

Глава I

ВВЕДЕНИЕ В ЭЛЕКТРОСТАТИКУ

Хотя янтарь и магнитный железняк были известны еще в древней Греции, электродинамика как количественная наука возникла и развилась за какие-нибудь последние восемьдесят лет. Наблюдения Кулона над силами взаимодействия заряженных тел относятся к 1785 г. Примерно через пятьдесят лет Фарадей исследовал действие токов и магнитных полей. В 1864 г. Максвелл опубликовал свою знаменитую работу о динамической теории электромагнитного поля.

Мы начнем наше изложение с электростатики, т. е. с описания электрических полей, не зависящих от времени. Изложение будет большей частью весьма кратким, поскольку оно, по существу, носит обзорный характер. Электростатика послужит нам пробным камнем для развития и приложения общих математических методов.

§ 1. Закон Кулона

Вся электростатика по существу основана на законе Кулона, определяющем силу, с которой взаимодействуют заряженные тела, находящиеся в покое относительно друг друга. Кулон (а еще раньше Кэвенидиш) экспериментально показал, что сила взаимодействия двух небольших заряженных тел, расстояние между которыми велико по сравнению с их размерами,

- 1) пропорциональна величине каждого заряда,
- 2) обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними,
- 3) направлена вдоль прямой, соединяющей заряды,
- 4) представляет собой притяжение, если тела заряжены противоположно, и отталкивание в случае одноименных зарядов.

Кроме того, было показано экспериментально, что полная сила, с которой совокупность малых заряженных тел действует на какое-либо одно малое заряженное тело, представляет собой *векторную* сумму сил Кулона, соответствующих действию каждого заряда в отдельности.

§ 2. Напряженность электрического поля

Хотя непосредственно измеряемой величиной является сила, целесообразно ввести понятие, несколько отличающееся от силы, а именно понятие о напряженности электрического поля, обусловленного совокупностью заряженных тел. Мы можем пока определить электрическое поле, или, точнее, напряженность электрического поля, как силу, действующую на единицу заряда, помещенного в данной точке пространства. Она является вектором, зависящим от координат, и обозначается через \mathbf{E} . Однако применять это определение следует с осторожностью. Напряженность электрического поля не всегда совпадает с силой, которая действует на шарик, заряженный единичным зарядом и внесенный в исследуемую точку пространства. Дело в том, что единичный заряд (скажем, заряд, получающийся после того, как сто раз провести кошачьей шкуркой по янтарной палочке) может оказаться столь большим, что он заметно изменит конфигурацию поля. Поэтому следует рассматривать предельный процесс, т. е. измерять отношение силы, действующей на малый пробный заряд, к величине заряда при все меньшей и меньшей величине заряда. При достаточно малой величине заряда величина этого отношения и направление силы становятся практически постоянными. Эти предельные значения величины отношения и его направления и определяют величину и направление напряженности электрического поля в рассматриваемой точке. Математически это соотношение запишется в виде

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{F} — сила, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, q — заряд. В этом соотношении предполагается, что заряд q точечный, а сила и напряженность электрического поля вычисляются для точки, в которой расположен заряд.

Аналогично можно записать и закон Кулона. Если обозначить через \mathbf{F} силу, с которой на точечный заряд q_1 , расположенный в точке \mathbf{x}_1 , действует другой точечный заряд q_2 , расположенный в \mathbf{x}_2 , то закон Кулона запишется следующим образом:

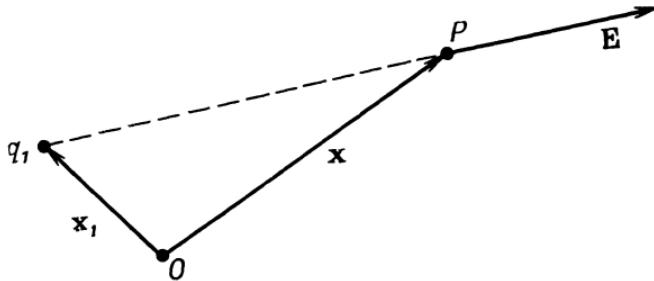
$$\mathbf{F} = kq_1q_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}. \quad (1.2)$$

Заметим, что q_1 и q_2 — алгебраические величины и могут быть как положительными, так и отрицательными. Множитель пропорциональности k зависит от используемой системы единиц.

