Одним из этапов доказательства служит установление полной приводимости представлений $U_q\,\mathrm{sl}(n)$ и характеризация неприводимых конечномерных представлений своими старшими доминантными весами и сигнатурами — наборами из ± 1 длины $n-1$.

3. Алгебры $U_q\,\mathrm{sl}(n)$ и $k[\mathrm{SL}_q(n)]$. Исключительные значения параметра. Классический аналог ситуации заимствуется из теории представлений над полем k характеристики p. Односвязность группы $\mathrm{SL}(n)$ над k интерпретируется как изоморфизм алгебр Хопфа $\widetilde{U}\,\mathrm{sl}(n)'$ и $k[\mathrm{SL}(n)]$, где $\widetilde{U}\,\mathrm{sl}(2)$ есть *гипералгебра* $\mathrm{sl}(n)$.

Следуя Люстигу, определим квантовую гипералгебру $\widetilde{U}_q\mathfrak{g}$. Рассмотрим квантовую универсальную обертывающую $U_t\mathfrak{g}$, где t — формальный параметр, и ее $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-подалгебру $\widetilde{U}_t\mathfrak{g}$, порожденную

$$E_i^{(m)} = \frac{E_i^m}{\{m\}!}, \quad F_i^{(m)} = \frac{F_i^m}{\{m\}!}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad m \geqslant 0; \qquad \{m\} = \frac{t^m - t^{-m}}{t - t^{-1}}$$

и K_i, K_i^{-1}. Эта подалгебра содержит, в частности, элементы

$$\left\{ {K_i \atop s} \right\} = \prod_{\nu=1}^{s} \frac{t^{1-\nu}K_i - t^{\nu-1}K_i^{-1}}{t^{\nu} - t^{-\nu}}, \qquad s \geqslant 0.$$

$\left(\text{Заметим, что } [E_i, F_i] = \left\{ {K_i \atop 1} \right\}\right)$. По определению $\widetilde{U}_q\mathfrak{g}$ получается из $\widetilde{U}_t\mathfrak{g}$ специализацией $t \mapsto q$. Отметим, что если q не является корнем из единицы, то $\widetilde{U}_q\mathfrak{g} \cong U_q\mathfrak{g}$.

Характеры γ_i, введенные выше для $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(n)$, остаются определенными и на $\widetilde{U}_q\,\mathrm{sl}(n)$. Удается доказать следующий факт.

Теорема 3.33. *Если* $\mathrm{char}\,k = 0$ *и* q *есть примитивный корень из единицы степени* p^r, *где* p — *простое нечетное число, то*

$$\widetilde{U}_q\,\mathrm{sl}(n)' \cong k[\mathrm{SL}_q(n)] \rtimes \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} \rangle .$$

Скорее всего, утверждение верно и при q, равном примитивному корню из единицы любой нечетной степени, большей 1, и $\mathrm{char}\,k \neq 2$.

Библиографический комментарий

Теория представлений разнообразных квантовых групп представляет собою одно из наиболее разработанных направлений. Это объясняется тем, что квантовые аналоги, как правило, ни формулировкой, ни доказательством не отличаются от своих классических прообразов. С другой стороны, изучение представлений стимулируется интересом как со стороны физиков, так и со стороны специалистов по представлениям алгебраических групп. Нетривиальные приложения для первых —

квантовая теория поля, для вторых — некоммутативные «фробениусовы накрытия» в характеристике нуль.

Имеетмся несколько подробных работ, излагающих основные сюжеты теории представлений квантовых групп.

Классическая теория представлений изложена современным языком в монографии Й. Янтцена [91]. Представления квантовых универсальных обертывающих при неисключительных значениях параметра обсуждаются в [53, 55, 122]. Исключительный случай исследован в цикле работ В. Г. Каца с соавторами [69–71]. Представления квантованных алгебр регулярных функций рассмотрены в [117]. Когомологические методы и результаты обсуждаются в [55, 117, 118]. Флаговые пространства и многообразия Шуберта для квантовых групп конструируются в [42, 102, 125]. В литературе исследованы также следующие сюжеты: представления и q-специальные функции, коэффициенты Клебша–Гордана и Рака–Вигнера, реализация представлений операторами рождения—уничтожения, разнообразные квантовые однородные пространства (квантовые сферы и гиперболоиды), базисы Гельфанда–Цетлина и т. д.

Материал § 1 заимствован нами в основном из [117]. Жорданова деформация GL(2) изучалась в [28, 100]. Явное описание пространства флагов дали впервые Э. Тафт и Т. Таубер [129], модификация их конструкции изложена в работе автора [12]. Основы идеологии квантовой двойственнсти Шура–Вейля заложены М. Джимбо [92]; соответствующий абстрактный формализм, изложенный нами, разработан в [89]. Применение этой двойственности для доказательства полной приводимости представлений дано нами по [117]. Предварительные соображения из [11] по поводу стандартности размерности превращены в удобную теорему в [87]. Классическая алгебра Гекке используется для построения канонического базиса представлений $\mathrm{GL}_q(n)$ в [79]. Интересно отметить, что, несмотря на общематематическую популярность классической алгебры Гекке, хорошего конспекта сведений о ней не имеется. Кое-что можно собрать по [27] и [75].

Морфизм Фробениуса в характеристике нуль обнаружен Дж. Люстигом. Им же введена «$\mathbb{Z}$-форма» алгебры $U_q\mathfrak{g}$ при исключительных q. Наличие морфизма Фробениуса наследуют почти все объекты, связанные с квантовой группой — см. [14] и гл.4. Представляет интерес изучение «смешанного случая», когда параметр деформации есть корень из единицы, а поле имеет простую характеристику [54]. Материал § 5 дан по работе [134].

Укажем, в заключение, на весьма интересную работу [83], где обнаруживаются многообещающие связи между представлениями квантовых групп, p-адическим анализом и теорией ζ-функцией Римана.