

с изоморфизмом алгебр $\bar{\psi}_N = \text{id} + O(h)$.

Пусть имеется гомоморфизм алгебр $f: A \rightarrow B$. Гомоморфизм $f_h: A_h \rightarrow B_h$ вида $f_h = f + O(h)$ их деформаций называется деформацией f . Имеется теория когомологий $H^*(f, f)$, отвечающая за деформации гомоморфизма f . Именно, элементы $H^2(f, f)$ взаимно однозначно отвечают инфинитезимальным деформациям f , а в $H^3(f, f)$ лежит препятствие. В частности, жесткость отображения f равносильна существованию изоморфизмов $\varphi = \text{id} + O(h)$, $\psi = \text{id} + O(h)$, делающих диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A_h & \xrightarrow{f_h} & B_h \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

коммутативной.

Лемма 3.25. Имеется длинная точная последовательность

$$\dots \rightarrow HH^{n-1}(A, B) \rightarrow H^n(f, f) \rightarrow \dots \rightarrow HH^n(A, A) \oplus HH^n(B, B) \rightarrow HH^n(A, B) \rightarrow \dots$$

В диаграмме (1) сквозное отображение в верхней строке является деформацией сквозного отображения в нижней. Но алгебры kS_N и $\text{End}(V^{\otimes N})$ являются сепарабельными и имеют нулевые когомологии Хохшильда с положительными номерами. Поэтому вложение $kS_N \hookrightarrow \text{End}_k(V^{\otimes N})$ является жестким, и изоморфизмы $\bar{\psi}_N$ и φ_N существуют. Итак, доказана

Теорема 3.26. Пусть оператор R таков, что

- 1) $\text{BE}(R) = 0$;
- 2) $(R + 1)(R - c) = 0$, $c = e^h$;
- 3) $R = P + O(h)$.

Тогда алгебра M_R имеет стандартную размерность.

§ 4. Морфизм Фробениуса

1. Квантовый бином Ньютона. Рассмотрим алгебру $A_q = k\langle x, y \rangle / (xy - q^{-1}yx)$. Тогда

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q x^k y^{n-k}.$$

Здесь $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q$ есть гауссовский биномиальный коэффициент, равный числу точек k -гравссамиана n -мерного пространства над полем из q элементов (явную формулу см. в п. 1.4.4).

Если q есть примитивный корень из единицы степени l , то

$$(x + y)^l = x^l + y^l.$$

Это и есть источник аналогии со случаем поля простой характеристики в коммутативной алгебраической геометрии.

2. Определение морфизма Фробениуса. В этом параграфе мы будем иметь дело только с $M = M_{R, Q, c}(n)$; предполагается, что c есть примитивный корень из единицы степени l . Введем алгебру $M_{(l)}$, охарактеризовав ее как R -матричную алгебру, заданную матрицей $R_{(l)}$, которая получается из R_+ заменой p_{ij} на $p_{ij}^{l^2}$ и q_{ij} на $q_{ij}^{l^2}$ (тогда $p_{ij}^{l^2} q_{ij}^{l^2} = c^{l^2} = 1$). Это некоторая алгебра косых многочленов. Аналогично, введем алгебры $A_{(l)}$, $B_{(l)}$ и $k[G_{(l)}] \cong M_{(l)} \langle (D^{(l)})^{-1} \rangle$. Образующие этих алгебр мы будем снабжать верхним индексом (l) : $x_i^{(l)}, \xi_i^{(l)}, z_i^{(l)}, \dots$

Теорема 3.27. Отображение $F_M^*: M_{(l)} \rightarrow M$, при котором $F_M^*(z^{(l)j}) = (z^j)^l$, является корректно определенным морфизмом биалгебр. Морфизм F_M^* продолжается до морфизма алгебр Хопфа $F_G^*: k[G_{(l)}] \rightarrow k[G]$ так, что $F_G^*((D^{(l)})^{-1}) = D^{-l}$.

Морфизм $F_G^*: k[G_{(l)}] \rightarrow k[G]$ алгебра Хопфа или соответствующее ему отображение квантовых групп $F_G: G \rightarrow G_{(l)}$ называется *морфизмом Фробениуса*.

3. Некоторые результаты. Алгебра Шура, отвечающая $c^l = 1$, уже не является полупростой, поэтому не все представления $G_{(l)}$ вполне приводимы. Имеется теория, аналогичная модулярной теории представлений, называемая инфинитезимальной теорией представлений (см. [78, 118]).