Электрическое поле в точке \mathbf{x} , создаваемое точечным зарядом q_1 , расположенным в точке \mathbf{x}_1 (фиг. 1.1), равно

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = kq_1 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}. \quad (1.3)$$

Постоянная k определяется выбранной единицей заряда. В электростатической системе единиц (СГСЭ) за единицу заряда принят заряд, который действует на равный ему заряд, находящийся на расстоянии 1 см, с силой 1 дин. Таким образом, в системе СГСЭ коэффициент k равен единице. В рационализированной системе



Ф и г. 1.1.

МКСА коэффициент k равен $1/4\pi\epsilon_0$, где $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$ — проницаемость свободного пространства. Мы будем пользоваться системой единиц СГСЭ¹⁾.

Экспериментально установлено, что для сил, обусловленных различными зарядами, выполняется условие линейной суперпозиции; благодаря этому поле в точке x , создаваемое системой точечных зарядов q_i , расположенных в точках x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), можно записать как векторную сумму

$$\mathbf{E}(x) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}. \quad (1.4)$$

Если зарядов очень много и они весьма малы, то их можно описывать объемной плотностью заряда $q(x')$; при этом $\Delta q = q(x') \times \Delta x \Delta y \Delta z$ — заряд элементарного объема $\Delta x \Delta y \Delta z$ в точке x' . В этом случае сумма (1.4) переходит в интеграл

$$\mathbf{E}(x) = \int q(x') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \quad (1.5)$$

где $d^3x' = dx'dy'dz'$ — трехмерный элемент объема в точке x' .

Сейчас уместно ввести *дельта-функцию Дирака*. Одномерная дельта-функция, обозначаемая $\delta(x - a)$, представляет собой несобственную функцию²⁾, обладающую следующими свойствами:

$$1) \delta(x - a) = 0 \quad \text{для } x \neq a;$$

$$2) \int \delta(x - a) dx = \begin{cases} 1, & \text{если область интегрирования содержит} \\ & \text{жит точку } a, \\ 0, & \text{если область интегрирования не содержит} \\ & \text{жит точки } a. \end{cases}$$

¹⁾ Вопрос о системах единиц рассматривается в приложении.

²⁾ В математике функции типа δ -функции относятся к классу «обобщенных функций» (см. [124]). — Прим. пед.

Дельта-функции можно дать строгую интерпретацию, а именно рассматривать ее как предел, к которому стремится пикообразная кривая типа гауссовой, когда ее ширина уменьшается, а высота увеличивается, причем площадь, ограниченная кривой, остается постоянной. Строгое и всестороннее математическое рассмотрение δ -функций и действий с ними дано в теории распределений Шварца¹⁾.

Из приведенного определения следует, что для любой функции $f(x)$

$$3) \int f(x) \delta(x-a) dx = f(a),$$

$$4) \int f(x) \delta'(x-a) dx = -f'(a).$$

Здесь штрих означает производную по аргументу функции.

Дельта-функция, аргументом которой служит функция $f(x)$ от независимой переменной x , может быть преобразована по правилу

$$5) \delta[f(x)] = \frac{1}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \delta(x - x_0),$$

где x_0 — значение x , для которого $f(x_0) = 0$. Это соотношение вытекает из равенства $\delta(f) df = \delta(x) dx$.

В случае нескольких измерений нужно просто взять произведение δ -функций от каждой координаты. Так, например, в трехмерном случае δ -функция равна

$$6) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \delta(x_1 - X_1) \delta(x_2 - X_2) \delta(x_3 - X_3).$$

Она равна нулю всюду, кроме точки $\mathbf{x} = \mathbf{X}$, и обладает тем свойством, что

$$7) \int_{\Delta V} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) d^3x = \begin{cases} 1, & \text{если объем } \Delta V \text{ содержит точку } \mathbf{x} = \mathbf{X}, \\ 0, & \text{если объем } \Delta V \text{ не содержит точки } \mathbf{x} = \mathbf{X}. \end{cases}$$

Заметим, что размерность δ -функции обратна размерности объема при любом числе измерений.

С помощью δ -функций дискретную совокупность точечных зарядов можно описать распределением плотности заряда.

Так, например, распределение

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (1.6)$$

¹⁾ Хорошее строгое описание δ -функций приведено в книге Лайтхилла [66]. (См. также прекрасную монографию [124]. — Прим. ред.)

соответствует n точечным зарядам q_i , расположенным в точках x_i . Подставляя распределение плотности заряда (1.6) в (1.5) и интегрируя с учетом свойств δ -функций, мы придем к выражению (1.4).

