qT_{ws}, & \text{при } l(ws) < l(w). \end{cases}$$

В. Рассмотрим группу $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ и ее борелевскую подгруппу B. Определим алгебру Гекке $H_q(G, B)$ как алгебру k-значных функций на G относительно свертки, постоянных на двойных классах смежности BgB. Поскольку имеется разложение Брюа $G = \coprod_{w \in W} BwB$, где W — группа Вейля G, линейное пространство $H_q(G, B)$ порождается функциями t_w такими, что $t_w(BvB) = \delta_{wv}$.

Пусть $G = \mathrm{SL}(N)$, тогда $W = S_N$. В качестве образующих (элементов множества S) выберем транспозиции соседних элементов $(i, i+1)$ для $i = 1, \ldots, N-1$. Обозначив $T_i = T_{(i, i+1)}$, получаем следующее описание соотношений в алгебре $\mathbb{H}_q(N)$, отвечающей группе $\mathrm{SL}(n)$:

$$T_i T_j = T_j T_i \quad \text{при} \quad |i-j| > 1,$$
$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1},$$
$$(T_i + 1)(T_i - q) = 0.$$

Очевидно, что $\dim_k \mathbb{H}_q(N) = N!$. Имеет место важная

Теорема 3.19. *Алгебры $\mathbb{H}_q(N)$ и kS_N изоморфны, если q не является корнем из единицы.*

Положим $\mathbb{H}_q = \varinjlim_N \mathbb{H}_q(N)$.

Появление в наших рассмотрениях классической алгебры Гекке $\mathbb{H}_q(N)$ объясняется следующим фактом.

Теорема 3.20. 1. *Обобщенная алгебра Гекке, отвечающая $M_{P,Q,c}(n)$, изоморфна $\mathbb{H}_{c^{-1}}$.*

2. *Имеется квантовый аналог двойственности Шура–Вейля:*

$$\mathrm{End}_{\mathbb{H}_{c^{-1}}(N)}(V^{\otimes N}) \cong (M_{P,Q,c}(n))_N.$$

Отметим, что представление $\mathbb{H}_{c^{-1}}(N)$ в $V^{\otimes N}$ задается сопоставлением

$$T_i \mapsto c^{-1} R_+^{i, i+1},$$

где оператор R_+ указан в п. 2.2.7.

4. Алгебра Шура и полная приводимость представлений. Теорема 3.18 влечет эквивалентность категорий левых конечномерных $M(\underline{V})$-комодулей и правых конечномерных $\mathrm{Sch}(\underline{V})$-модулей. В частности, если алгебра $\mathrm{Sch}(\underline{V})$ полупроста, то всякое конечномерное представление $M(\underline{V})$ ($M(\underline{V})$-комодуль) вполне приводимо. Полупростота $\mathrm{Sch}(\underline{V})$ равносильна полупростоте $H(\underline{V})$.

Р. Дипперу и Г. Джеймсу [75] принадлежит следующий критерий полупростоты алгебры $\mathbb{H}_q$.

Теорема 3.21. *Алгебра* $\mathbb{H}_q$ *полупроста тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $\operatorname{char} k = 0$ *и* $q = 1$;

2) q *не есть корень из единицы.*

Теорема 3.22. *Всякое представление* $\mathrm{GL}_{P,Q,c}(n)$ *вполне приводимо тогда и только тогда, когда либо* $c = 1$ *и* $\operatorname{char} k = 0$, *либо* c *не есть корень из* 1.

Набросок доказательства. Полупростота алгебры Шура, отвечающей многопараметрической деформации, вытекает из полупростоты алгебры Гекке. Это влечет полную приводимость всех полиномиальных представлений $\mathrm{GL}_{P,Q,c}(n)$. Но полная приводимость всех представлений равносильна неприводимости индуцированных представлений $H^0(\lambda)$ для всех доминантных весов λ [117]. Замечая, что $D^m \otimes H^0(\lambda) = H^0(\lambda + m\omega_n)$ и при $m \gg 0$ вес $\lambda + m\omega_n$ положителен, мы получаем требуемое, поскольку единственное неприводимое подпредставление $H^0(\lambda)$ есть $L(\lambda)$.

Следствие 3.23. *Представления* $\mathbb{F}^\alpha$, *построенные в § 2, неприводимы и изоморфны* $L(\alpha^*)$ *тогда и только тогда, когда либо* $c = 1$ *и* $\operatorname{char} k = 0$, *либо* c *не есть корень из* 1.

Таким образом, мы получаем полную характеризацию представлений $\mathrm{GL}_{P,Q,c}(n)$ для общего c: они имеют вид

$$(D^{-1})^m \otimes \mathbb{F}^\alpha,$$

где D^{-1} — одномерное представление: $w \mapsto (\det)^{-1} \otimes w$.

Для $\mathrm{GL}_J(2)$ обобщенная алгебра Гекке, очевидно, совпадает с групповой алгеброй симметрической группы, поэтому всякое представление $\mathrm{GL}_J(2)$ и $\mathrm{SL}_J(2)$ является вполне приводимым.

Замечание. Напомним, что функционал $I\colon H \to k$ на алгебре Хопфа называется *левоинвариантным интегралом*, если $(I \otimes 1)\Delta_H = \eta_H I$. Известно, что если левоинвариантный интеграл существует, то он единствен с точностью до пропорциональности. Следующие условия эквивалентны:

1) любой конечномерный комодуль над H вполне приводим;

2) H как левый комодуль над собой вполне приводим;

3) на H существует левоинвариантный интеграл.

