Теорема 4.18. *Если*

$$\dim M_R = \dim k[\mathrm{Mat}_n] \quad \text{и} \quad \dim(M_{R^!})^! = \dim \Lambda[\mathrm{Mat}_n],$$

то $\dim W_R^{\uparrow\uparrow} = \dim W_R^{\downarrow\downarrow} = \dim(k[\mathrm{Mat}_n] \otimes \Lambda[\mathrm{Mat}_n])$.

Поэтому предложенные комплексы тоже удовлетворяют эвристическому определению деформации 2.1.3. Вычисление, подобное проведенному в конце п. 4.1.1, но более трудоемкое [137], дает, что если M_R — алгебра с детерминантом, то $\Gamma D\dot{Z} = \rho_R \dot{Z} D\Gamma$, где ρ_R — некоторая константа, зависящая от R. Это позволяет рассмотреть локализацию $\widetilde{W} = W_D$, объявив ее некоммутативным комплексом де Рама группы $\mathrm{GL}(n)$.

Теорема 4.19. *Назовем форму* $\omega \in \widetilde{W}^s$ *правоинвариантной, если компонента* $\Delta\omega$, *лежащая в* $\widetilde{W}^s \otimes \widetilde{W}$, *есть* $\omega \otimes 1$. *Тогда*:

1) *правоинвариантные формы образуют подкомплекс* $\widetilde{W}_{\mathrm{inv}}$ *и* $\widetilde{W} = \widetilde{W}_{\mathrm{inv}} \otimes \widetilde{W}^0$;

2) *алгебра* $\widetilde{W}_{\mathrm{inv}}$ *порождается* $\widetilde{W}_{\mathrm{inv}}^1$;

3) *пространство* $\widetilde{W}_{\mathrm{inv}}^1$ *порождается элементами матрицы* $\dot{Z}S(Z)$, *где* S — *антипод в* $\widetilde{W}$.

Константа ρ_R, как правило, не равна единице, даже если D лежит в центре M_R. Это не позволяет определить комплекс на $\mathrm{SL}(n)$ посредством факторизации $W/(D-1)$. Иные соображения для построения нужного комплекса см. в [142] и [36].

§ 4. Некоммутативные дифференциальные исчисления по Вороновичу

В этом параграфе излагается концепция некоммутативных дифференциальных исчислений, следующая классической схеме построения кольца дифференциалов и содержащая предыдущие конструкции как частные случаи.

1. Дифференциальные исчисления первого порядка. Пусть задана алгебра с единицей A, A-бимодуль M и линейное отображение $d\colon A \to M$. Набор (A, M, d) называется *некоммутативным дифференциальным исчислением первого порядка* (НДИ), если:

1) $d(ab) = da.b + a.db$ для всех a, b из A;

2) каждый элемент M может быть записан как $\sum a_i db_i$ для некоторых a_i и b_i из A.

Пример. Пусть $A^2 = \mathrm{Ker}(m\colon A \otimes A \to A)$, а $D\colon A \to A$ задано формулой $Da = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Тогда (A, A^2, D) есть НДИ, которое оказывается универсальным в следующем смысле. Если N — подбимодуль в A^2 и $\pi\colon A^2 \to N$ — каноническая проекция, а $d_N = \pi \circ D$, то $(A, A^2/N, d_N)$ — также есть НДИ, и всякое НДИ на A может быть получено таким образом.

2. Ковариантные дифференциальные исчисления. Пусть теперь A является алгеброй Хопфа. НДИ (A, M, d) называется *левоковариантным* (*правоковариантным*), если из $\sum a_i db_i = 0$ следует, что

$$\sum \Delta(a_i)(1 \otimes d)db_i = 0$$

соответственно,

$$\sum \Delta(a_i)(d \otimes 1)db_i = 0$$

Лево- и правоковариантное НДИ называется *биковариантным*.

Из левоковариантности следует, что существует отображение кодействия $\delta_L\colon M \to A \otimes M$ такое, что $\delta_L(am) = \Delta a.\delta_L(m)$, $\delta_L(ma) = \delta_L(m).\Delta(a)$, $(\varepsilon \otimes 1)\delta_L(m) = m$ и $\delta_L \circ d(a) = (1 \otimes d) \circ \Delta(a)$. Аналогично, в случае правоковариантности возникает кодействие $\delta_R\colon M \to M \otimes A$.

Положим

$$l(a \otimes b) = (1 \otimes a)\Delta(b), \quad r(a \otimes b) = (a \otimes 1)\Delta(b)$$

для $a, b \in A$; тогда $r^{-1}(a \otimes b) = (a \otimes 1)(S \otimes 1)\Delta(b)$. Пусть $\mathrm{ad}(a) = l(r^{-1}(1 \otimes \otimes a))$.