§ 3. Теорема Гаусса

Интегральное выражение (1.5) не очень удобно для расчета электрического поля. Существует другое интегральное соотношение, носящее название *теоремы Гаусса*, которое иногда значительно удобнее и которое, кроме того, позволяет найти дифференциальное уравнение для $\mathbf{E}(x)$. Чтобы получить теорему Гаусса, рассмотрим сначала отдельный точечный заряд q и *замкнутую* поверхность S (фиг. 1.2). Пусть r — расстояние от заряда до точки на поверхности S , \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности S в этой точке, da — элемент площади поверхности. Если создаваемое зарядом q электрическое поле \mathbf{E} в рассматриваемой точке поверхности образует угол θ с единичным вектором нормали \mathbf{n} , то произведение нормальной составляющей вектора \mathbf{E} на элемент площади равно

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = q \frac{\cos \theta}{r^2} da. \quad (1.7)$$

Поскольку вектор \mathbf{E} направлен по прямой, соединяющей заряд q с элементом поверхности da , то $\cos \theta da = r^2 d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла, под которым видна площадка da из точки нахождения заряда. Таким образом,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = q d\Omega \quad (1.8)$$

Если теперь проинтегрировать нормальную составляющую \mathbf{E} по всей поверхности, то легко видеть, что

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \begin{cases} 4\pi q, & \text{если } q \text{ внутри } S, \\ 0, & \text{если } q \text{ вне } S. \end{cases} \quad (1.9)$$

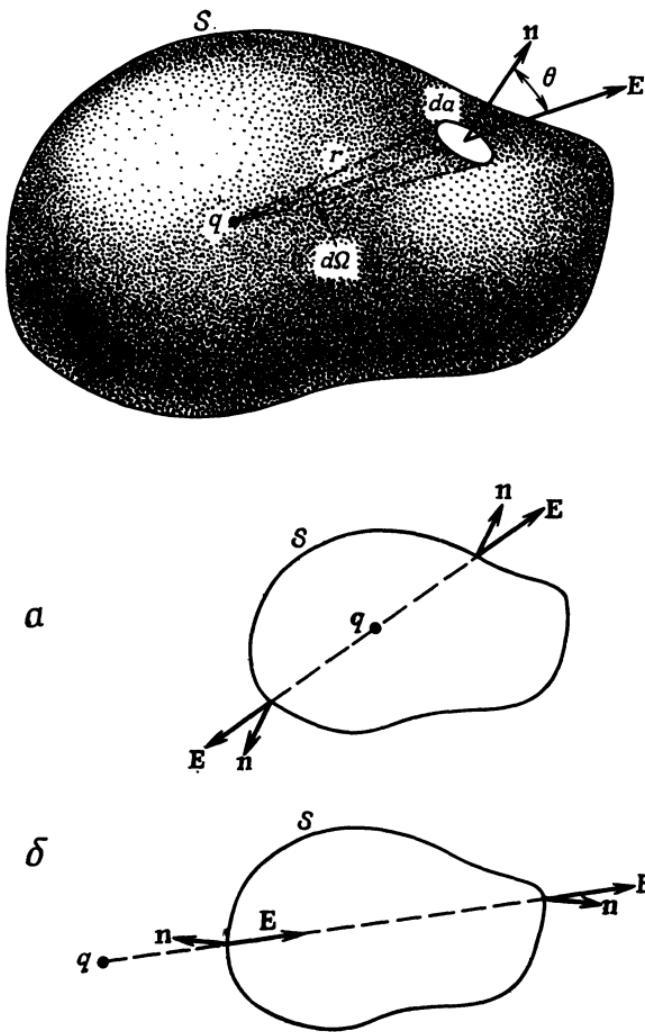
Это и есть теорема Гаусса для единичного точечного заряда. Очевидно, для системы дискретных точечных зарядов она запишется в виде

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = 4\pi \sum_i q_i, \quad (1.10)$$

где сумма берется лишь по тем зарядам, которые находятся *внутри* S . Для непрерывного распределения зарядов с плотностью $q(x)$ теорема Гаусса имеет вид

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = 4\pi \int_V q(x) d^3x, \quad (1.11)$$

где V — объем, ограниченный поверхностью S .



Ф и г. 1.2. К выводу теоремы Гаусса.

Нормальная составляющая электрического поля интегрируется по замкнутой поверхности S . Если заряд находится внутри S (случай а), то E и n образуют всегда острый угол, если же заряд находится вне S (случай б), то угол между E и n иногда острый, а иногда тупой.

