Дмитрию и Ольге

ВВЕДЕНИЕ

1. Что такое квантовая группа? Новый математический объект под названием «квантовая группа», появившийся в начале 80-х годов в работах П. П. Кулиша, Н. Ю. Решетихина [29], Е. К. Склянина [41], и Л. Д. Фаддеева, Л. А. Тахтаджяна [82], посвященных квантовому методу обратной задачи (КМОЗ), — откуда и происходит его название — уже завоевал широкую популярность среди специалистов в разных областях физики и математики. Область применений квантовых групп довольно широка. Она простирается от конкретных вычислительных приложений в некоторых моделях статфизики и квантовой механики до крайне абстрактных, претендуя на некую общую идеологию, связующую теорию алгебраических групп, комбинаторику и геометрию над полями простой характеристики. Между этими крайностями находятся по крайней мере две точки зрения на предмет, позволяющих ближе познакомиться с ним.

Первая состоит в том, что квантовая группа является результатом квантования группы Ли, так превращенной в пуассоново многообразие, что скобка Пуассона согласована с групповым умножением. Задача квантования такого объекта естественно вытекает из анализа математической стороны КМОЗ и детально рассмотрена В. Г. Дринфельдом в основополагающем цикле работ [16–19]. Еще одним результатом этого подхода является получение обширного запаса так называемых квантовых R-матриц, т. е. матриц размером $n^2 \times n^2$, удовлетворяющих квантовому уравнению Янга–Бакстера

$$R^{12}R^{23}R^{12} = R^{23}R^{12}R^{23},$$

где $R^{12} = R \otimes 1$ и $R^{23} = 1 \otimes R$. Физический смысл таких матриц состоит в том, что они задают коммутационные соотношения между элементами квантовой трансфер-матрицы T квантовой статистической модели:

$$RT \otimes T = T \otimes TR.$$

Вторая точка зрения основывается на эвристическом принципе, согласно которому каждый математический объект должен иметь своего «некоммутативного» двойника (искушенный читатель конечно же заметит здесь аналогию с движением «суперизации» математики); в частности, таковыми должны обладать алгебраические группы или группы Ли.

Результаты обоих подходов удобно формулировать в терминах алгебр Хопфа — объекта, придуманного в начале 50-х годов топологами.

По определению наряду с умножением m: $H \otimes H \to H$ в алгебре Хопфа H задано коумножение Δ: $H \to H \otimes H$, надлежащим образом согласованное с m. Было хорошо известно, что наряду с содержательными (топологическими) примерами алгебр Хопфа имеются еще и «бессодержательные», а именно, с каждой аффинной алгебраической группой или группой Ли G естественно ассоциируются две алгебры Хопфа: алгебра $\mathcal{O}(G)$ регулярных функций на G и универсальная обертывающая алгебра $U\mathfrak{g}$ алгебры Ли этой группы. В первом случае коумножение Δ получается из обращения стрелок в отображении группового умножения $G \times G \to G$, а во втором для каждого x из $\mathfrak{g}$ полагают $\Delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1$ и продолжают Δ на всю алгебру $U\mathfrak{g}$ по мультипликативности. С точки зрения алгебраической геометрии многообразие G и алгебра функций на нем взаимозаменяемы, а поскольку привычнее иметь дело с многообразием, то рассмотрение $\mathcal{O}(G)$ не принесет ничего нового. Однако взаимозаменяемость G и $\mathcal{O}(G)$, а равно и произвольного многообразия и алгебры функций на нем остается в силе лишь до тех пор, пока эта алгебра является коммутативной. Некоммутативной алгебре отвечает «некоммутативное многообразие», удовлетворительно описать которое с топологической точки зрения пока не представляется возможным.

Теория квантовых групп как раз и дает примеры некоммутативных и некокоммутативных алгебр Хопфа, являющихся в известном смысле деформациями коммутативных алгебр функций на группах и, соответственно, кокоммутативных универсальных обертывающих алгебр Ли этих групп. Грубо говоря, квантовая группа — это некоторая алгебра Хопфа.