Тем самым теорему 3.22 можно интерпретировать как теорему существования инвариантного интеграла, явная формула для которого выглядит весьма сложно.

Пример. Базис в алгебре $k[\mathrm{SL}_q(2)]$ составляют мономы $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ с $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \geqslant 0$ и $\alpha\delta = 0$. Если q не есть корень из единицы или $q = 1$

и $\operatorname{char} k = 0$, то инвариантый интеграл на $\mathrm{SL}_q(2)$ существует и выглядит так:

$$I(a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta \neq \gamma, \\ \dfrac{(-1)^n(q-q^{-1})}{q^n - q^{-n}} & \text{при } \beta = \gamma = n. \end{cases}$$

5. Алгебра Гекке и стандартная размерность. Вернемся к обсуждению вопроса о стандартности размерности сильной R-матричной алгебры M_R. Техника двойственности Шура–Вейля вместе с одним результатом теории деформаций позволяет дать изящное решение этой проблемы [87].

Предположим, что сильная R-матрица R имеет минимальный многочлен $(R+1)(R-\mathrm{c}) = 0$. Сравним действия $H(\underline{V}, N)$ и kS_N в $V^{\otimes N}$. Поскольку

$$\operatorname{End}_{H(\underline{V},N)}(V^{\otimes N}) \cong (M_R)^*_N,$$

а

$$\operatorname{End}_{kS_N}(V^{\otimes N}) \cong (M_P)^*_N$$

(P — оператор перестановки), изоморфизм левых частей этих равенств означал бы искомое равенство размерностей. Иными словами, верно следующее утверждение.

Лемма 3.24. *Пусть R есть решение* (BE) *и* $(R+1)(R-\mathrm{c}) = 0$. *Тогда коммутативность диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} H(\underline{V}, N) & \hookrightarrow & \operatorname{End}_k(V^{\otimes N}) \\ {\scriptstyle \psi_N}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi_N}\downarrow \\ kS_N & \hookrightarrow & \operatorname{End}_k(V^{\otimes N}) \end{array}$$

где φ_N, ψ_N — изоморфизмы алгебр, равносильна равенству $\dim_k(M_R)^*_N = \dim_k(M_P)^*_N$.

Воспользуемся средствами теории деформаций. Будем предполагать, что $R = P + hR_1 + h^2R_2 + \ldots$ $(c = e^h)$. Изоморфизмы, фигурирующие в лемме, должны иметь вид $\varphi_N = \mathrm{id} + O(h)$, $\psi_N = \mathrm{id} + O(h)$. В силу наших предположений об R имеет место эпиморфизм $\mathbb{H}_c(N) \to H(\underline{V}, N)$. Поэтому коммутативность диаграммы из леммы равносильна коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}_c(N) & \longrightarrow & H(\underline{V}, N) & \hookrightarrow & \operatorname{End}_k(V^{\otimes N}) \\ {\scriptstyle \tilde{\psi}_N}\downarrow & & {\scriptstyle \psi_N}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi_N}\downarrow \\ kS_N & \xrightarrow{\sim} & kS_N & \hookrightarrow & \operatorname{End}_k(V^{\otimes N}) \end{array} \qquad (1)$$

с изоморфизмом алгебр $\bar{\psi}_N = \mathrm{id} + O(h)$.

Пусть имеется гомоморфизм алгебр $f\colon A \to B$. Гомоморфизм $f_h\colon A_h \to B_h$ вида $f_h = f + O(h)$ их деформаций называется деформацией f. Имеется теория когомологий $H^\bullet(f, f)$, отвечающая за деформации гомоморфизма f. Именно, элементы $H^2(f, f)$ взаимно однозначно отвечают инфинитезимальным деформациям f, а в $H^3(f, f)$ лежит препятствие. В частности, жесткость отображения f равносильна существованию изоморфизмов $\varphi = \mathrm{id} + O(h)$, $\psi = \mathrm{id} + O(h)$, делающих диаграмму

$$\begin{tikzcd} A_h \arrow[r, "f_h"] \arrow[d, "\varphi"'] & B_h \arrow[d, "\varphi"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Лемма 3.25. *Имеется длинная точная последовательность*

$$\ldots \to HH^{n-1}(A, B) \to H^n(f, f) \to$$
$$\to HH^n(A, A) \oplus HH^n(B, B) \to HH^n(A, B) \to \ldots$$

В диаграмме (1) сквозное отображение в верхней строке является деформацией сквозного отбражения в нижней. Но алгебры kS_N и $\mathrm{End}(V^{\otimes N})$ являются сепарабельными и имеют нулевые когомологии Хохшильда с положительными номерами. Поэтому вложение $kS_N \hookrightarrow \mathrm{End}_k(V^{\otimes N})$ является жестким, и изоморфизмы $\bar{\psi}_N$ и φ_N существуют. Итак, доказана

Теорема 3.26. *Пусть оператор R таков, что*
1) $\mathrm{BE}(R) = 0$;
2) $(R + 1)(R - \mathrm{c}) = 0$, $c = e^h$;
3) $R = P + O(h)$.
Тогда алгебра M_R имеет стандартную размерность.

§ 4. Морфизм Фробениуса

1. Квантовый бином Ньютона. Рассмотрим алгебру $A_q = k\langle x, y\rangle/(xy - q^{-1}yx)$. Тогда

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k}.$$

Здесь $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ есть гауссовский биномиальный коэффициент, равный числу точек k-грассманиана n-мерного пространства над полем из q элементов (явную формулу см. в п. 1.4.4).