

Обобщения описанной простой конструкции инвариантов связок также имеют место. Рассматривая ленточные графы, которые можно представлять себе как связки, состоящие не из нитей, а из лент, мы получим тензорную категорию с новой нетривиальной образующей — скручиванием ленты. Соответствующие инварианты были построены в [40]. Поскольку известно, что трехмерные многообразия также допускают описание в терминах «образующих» — трехмерных шаров с выброшенными трубчатыми окрестностями некоторых содержащихся в этих шарах зацеплений — то и здесь можно попробовать реализовать конструкцию инвариантов. Это сделано В. Г. Тураевым и Н. Ю. Решетихиным в работе [121] на основе использования теории представлений квантовых групп в корнях из единицы.

## § 2. Квантовые группы, $q$ -ранг и тэта-константы

В этом параграфе излагаются результаты С. Маджида и Я. С. Сойбельмана [108], обнаруживающие замечательную связь между объектами, указанными в названии этого параграфа.

**1.  $q$ -ранг.** Рассмотрим категорию конечномерных представлений квантованной универсальной обертывающей алгебры  $U_q\mathfrak{g}(A)$ , построенной по симметризуемой матрице Картана  $A$  размером  $n \times n$ . Напомним, что эта алгебра является квазитреугольной, а рассматриваемая категория — жесткой тензорной категорией, и потому для ее объекта  $V$  определен внутренний ранг  $\underline{\text{rk}} V = \underline{\text{Tr}}(\text{id}_V)$ .

**Лемма 5.6.**  $\underline{\text{rk}} V = \text{tr}(u_V)$ , где  $u_V$  — образ в  $V$  элемента  $u$ , канонически связанного с квадратом антипода (см. п. 1.5.4). Здесь  $\text{tr}$  — обычный след линейного оператора.

По теореме Петера–Вейля

$$U_q\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in P_+} L(\lambda)^{\oplus \dim L(\lambda)}$$

(сумма берется по множеству доминантных весов  $P_+$ ). Наша задача состоит в вычислении формального ряда  $\underline{\text{rk}} U_q\mathfrak{g} = \sum_{\lambda \in P_+} \dim L(\lambda) \cdot \underline{\text{rk}} L(\lambda)$ .

Вспомним, что квантовый элемент Казимира  $q^{-2\rho}u$  действует в неприводимом представлении старшего веса  $L(\lambda)$  умножением на  $q^{-(\lambda, \lambda + 2\rho)}$ , поэтому  $u$  действует как  $q^{-(\lambda, \lambda + 2\rho)}q^{2\rho}$ . Здесь  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha \in \mathfrak{h}^*$ , а  $\rho$  — соответствующий элемент  $\mathfrak{h}$ .

Введем формальный характер представления  $V$ , положив

$$\text{ch } V = \sum_{\mu} (\dim V_{\mu}) q^{\mu},$$

где сумма берется по всем весовым подпространствам представления  $V$ . Значение характера на весе  $\nu$  есть, по определению, сумма

$$\operatorname{ch} V(\nu) = \sum_{\mu} (\dim V_{\mu}) q^{(\mu, \nu)}.$$

Поэтому

$$\underline{\operatorname{rk}} U_q \mathfrak{g} = \sum_{\lambda \in P_+} \dim L(\lambda) q^{-(\lambda, \lambda + 2\rho)} \operatorname{ch} L(\lambda)(2\rho).$$

**2. Основное вычисление.** Размерность  $L(\lambda)$  вычисляется по обычной формуле Вейля

$$\dim L(\lambda) = \prod_{\alpha > 0} \frac{(\alpha, \lambda + \rho)}{(\alpha, \rho)},$$

а значение характера  $\operatorname{ch} L(\lambda)(2\rho)$  — по ее квантовому аналогу

$$\operatorname{ch} L(\lambda)(2\rho) = \prod_{\alpha > 0} \frac{[(\alpha, \lambda + \rho)]_q}{[(\alpha, \rho)]_q}, \quad \text{где } [s]_q = \frac{q^s - q^{-s}}{q - q^{-1}}.$$

Сомножитель  $q^{-(\lambda, \lambda + 2\rho)}$  можно записать в виде  $q^{-\|\lambda + \rho\|^2} / q^{-\|\rho\|^2}$ .

**Теорема 5.7.** Справедливо равенство  $\underline{\operatorname{rk}} U_q \mathfrak{g} = \sum_{\lambda \in P} q^{-\|\lambda\|^2} / \prod_{\alpha > 0} (1 - q^{-2(\alpha, \rho)})$ .

В доказательстве этой теоремы важное промежуточное место занимают результаты о строении инвариантов группы Вейля алгебры  $\mathfrak{g}$ . Положив  $d(\lambda) = \prod_{\alpha > 0} \frac{(\alpha, \lambda)}{(\alpha, \rho)}$  для  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , и

$$d^{(\mu)}(\lambda) = \frac{\partial^{\mu} d}{\partial^{\mu_1} \omega_1 \dots \partial^{\mu_n} \omega_n}(\lambda)$$

для  $\mu = \mu_1 \omega_1 + \dots + \mu_n \omega_n \in \mathfrak{h}^*$ , где  $\omega_i$  — фундаментальные веса  $\mathfrak{g}$ , получим после преобразований

$$\underline{\operatorname{rk}} U_q \mathfrak{g} = \left( \sum_{|\mu| \leq N} (\mu!)^{-1} \sum_{\lambda \in P} d^{(\mu)}(\lambda) q^{-\|\lambda\|^2} \right) / \prod_{\alpha > 0} (1 - q^{-2(\alpha, \rho)}),$$

