ГЛАВА 4

НЕКОММУТАТИВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Некоммутативный комплекс де Рама конечномерного векторного пространства

1. Аксиомы. Пусть даны две градуированные алгебры

$$A = k\langle x_1, \ldots x_n\rangle/(I_A) \quad \text{и} \quad B = k\langle \xi_1, \ldots, \xi_n\rangle/(I_B)$$

с одинаковым количеством образующих; I_A и I_B — подпространства, порождающие соответствующие идеалы.

Биградуированная алгебра $\Omega(A, B)$ называется *некоммутативным комплексом де Рама*, ассоциированным с A и B, если выполнены следующие аксиомы.

DRC1. Алгебры A и B вложены в Ω; пусть $i_A\colon A \to \Omega$, $i_B\colon B \to \Omega$ — соответствующие вложения.

DRC2. В диаграмме

$$A \otimes B \xrightarrow{m \circ (i_A \otimes i_B)} \Omega \xleftarrow{m \circ (i_B \otimes i_A)} B \otimes A$$

обе стрелки суть изоморфизмы биградуированных векторных пространств.

DRC3. Алгебра Ω является дифференциальной градуированной алгеброй (DG-*алгеброй*), причем $\deg d = (1, -1)$ при отождествлении Ω с $B \otimes A$.

DRC4. Алгебра Ω есть $M(A, B)$-комодуль, изоморфный $B \otimes A$.

Комментарий. В этом определении A играет роль алгебры полиномиальных функций на n-мерном пространстве, а B — алгебры форм с постоянными коэффициентами. Эта асимметрия выражена аксиомой DRC3. Легко понять, что из аксиомы DRC4 вытекает «ковариантность» дифференциала d относительно кодействия $M(A, B)$, т. е. d есть эндоморфизм Ω как $M(A, B)$-комодуля.

2. Комплекс Весса–Зумино и R-матричные алгебры. Будем считать алгебры A и B квадратичными, причем

$$I_A = \langle (1 - \mathcal{A})x \otimes x\rangle$$

и

$$I_B = \langle (1-\mathcal{B})\xi \otimes \xi \rangle .$$

Из аксиомы DRC2 следует, что каждое произведение вида $f\omega$, где $f \in A$, а $\omega \in B$, можно переписать как $\sum \omega_i' f_i'$. Для этого достаточно уметь переставлять образующие x_i и ξ_j. Пусть

$$x_i \xi = \sum_{k,l} \mathcal{C}_{ij}^{kl} \xi_k x_l$$

с обратимой матрицей $\mathcal{C}$. Перепишем теперь аксиомы DRC в терминах образующих и соотношений:

1) $\Omega = k\langle x_1, \ldots x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle / (I_\Omega)$ и $I_\Omega \supset (1-\mathcal{A})x \otimes x, (1-\mathcal{B})\xi \otimes \xi$;
2) $\mathcal{C}$ невырождена;
3) существуют матрицы $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathrm{Mat}(n^3, k)$ такие, что

$$(1-\mathcal{A}_{12})\mathcal{C}_{23}\mathcal{C}_{12} = \mathcal{F}(1-\mathcal{A}_{23}), \qquad (1-\mathcal{B}_{12})\mathcal{C}_{23}^{-1}\mathcal{C}_{12}^{-1} = \mathcal{F}'(1-\mathcal{B}_{23});$$

4) $\mathcal{C} \in \mathcal{R}(M(A,B))$;
5) $(1-\mathcal{A})(1+\mathcal{C}) = 0$, $\mathrm{Im}(1+\mathcal{C}) \subset \mathrm{Im}(1-\mathcal{B})$.

Соотношение 3 очень похоже на уравнение (BE). Это наблюдение и положено в основу следующего важного результата Весса и Зумино.

Предложение 4.1. *Пусть R — невырожденное решение уравнения Янга–Бакстера* (BE), *причем*

$$(R-1)(R+c) = 0.$$

Тогда DG-*алгебра*

$$\Omega_R = k\langle x_1, \ldots x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle / ((R-1)x \otimes x, (R+c)\xi \otimes \xi, x \otimes \xi - c^{-1}R\xi \otimes x)$$

есть некоммутативный комплекс де Рама (называемый далее *WZ-комплексом*), *ассоциированный с алгебрами*

$$A_R = k\langle x_1, \ldots, x_n \rangle / ((R-1)x \otimes x) \quad \text{и} \quad B_R = k\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle / ((R+c)\xi \otimes \xi).$$

Наличие сильной R-матрицы в алгебре $\mathcal{R}(M(A,B))$ служит не только достаточным, но и необходимым условием существования некоммутативного комплекса де Рама (в квадратичном случае).