Уравнение (1.11) — одно из основных соотношений электростатики. Заметим, что его справедливость обусловлена следующими факторами:

- 1) обратной пропорциональностью силы взаимодействия зарядов квадрату расстояния между ними,
- 2) центральным характером сил взаимодействия,
- 3) линейной суперпозицией эффектов, обусловленных различными зарядами.

Очевидно, теорема Гаусса справедлива и для ньютоновских гравитационных сил, конечно, если плотность заряда заменить плотностью распределения материи.

Интересно заметить, что Кэвендиш еще до опытов Кулона, применив фактически непосредственно теорему Гаусса, поставил опыт с двумя концентрическими проводящими сферами и показал, что сила взаимодействия зарядов убывает обратно пропорционально r^n , где $n = 2,00 \pm 0,02$. Усовершенствовав технику эксперимента, Максвелл показал, что $n = 2,0 \pm 0,00005$ (см. книги Джинса [55] или Максвелла [73]).

§ 4. Дифференциальная форма теоремы Гаусса

Теорему Гаусса можно считать интегральной формулировкой закона электростатики. Применяя теорему Гаусса — Остроградского из векторного анализа, можно получить соответствующее дифференциальное соотношение, т. е. дифференциальное уравнение для поля. Теорема Гаусса — Остроградского («теорема о дивергенции») гласит, что для любого векторного поля $\mathbf{A}(x)$, определенного в объеме V , окруженном поверхностью S , справедливо следующее соотношение между объемным интегралом от дивергенции \mathbf{A} и поверхностным интегралом от составляющей \mathbf{A} по направлению внешней нормали к поверхности S :

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} d^3x.$$

По существу это соотношение может служить определением дивергенции (см., например, книгу Стрэттона [106]).

Рассмотрим интегральную форму теоремы Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = 4\pi \int_V \varrho(x) d^3x.$$

Теорема о дивергенции позволяет записать его в виде

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\varrho) d^3x = 0 \quad (1.12)$$

для любого объема V . Отсюда следует, что подынтегральное выражение равно нулю, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\varrho. \quad (1.13)$$

Это и есть дифференциальная форма теоремы Гаусса в электростатике. Это уравнение может само по себе применяться для решения электростатических задач. Однако часто оказывается проще иметь

дело не с векторной, а со скалярной функцией точки, а векторные величины в случае необходимости определять уже в конце решения по этой скалярной функции. Эту скалярную функцию мы рассмотрим ниже.

§ 5. Второе уравнение электростатики и скалярный потенциал

Одного уравнения (1.13) недостаточно для того, чтобы полностью определить три составляющие электрического поля $\mathbf{E}(x)$. Читателю, должно быть, известно, что векторное поле определено полностью, если во всем пространстве заданы его дивергенция и ротор. Таким образом, нам необходимо еще уравнение, определяющее ротор вектора \mathbf{E} в каждой точке. Это уравнение имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (1.14)$$

Оно вытекает непосредственно из общего выражения (1.5) для закона Кулона

$$\mathbf{E}(x) = \int \rho(x') \frac{x - x'}{|x - x'|^3} d^3x'.$$

Векторный множитель в подынтегральном выражении, рассматриваемый как функция от x , равен взятому с обратным знаком градиенту от $1/|x - x'|$

$$\frac{x - x'}{|x - x'|^3} = -\operatorname{grad} \frac{1}{|x - x'|}.$$

Поскольку операция градиента относится к переменной x , а не к переменной интегрирования x' , ее можно вынести за знак интеграла. Таким образом, поле может быть записано в виде

$$\mathbf{E}(x) = -\operatorname{grad} \int \frac{\rho(x')}{|x - x'|} d^3x'. \quad (1.15)$$

Но ротор градиента любой скалярной функции равен нулю ($\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = 0$ при любом ψ), так что из (1.15) сразу следует (1.14).

Заметим, что справедливость соотношения $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ обусловлена центральным характером сил взаимодействия зарядов и тем, что эти силы зависят лишь от расстояния между зарядами, но не связана с законом обратных квадратов.