где  $N$  — количество положительных корней алгебры  $\mathfrak{g}$ . Оказывается, что сумма

$$\varphi_{\mu}(\lambda) = (\mu!)^{-1} \sum_{\lambda \in P} d^{(\mu)}(\lambda) q^{-\|\lambda\|^2}$$

равна нулю, если  $|\mu| \neq N$ . Заметим, что суммирование ведется уже по всей решетке весов. Рассмотрим пространство  $H_k(W)$  однородных многочленов степени  $k$  от компонент  $\lambda_i$  веса  $\lambda$  (т. е. полиномиальных функций на  $P \otimes \mathbb{R}$ ), гармонических относительно группы Вейля  $W$

и пространство многочленов от тех же переменных  $\text{Inv } W$ , инвариантных относительно  $W$ . Известно (см. гл. 3 в [49]), что  $H_k(W)$  порождается как линейное пространство многочленами  $d^{(\mu)}(\lambda)$  с  $|\mu| = N - k$  и  $H_k(W) \cap \text{Inv } W = 0$  при  $k \neq 0$ . Функция

$$\psi_\mu(\lambda) = \sum_{w \in W} d^{(\mu)}(w\lambda)$$

является  $W$ -инвариантной и  $W$ -гармонической, следовательно,  $\psi_\mu(\lambda) = 0$  при  $|\mu| \neq N$ . Легко видеть, что тогда и  $\varphi_\mu(\lambda) = 0$  при  $|\mu| \neq N$ , а

$$\sum_{|\mu|=N} (\mu!)^{-1} d^{(\mu)}(\lambda)$$

есть младший член (по степеням  $\lambda_i$ ) в разложении  $d(\lambda + \rho)$ , т. е. единица.

В терминах матрицы Картана числитель  $\text{rk } U_q \mathfrak{g}$  есть

$$\sum_{z \in \mathbf{Z}_n} q^{-z^t \Omega z},$$

где  $\Omega$  — матрица Грама фундаментальных весов, равная  $(DA)^{-1}$ .

**3. Тэта-константы.** Пусть  $\Omega$  есть некоторая симметрическая положительно определенная матрица порядка  $n$ . Рассмотрим ряд

$$\theta(\tau | \Omega) = \sum_{z \in \mathbf{Z}_n} e^{\pi i \tau z^t \Omega z} = \sum_{z \in \mathbf{Z}_n} q^{z^t \Omega z / 2},$$

где  $q = e^{2\pi i \tau}$ . Этот ряд сходится при  $\text{Im } \tau > 0$  и называется *тэтаконстантой*. Он оказывается тесно связанным с некоторыми арифметическими вопросами, в частности, с представлениями данного натурального числа в виде значения квадратичной формы  $z^t \Omega z / 2$ .

Напомним, что ряд вида

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n,$$

сходящийся при  $\text{Im } \tau > 0$ , называется *модулярной формой* веса  $k$ , если

$$f(\tau + 1) = f(\tau) \quad \text{и} \quad f(-1/\tau) = (-1/\tau)^k f(\tau).$$

Поскольку преобразования  $\tau \mapsto \tau + 1$  и  $\tau \mapsto -1/\tau$  порождают группу унимодулярных целочисленных дробно-линейных преобразований  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

то условие модулярности равносильно равенству

$$f(\tau) = (c\tau + d)^k f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \quad (\text{MOD})$$

для всех  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ . Группа

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

называется *главной конгруэнц-подгруппой уровня N* в  $\Gamma$ . Ряд  $f(\tau)$  называется модулярной формой веса  $k$  и уровня  $N$ , если равенство (MOD) выполнено для всех  $g \in \Gamma(N)$ .

Полезно иметь в виду соотношение

$$\theta(-1/\tau|\Omega) = (-i\tau)^{n/2} \theta(\tau|\Omega),$$

верное при условии четности диагональных элементов матрицы  $\Omega$  и самодвойственности решетки в  $\mathbb{R}^n$ , определенной ею. Отсюда следует, что  $\theta(\tau|\Omega)$  при данных условиях на  $\Omega$  и при  $n$ , делящемся на 8, оказывается модулярной формой веса  $n/4$  уровня 1.

Вычисление предыдущего пункта означает, что числитель ряда  $\underline{\text{rk}} U_{q^{-1/2}} g$  есть  $\theta(\tau|(DA)^{-1})$ .

**Пример 1.** Пусть  $\mathfrak{g} = \text{sl}(2)$ . Тогда  $A = (1)$  и

$$\underline{\text{rk}} U_{q^{-1/2}} \text{sl}(2) = \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2/2}}{1 - q}.$$

В числителе стоит модулярная форма веса 1 уровня 4. Весьма полезно получить указанную формулу непосредственно, минуя общие соображения п. 2.

**Пример 2.** Найдем числитель  $\underline{\text{rk}} U_{q^{-1/2}} e_8$ . Решетка корней  $e_8$  самодвойственна, а каждый корень имеет квадрат, равный 2. По сделанному выше замечанию, наш числитель есть модулярная форма веса 4. Но такая форма единственна — это ряд Эйзенштейна

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n, \quad \sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3.$$

Представляет интерес изучение преобразования Меллина подходящим образом отнормированного числителя  $\underline{\text{rk}} U_q \mathfrak{g}$ .