Вот явные формулы для простейшего случая $G = \mathrm{SL}(2)$ и $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2)$. Пусть h — формальный параметр квантования («постоянная Планка»), а H, X, Y — стандартные образующие алгебры Ли $\mathrm{sl}(2)$. Тогда элементами алгебры Хопфа $U_h\,\mathrm{sl}(2)$ — квантования $U\,\mathrm{sl}(2)$ — являются формальные степенные ряды по h с коэффициентами в $U\,\mathrm{sl}(2)$, умножение задается следующими соотношениями между образующими:

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = \frac{e^{hH/2} - e^{-hH/2}}{e^{h/2} - e^{-h/2}},$$

а коумножение таково:

$$\Delta X = X \otimes q^{H/2} + q^{-H/2} \otimes X, \quad \Delta Y = Y \otimes q^{H/2} + q^{-H/2} \otimes Y,$$
$$\Delta H = H \otimes 1 + 1 \otimes H.$$

Соответствующая деформация алгебры полиномиальных функций $k[\mathrm{SL}(2)]$ описывается в терминах коммутационных соотношений между матричными элементами a, b, c, d «квантовой» матрицы $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$ab = q^{-1}ba, \quad ac = q^{-1}ca, \qquad bd = q^{-1}db,$$
$$cd = q^{-1}dc, \quad bc = cb, \qquad ad - da = (q^{-1} - q)bc,$$

а условие унимодулярности записывается как равенство единице «квантового детерминанта»

$$ad - q^{-1}bc = 1,$$

(здесь $q = e^{h/2}$). Коумножение символически записывается так:

$$\Delta Z = Z \otimes Z.$$

Обобщение указанных формул для случая произвольной алгебры Ли, заданной симметризуемой матрицей Картана, было найдено независимо В. Г. Дринфельдом [18] и М. Джимбо [92].

Когда были выписаны явные формулы для этих квантований, появилась возможность «забыть» предысторию и исследовать полученные объекты с точки зрения привычных алгебраических теорий. Возникла необходимость в аксиоматических конструкциях, результатом которых был бы тот же (или больший) запас примеров, что получался из геометрических соображений. Наиболее просто и естественно поступили Л. Д. Фаддеев, Н. Ю. Решетихин и Л. А. Тахтаджян [47], положив в основу аксиоматики квантовую R-матрицу. Другая точка зрения была предложена Ю. И. Маниным [112]. Она состоит в том, что квантовая группа может быть получена как «группа автоморфизмов» более простого объекта — квантового линейного пространства, точно так же, как, скажем, группа $\mathrm{GL}(n)$ есть группа автоморфизмов обычного. Выяснение взаимосвязей этих двух подходов позволило получить не известные ранее примеры квантовых R-матриц. Когомологические методы теории деформаций приводят к описанию инфинитезимальных деформаций алгебр Хопфа $\mathcal{O}(G)$ и $U\mathfrak{g}$. Подход А. А. Бейлинсона, Дж. Люстига и Р. Мак-Ферсона [60, 107] обнаруживает загадочную связь между квантовыми группами и геометрией над конечными полями.

К настоящему моменту наиболее подробно изучены представления квантовых групп. При этом оказалось, что теория q-специальных функций, разработанная еще в прошлом веке, имеет прямое отношение к квантовым группам: матричные элементы представлений, сферические функции, — это в точности классические q-ряды. Интересную трактовку получает в свете теории представлений квантовых групп алгебра Гекке. В силу квантовой двойственности Шура–Вейля она служит аналогом групповой алгебры симметрической группы — если угодно, квантованием симметрической группы. Еще одним удивительным открытием теории представлений квантовых групп стало обнаружение Дж. Люстигом некоммутативного «фробениусова накрытия» в характеристике нуль, а также аналогии между представлениями алгебраических групп в простой характеристике и представлениями их квантовых аналогов при значении параметра q, равном корню из единицы.

Дж. Люстигом и М. Кашиварой были построены каноничнские базисы (кристаллические базисы) в алгебре $U_h\mathfrak{g}$ и модулях над ней.

Весьма интересной оказалась конструкция некоммутативных дифференциальных исчислений (аналогов комплекса де Рама и алгебры

Вейля для некоммутативных пространств и квантовых групп), основные идеи которых заложили А. Конн и С. Воронович. Будучи охарактеризованы аксиоматически, они приводят к квантовым R-матрицам. Построение дифференциальных исчислений для квантовых групп таит в себе совершенно незаметные на классическом уровне тонкости.

Решение R квантового уравнения Янга–Бакстера, как нетрудно заметить, задает представление группы кос Bd_n. Это наблюдение открывает дорогу к широкому обобщению структур, связанных с действием симметрической группы, которое «квантуется» до действия либо групповой алгебры Bd_n, либо ее фактора — алгебры Гекке. Приложения Bd_n-структуры на тензорных категориях представлений квантовых групп особенно важны в квантовой теории поля и теории инвариантов узлов, связок и зацеплений. В последней удалось обнаружить новый инвариант — многочлен Джонса, — обобщающий известные многочлены Александера и Конвея.

Интригующий сюжет, достойный внимания историков математики: в разные времена сложилась традиция обозначать буквой q четыре разные объекта — количество элементов конечного поля, формальный параметр в теории q-рядов, $e^{2\pi i\tau}$ в теории модулярных форм и тэта-функций и, наконец, параметр квантования. Все они оказались тесно связанными между собой посредством квантовых групп.