Для однопараметрической деформации $G = \mathrm{GL}_q(n)$ алгебра Хопфа $k[G_{(l)}]$ изоморфна $k[\mathrm{GL}(n)]$ и является коммутативной. Неформально говоря, мы получаем аналог фробениусова накрытия $F_G: \mathrm{GL}_q(n) \rightarrow \mathrm{GL}(n)$ в характеристике нуль, который, однако, становится некоммутативным.

Особенно удобно применять когомологические методы теории представлений, поскольку имеется точная последовательность (алгебра Хопфа)

$$0 \rightarrow k[G_{(l)}] \rightarrow k[G] \rightarrow k[G_{(l)}^1] \rightarrow 0,$$

в которой $G_{(l)}^1$ называется *ядром Фробениуса*; для представления V группы G имеем спектральную последовательность с членом $E_2^{s, t} = H^s(G_{(l)}, H^t(G_{(l)}^1, V))$, сходящуюся к $H^{s+t}(G, V)$. Это позволяет доказать аналоги теорем Серра (о двойственности, обильности строго доминантного веса), теоремы Кемпфа об обращении в нуль, теоремы Бореля–Вейля–Ботта (см. [117]).

Пусть V есть представление $G_{(l)} = \mathrm{GL}(n)$. Тогда определено представление F^*V группы $G = \mathrm{GL}_q(n)$, обозначаемое также $V^{(l)}$, и имеет место следующий аналог теоремы Стейнберга о тензорном произведении.

Теорема 3.28. Пусть $\lambda = \lambda_0 + l\lambda_1$ есть доминантный вес, при чем λ_0 ограничен и λ_1 доминантен. Тогда $L(\lambda) \cong L(\lambda_0) \otimes L^0(\lambda_1)^{(l)}$. (Здесь $L^0(\lambda)$ есть неприводимое представление $GL(n)$ с весом λ .)

Отметим, что в характеристике p определено не только первое, но и высшие ядра Фробениуса; в некоммутативном случае аналогов последних неизвестно.

§ 5. Алгебры Хопфа $U_q \mathfrak{sl}(n)$ и $k[SL_q(n)]$ с точки зрения теории представлений

1. Представления $U_q \mathfrak{sl}(n)$. Представление алгебры $U_q \mathfrak{g}$ — это гомоморфизм алгебр $\rho: U_q \mathfrak{g} \rightarrow \text{Mat}(n, k)$. Двойственное представление определяется при помощи отображений

$$\rho^*: U_q \mathfrak{g} \xrightarrow{S} U_q \mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \text{Mat}(n, k) \xrightarrow{\cdot^t} \text{Mat}(n, k)$$

(S есть антипод, а последнее отображение есть транспонирование матрицы).

Удобно реализовать $U_q \mathfrak{sl}(2)$ в терминах образующих Люстига.

Теорема 3.29. 1. Если q не есть корень из 1 и $\text{char } k \neq 2$, то для всех целых $l \geq 0$ определено представление $\rho_l: U_q \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \text{Mat}(l+1, k)$, такое что

$$\rho_l(K) = \text{diag}(q^l, q^{l-1}, \dots, q^{-l}),$$

$$\rho_l(E) = \begin{pmatrix} 0 & \{l\} & & \\ & 0 & \{l-1\} & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \{1\} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_l(F) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \{1\} & 0 & & \\ & \{2\} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \{l\} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\{i\} = \frac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}}$.

Отображение $\rho'_l: U_q \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \text{Mat}(l+1, k)$ такое, что $\rho'_l(K) = -\rho_l(K)$, $\rho'_l(E) = -\rho_l(E)$, $\rho'_l(F) = \rho_l(F)$ также является представлением $U_q \mathfrak{sl}(2)$.

2. Всякое конечномерное представление $U_q \mathfrak{sl}(2)$ вполне приводимо, а полное множество попарно неэквивалентных неприводимых представлений составляют представления ρ_l и ρ'_l , $l \geq 0$.

Доказательство в точности повторяет свой классический аналог. Неожиданно то, что в отличие от привычной ситуации появляются две серии неприводимых представлений. Этот феномен обязан своим происхождением наличию выражения $q - q^{-1}$ в знаменателе $[E, F]$ (корень из единицы степени 2!). При другом выборе образующих в том же месте стоит $q^2 - q^{-2}$, что приводит к появлению четырех серий неприводимых представлений.