Теорема 4.2. *Некоммутативный комплекс де Рама, ассоциированный с однородными квадратичными алгебрами A и B, существует тогда и только тогда, когда $M(A,B)$ есть сильная R-матричная алгебра. При этом матрица $\mathcal{C}$ пропорциональна матрице, задающей сильную R-структуру. Все такие комплексы получаются из конструкции Весса–Зумино (являются WZ-комплексами).*

Мы уже знаем, что существует не более двух матриц Янга–Бакстера, задающих сильную R-структуру на $M(A,B)$ (теорема 2.15), поэтому существует и не более двух WZ-комплексов, ассоциированных с парой A, B. Именно, комплекс, в котором $x \otimes \xi = c^{-1}R\xi \otimes x$, обозначим $\Omega_+(A,B)$, а в $\Omega_-(A,B)$ перестановочное соотношение есть $x \otimes \xi = cR^{-1}\xi \otimes x$. Отметим, что рассматриваемые R-матрицы автоматически имеют минимальный многочлен степени 2.

Предложение 4.3. *Пусть Ω есть WZ-комплекс, ассоциированный с квадратичными алгебрами A и B такими, что* $\dim A = \dim S(k^n)$ *и* $\dim B = \dim \Lambda(k^n)$. *Тогда* $\dim \Omega = \dim S(k^n) \otimes \Lambda(k^n)$. (Под dim понимается размерность градуированных алгебр.)

Итак, WZ-комплекс удовлетворяет эвристическому определению деформации п. 2.1.3.

Пример. Рассмотрим алгебры

$$A = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / (x_i x_j - q_{ij}^{-1} x_j x_i),$$
$$B = k\langle \xi_1, \ldots, \xi_n\rangle / (\xi_i \xi_j + p_{ij} \xi_j \xi_i, \xi_i^2).$$

Как известно, $M(A, B)$ — сильная R-матричная алгебра в том случае, когда

$$p_{ij} q_{ij} = c^{\operatorname{sgn}(j-i)},$$

и в общем случае имеется две матрицы Янга–Бакстера R_+ и R_-. Тогда $\Omega_{R_\pm} = \Omega_\pm$. Вычислим явно соотношения в $\Omega_\pm$.

Соотношения в A и B, общие для $\Omega_\pm$:

$$x_i x_j = q_{ij}^{-1} x_j x_i,$$
$$\xi_i \xi_j = -p_{ij} \xi_j \xi_i, \qquad \xi_i^2 = 0.$$

Соотношения в Ω_+:

$$x_i \xi_i = c^{-1} \xi_i x_i,$$
$$x_i \xi_j = (c^{-1} - 1)\xi_i x_j + q_{ij}^{-1} \xi_j x_i, \qquad i < j,$$
$$x_i \xi_j = p_{ij} \xi_j x_i, \qquad i > j.$$

Соотношения в Ω_-:

$$x_i \xi_i = c \xi_i x_i,$$
$$x_i \xi_j = p_{ij} \xi_j x_i, \qquad i < j,$$
$$x_i \xi_j = (c - 1)\xi_i x_j + q_{ij}^{-1} \xi_j x_i, \qquad i > j.$$

Пусть M_R есть алгебра с детерминантом D (п. 2.3.2); B является фробениусовой алгеброй, а ω есть образующая старшей степени в B_R. Рассмотрим комплекс $\Omega(B, A)$. Имеет место соотношение $d\xi_i \omega = \Gamma_i^j \omega\, d\xi_j$ ($d\xi_i = x_i$ — образующая в A). Применяя к нему кодействие M_R, получаем $ZD\Gamma \otimes \omega\, d\xi = ZD \otimes d\xi \omega = \Gamma DZ \otimes \omega\, d\xi$, откуда $\Gamma DZ = ZD\Gamma$. Тем самым предложение 2.18 доказано.

3. Когомологии. Найдем когомологии WZ-комплекса Ω_R; подчеркнем, что Ω_R моделирует в некоммутативной ситуации комплекс

де Рама пространства k^n. Основная идея — перенести технику стягивающей гомотопии, используемую при доказательстве леммы Пуанкаре.

Определим «комплекс цилиндра» следующим образом:

$$\widehat{\Omega}_R = \Omega_R \langle t, \tau \rangle /(*),$$

где соотоношения $(*)$ суть

$$t\omega = \omega t \quad \text{для} \quad \omega \in \Omega_R,$$
$$\tau\omega = (-1)^{\tilde{\omega}} \omega\tau \quad \text{для однородного элемента } \omega \in \Omega_R,$$
$$\tau^2 = 0,$$
$$\tau t = ct\tau.$$

Алгебра $\widehat{\Omega}_R$ превращается в дифференциальную: дифференциал $\widehat{d}$: $\widehat{\Omega}_R \to \widehat{\Omega}_R$ определяется по формулам $\widehat{d}|_{\Omega_R} = d$, $\widehat{d}t = \tau$, $\widehat{d}\tau = 0$, и $\widehat{d}$ действует по (градуированному) правилу Лейбница.