Предложение 4.20. *НДИ (A, M, d) является левоковариантным (соответственно, правоковариантным), если и только если в A существует правый идеал I, $I \subset \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ такой, что $M = A^2/N$, где $N = r^{-1}(A \otimes I)$ (соответственно, $N = l^{-1}(I \otimes A)$) и $d = \pi \circ D$, где $\pi\colon A^2 \to A^2/N$ каноническая проекция. Исчисление (A, M, d) будет биковариантным тогда и только тогда, когда I является* ad*-инвариантным.*

3. Алгебра дифференциальных форм. Пусть (A, M, d) есть биковариантное НДИ. Назовем элемент $\omega \in M$ левоинвариантным (правоинвариантным), если $\delta_L(\omega) = 1 \otimes \omega$ ($\delta_R(\omega) = \omega \otimes 1$). Каждый элемент M может быть единственным образом записан в виде $\sum \lambda_i a^i$ или $\sum a^j \rho_j$, где $\{\lambda_i\}$ (соответственно, $\{\rho_j\}$) базис в пространстве левоинвариантных (соответственно, правоинвариантных) элементов.

Мы хотим определить градуированную алгебру форм $W = W(A, M, d)$ так, чтобы $W^0 = A$, $W^1 = M$, а дифференциал d продолжался бы на W по градуированному правилу Лейбница. Эту алгебру можно описать в терминах некоторого оператора антисимметризации.

Заметим, прежде всего, что любой элемент $M \otimes M$ однозначно записывается в виде $\sum \lambda_i \otimes \rho_j a^{ij}$. Определим оператор $\sigma\colon M \otimes M \to M \otimes M$ по формуле $\sigma(\lambda_i \otimes \rho_j) = \rho_j \otimes \lambda_i$. Это отображение оказывается

совместимым с кодействиями δ_L, δ_R, кроме того, отображения $\sigma_i = 1\otimes\ldots\otimes 1\otimes\sigma\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1\colon M^{\otimes n}\to M^{\otimes n}$ (σ действует на i-ый и $(i+1)$-ый сомножители) удовлетворяют соотношениям группы кос Bd_n.

Пусть $\mathrm{Alt}_n^0 = \sum\limits_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)\tau$ — обычный антисимметризатор. Выберем в качестве образующих S_n транспозиции соседних элементов $\tau_i = (i, i+1)$, $i = 1, \ldots, n-1$ и запишем

$$\mathrm{Alt}_n^0 = \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau_{i_1}\ldots\tau_{i_k})\tau_{i_1}\ldots\tau_{i_k},$$

где $\tau_{i_1}\ldots\tau_{i_k}$ — приведенное разложение τ. После этого выражение

$$\mathrm{Alt}_n = \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau_{i_1}\ldots\tau_{i_k})\sigma_{i_1}\ldots\sigma_{i_k}$$

корректно определяет оператор антисимметризации $M^{\otimes n}\to M^{\otimes n}$. Положим

$$W = \bigoplus_{n\geqslant 0} W^n = \bigoplus_{n\geqslant 0} M^{\otimes n}/\operatorname{Ker}(\mathrm{Alt}_n).$$

Можно показать, что дифференциал $d\colon A\to M$ корректно продолжается на W по градуированному правилу Лейбница. Искомая алгебра форм построена.

Библиографический комментарий

Одни из первых работ по некоммутативной дифференциальной геометрии принадлежат А. Конну [72] (общая теория, определение циклических когомологий) и С. Вороновичу [142]. Некоммутативный комплекс де Рама введен Ю. Вессом и Б. Зумино [140], там же указано, как по решению (BE) построить WZ-комплекс. Исчерпывающее исследование взаимоотношений WZ-комплексов и R-матриц дано в работе Е. Е. Мухина [36]. На самом деле, комплекс, предлагаемый Вессом и Зумино, был известен ранее Д. И. Гуревичу [8], но не был наделен структурой алгебры. Соотношение между рядами Пуанкаре алгебр A_R и B_R также установлено в [8]. Когомологии WZ-комплекса в разной степени общности подсчитаны в [14, 116, 137], в последней работе вычислены и когомологии комплекса на $M_q(n)$ — при неисключительных значениях параметра когомологии с положительными номерами нулевые, в противном же случае верен аналог теоремы Картье. Начальные сведения о дифференциальных исчислениях типа Весса–Зумино на квантовых суперпространствах содержатся в [98].

Квантовым алгебрам Вейля посвящена статья Е. Е. Демидова [15].

Комплекс де Рама для квантовой группы можно строить, руководствуясь идеями С. Вороновича [142], но тогда можно получить много «посторонних» комплексов. Использование универсального кодействия предложено в [109, 110, 116] и разработано в [36]. В этой работе (см. также [137]) найдено препятствие к получению комплекса