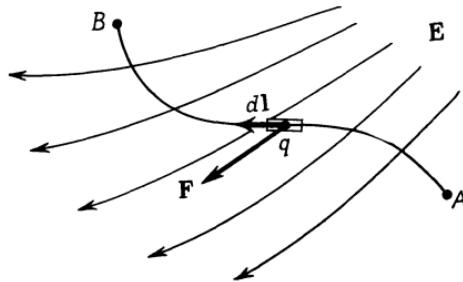
Соотношение (1.15) позволяет выразить с помощью операции градиента вектор электрического поля через скалярную функцию. Одной функцией пользоваться удобнее, чем тремя, поэтому введем **скалярный потенциал** $\Phi(x)$, определяемый соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi. \quad (1.16)$$

Тогда из (1.15) следует, что скалярный потенциал выражается через плотность распределения заряда следующим образом:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (1.17)$$

Здесь интегрирование производится по всему бесконечному пространству и величина Φ определяется с точностью до постоянной, которую можно добавить к правой части равенства (1.17).



Фиг. 1.3.

Для пояснения физического смысла скалярного потенциала рассмотрим работу, совершаемую при перемещении пробного заряда q из точки A в точку B при наличии электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ (фиг. 1.3). Сила, с которой электрическое поле действует на заряд, в любой точке равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E},$$

так что работа по перемещению заряда из A в B равна

$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = - q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.18)$$

Знак минус поставлен потому, что мы вычисляем работу, совершающую при перемещении заряда против сил электрического поля. Согласно (1.16), эту работу можно записать в виде

$$W = q \int_A^B \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B d\Phi = q(\Phi_B - \Phi_A), \quad (1.19)$$

так что величину $q\Phi$ можно считать равной потенциальной энергии пробного заряда в электростатическом поле.

Из (1.18) и (1.19) следует, что линейный интеграл от электрического поля, взятый между двумя точками, не зависит от пути интегрирования и равен взятой с обратным знаком разности потенциалов

между этими точками:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -(\Phi_B - \Phi_A). \quad (1.20)$$

Это следует, конечно, и непосредственно из определения (1.16). Если интегрирование производится по замкнутому пути, то линейный интеграл равен нулю

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (1.21)$$

что может быть непосредственно получено из закона Кулона. Согласно теореме Стокса, для векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ интеграл по замкнутому контуру C , ограничивающему незамкнутую поверхность S , равен

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da,$$

где $d\mathbf{l}$ — линейный элемент контура C , \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S , а направление обхода контура C образует правовинтовую систему с направлением \mathbf{n} . По теореме Стокса можно из (1.21) вновь прийти к соотношению $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$.

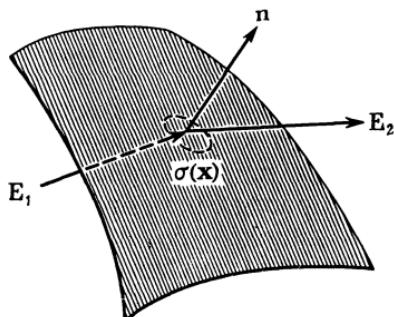
§ 6. Поверхностные распределения зарядов и диполей. Скачки электрического поля и потенциала

Одной из общих задач электростатики является определение электрического поля или потенциала для заданного поверхностного распределения зарядов. Теорема Гаусса (1.11) позволяет сразу написать некоторое частное соотношение для электрического поля. Если на поверхности S с единичной нормалью \mathbf{n} заряд распределен с поверхностной плотностью $\sigma(\mathbf{x})$, а электрическое поле по обе стороны поверхности равно соответственно \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 (фиг. 1.4), то, согласно теореме Гаусса,

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma. \quad (1.22)$$

Это соотношение еще не определяет самих полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 ; исключение составляют лишь те случаи, когда нет других источников поля, кроме поверхностных зарядов с плотностью $\sigma(\mathbf{x})$, а распределение $\sigma(\mathbf{x})$ имеет особо простой вид. Соотношение (1.22) показывает только, что при переходе с «внутренней» стороны поверхности, на которой расположен поверхностный заряд σ , на «внешнюю» сторону нормальная составляющая электрического поля испытывает скачок $4\pi\sigma$.

Используя соотношение (1.21) для линейного интеграла от \mathbf{E} по замкнутому контуру, можно показать, что тангенциальная составляющая электрического поля непрерывна при переходе через поверхность.



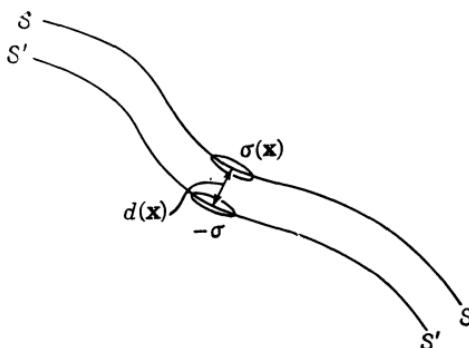
Фиг. 1.4. Скачок нормальной составляющей электрического поля при пересечении поверхности распределения зарядов.