Сейчас еще рано указывать то место, которое занимает теория квантовых групп в математике. Однако нельзя отрицать, что с появлением квантовых групп в математике обнаружились новые связи между доселе самостоятельными ее областями, проясняющие, как следует надеяться, их внутреннее сродство.

2. О структуре и содержании работы. В настоящее время поток работ по квантовым группам, их приложениям и интерпретациям все возрастает (см., например, библиографию Т. Коорнвиндера [99]), поэтому говорить о том, что теория достигла той степени зрелости, когда она может считаться фундаментальной и совершенной, еще рано. Но нельзя вместе с тем не отметить, что определенный рубеж уже пройден. В основном это относится к периоду поиска квантовых аналогов классических конструкций и теорем. Наша книга, являющаяся отчасти обзором, отчасти справочником, отчасти учебником, имеет своей целью зафиксировать основные результаты этого периода. Обилие материала предполагает определенные критерии его отбора. В данном случае таковыми были желание представить предмет в «генетическом» развитии, более или менее подробно проследив эволюцию точек зрения на основные примеры и методы, а также субъективные авторские вкусы. Издержки этих критериев очевидны, и потому автор заранее приносит извинения тем исследователям, чьи идеи и результаты не нашли должного отражения в работе. Обратим поэтому внимание читателя на обзоры Л. Л. Ваксмана и Я. С. Сойбельмана [125], где более полно освещается теория представлений и геометрия компактных квантовых

групп, и К. Кассела [96], который более элементарен, содержит подробный разбор основных примеров и упражнения.

Дадим краткий путеводитель по работе. Первая глава представляет собой в основном комментированное изложение цикла работ В. Г. Дринфельда [16–19], послужившего отправной точкой для математического исследования квантовых групп. Обсуждаются: понятия группы Пуассона–Ли, биалгебры Ли, их квантования, решения классического уравнения Янга–Бакстера, квантовый дубль, тензорные категории.

Вторая глава также может считаться вводной. Практически она независима от первой главы. Ее цель — описание трех аксиоматических точек зрения на квантовые группы. Важно заметить, что аксиоматические подходы не только упрощают и сокращают долгий путь от исходных понятий до содержательных примеров первой главы, но и расширяют кругозор исследователя.

Третья и четвертая главы в наибольшей степени посвящены результатам перенесения на квантовый случай классических понятий и конструкций. В третьей главе обсуждается теория представлений квантовых групп. Поскольку это — наиболее разработанная область, мы сочли возможным ограничиться лишь несколькими характерными сюжетами и рядом поучительных примеров. В четвертой главе речь идет о некоммутативных дифференциальных исчислениях.

Пятая глава содержит несколько примеров, демонстрирующих взаимосвязь квантовых групп с проблемами других областей математики.

Степень подробности изложения падает от начала работы к ее концу. Естественно, доказательства теорем, подробно изложенные в соответствующих источниках или слишком обремененные техническими деталями, мы не приводим. Вместе с «правилом Цермело» — «скользить мимо трудностей и делать упор на тривиальностях», автор старался придерживаться принципа, согласно которому хороший пример способен заменить полное доказательство. Последнее положение служит также отражением «вавилонского» периода в развитии теории квантовых групп, когда определения и теоремы служат иллюстрациями примеров, а не наоборот.

По ходу изложения мы не всегда с должной скрупулезностью указываем на авторство той или иной идеи или теоремы. По возможности этот недостаток исправляется в библиографических комментариях, заключающих каждую главу. Там же читатель сможет найти указания на некоторые другие проблемы и результаты, не вошедшие по тем или иным соображениям в нашу работу. К сожалению, не всегда какое-либо новое понятие определяется нами незадолго до его использования: текст полон отсылок вперед и назад, так, например, сведения об алгебрах Хопфа рассеяны по всей работе.

3. Благодарности. Интересом к новому направлению и своими первыми результатами автор обязан Ю. И. Манину, на семинаре

которого в 1985–1986 гг. он впервые познакомился с квантовыми группами. Впоследствии этой тематикой занялись и другие участники семинара. Среди них А. Б. Веревкин, М. В. Мовшев, А. Ю. Лазарев, С. В. Коренский, Д. В. Жданович, Е. Е. Мухин. Им автор искренне благодарен за творческую и дружелюбную атмосферу и постоянные содержательные обсуждения многих вопросов.

Особенная благодарность — профессорам А. А. Кириллову и М. И. Зеликину, которые, прочитав предварительную версию работы, поддержали автора многочисленными ценными советами, способствовавшими ее улучшению.

Работа частично поддержана стипендией Джорджа Сороса 1993 г.