Гомотопию h: $\widehat{\Omega}_R^k \to \Omega_R^{k-1}$ определим так: если $k = 0$, то $\Omega_R^{-1} = 0$ и мы полагаем $h(f) = 0$. Пусть $k \geqslant 1$, тогда всякий моном φ из $\widehat{\Omega}_R$ либо не содержит τ, либо имеет вид $\omega\tau t^s$, $s \geqslant 0$, $\omega \in \Omega_R$. Положим

$h(\varphi) = 0$, если φ не содержит τ;

$h(\omega\tau t^s) = (-1)^{\tilde{\omega}}[s+1]_{c^{-1}}^{-1}\omega$ в противном случае.

Очевидно, в этом определении важно, что c не есть корень из 1.

Теорема 4.4. *Пусть Ω_R есть WZ-комплекс, отвечающий решению R уравнения* (BE) *такому, что $(R-1)(R+c) = 0$ и c не является корнем из 1 или $c = 1$ и* char $k = 0$. *Тогда*

$$H^0(\Omega_R) = k, \qquad H^i(\Omega_R) = 0 \qquad \text{при } i > 0.$$

Напомним, что рядом Пуанкаре градуированной алгебры $C = \bigoplus_{i \geqslant 0} C_i$ называется ряд $P_C(t) = \sum_{i \geqslant 0} (\dim C_i) t^i$.

Следствие 4.5. *Для рядов Пуанкаре алгебр A_R и B_R выполнено соотношение $P_{A_R}(t)P_{B_R}(-t) = 1$.*

Найдем когомологии WZ-комплекса Ω_R в исключительном случае ($c^l = 1$) для нашего основного примера. Пусть для краткости $\Omega_R = \Omega$, $\Omega_{R^{(l)}} = \Omega_{(l)}$ с образующими $x_i^{(l)}$ и $\xi_i^{(l)}$; F обозначает морфизм Фробениуса из $A_{(l)}$ в A. Удобно воспользоваться формулой Кюннета, поскольку наш WZ-комплекс при произвольном n как векторное пространство есть тензорное произведение одномерных комплексов. Имеем точную последовательность

$$0 \to k[x^l] \to k[x] \xrightarrow{d} \xi k[x] \to 0.$$

Отсюда $H^0 = k[x^l]$ и $H^1 = \xi x^{l-1} k[x^l]$ (воспользуемся формулой

$$d([s+1]^{-1} x^{s+1}) = \xi x^s$$

для $s = 1, \ldots, l-1$). Значит, $H^r(\Omega)$ как пространство над k имеет базис $\xi_{i_1} x_{i_1}^{l-1} \ldots \xi_{i_r} x_{i_r}^{l-1} F(f)$.

Рассмотрим отображение (*морфизм Картье*) C^{-1}: $\Omega_{(l)} \to \Omega$, при котором

$$C^{-1}(\xi_{i_1}^{(l)} \ldots \xi_{i_k}^{(l)} f) = C^{-1}(\xi_{i_1}^{(l)}) \ldots C^{-1}(\xi_{i_k}^{(l)}) F(f).$$

Теорема 4.6. *Отображение C^{-1} задает изоморфизм алгебр и правых $A_{(l)}$-модулей $\Omega_{(l)}$ и $H(\Omega)$.*

Эта теорема является аналогом известной теоремы Картье [66] о когомологиях n-мерного пространства в характеристике p.

§ 2. Квантовые алгебры Вейля

1. Алгебра $\mathcal{D}_R$.

Определение 4.7. Пусть Ω есть WZ-комплекс. Операторы частного дифференцирования ∂_i: $A \to A$ задаются равенством

$$d = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_i,$$

в частности, $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Следствие 4.8. *Имеет место следующее «скрученное правило Лейбница» для операторов ∂_i:*

$$\partial_i(fg) = \partial_i(f) g + \sum_{j=1}^{n} \Xi_{ij}(f) \partial_j(g).$$

$\left(\text{По определению } f\xi_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_i \Xi_{ij}(f).\right)$

Доказательство. Воспользуемся правилом Лейбница для d и определением операторов Ξ_{ij}:

$$\sum \xi_i \partial_i(fg) = d(fg) = df.g + f.dg =$$
$$= \sum \xi_i \partial_i(f) g + \sum f \xi_j \partial_j(g) = \sum \xi_i \left(\partial_i(f) g + \sum \Xi_{ij}(f) \partial_j(g) \right).$$

Вспоминая, что $\{\xi_i\}$ линейно независимы над A справа по DRC2, получаем требуемое равенство.