Общее выражение для потенциала, создаваемого поверхностным распределением заряда в произвольной точке пространства (в том числе на самой поверхности S , на которой расположены заряды), можно найти из (1.17), заменяя qd^3x на σda :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\sigma(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da'. \quad (1.23)$$

Выражение для электрического поля может быть получено отсюда дифференцированием.

Представляет интерес также задача о потенциале, создаваемом двойным слоем, т. е. распределением диполей по поверхности S .



Фиг. 1.5. Предельный переход при образовании двойного слоя.

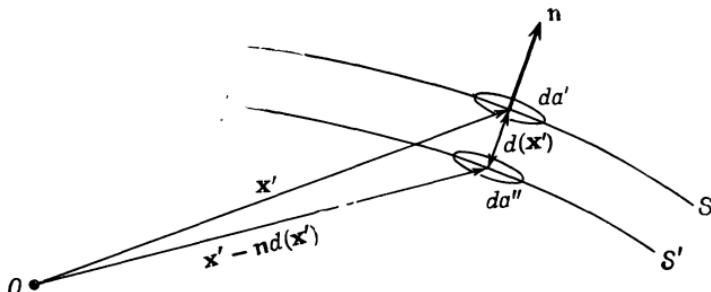
Двойной слой можно представить себе следующим образом: пусть на поверхности S заряд расположен с некоторой плотностью $\sigma(x)$, а на поверхности S' , близкой к S , поверхностная плотность в соответствующих (соседних) точках составляет $-\sigma$, т. е. равна по величине и противоположна по знаку (фиг. 1.5). Двойной слой, т. е. дипольное распределение с моментом единицы поверхности $D(x)$,

получится как предельный переход, при котором S' бесконечно близко приближается к S , а поверхностная плотность $\sigma(x)$ стремится к бесконечности так, что произведение $\sigma(x)$ на расстояние $d(x)$ между S и S' в соответствующей точке стремится к пределу

$$\lim_{d(x) \rightarrow 0} \sigma(x) d(x) = D(x). \quad (1.24)$$

Дипольный момент слоя перпендикулярен поверхности S и направлен от отрицательного заряда к положительному.

Чтобы найти потенциал, создаваемый двойным слоем, можно сначала рассмотреть отдельный диполь, а затем перейти к распределению диполей по поверхности. К тому же результату можно прийти, если исходить из потенциала (1.23) для поверхностного распределения заряда, а затем произвести описанный выше предельный переход. Первый способ расчета, пожалуй, проще, но зато второй является полезным упражнением в векторном анализе, так что мы предпочтем здесь именно второй.



Фиг. 1.6. Геометрия двойного слоя.

Пусть единичный вектор нормали n направлен от S' к S (фиг. 1.6). Тогда потенциал, обусловленный двумя близкими поверхностями S и S' , равен

$$\Phi(x) = \int_{S'} \frac{\sigma(x')}{|x - x'|} da' - \int_{S'} \frac{\sigma(x')}{|x - x' + nd|} da''.$$

При малых d мы можем разложить выражение $|x - x' + nd|^{-1}$ в ряд. Рассмотрим общее выражение $|x + a|^{-1}$, в котором $|a| \ll |x|$. При этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x + a|} &\equiv \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2 + 2a \cdot x}} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{a \cdot x}{x^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{x} + a \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{x} \right) + \dots \end{aligned}$$

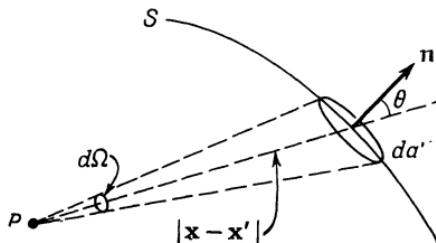
Очевидно, это просто разложение в ряд Тейлора в трехмерном случае. Таким образом, переходя к пределу (1.24), получаем для потенциала выражение

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_S D(\mathbf{x}') \mathbf{n} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d\mathbf{a}'. \quad (1.25)$$

Соотношение (1.25) может быть очень просто истолковано геометрически. Заметим, что

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d\mathbf{a}' = -\frac{\cos \theta d\Omega}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} = -d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, под которым из точки наблюдения виден элемент площади $d\mathbf{a}'$ (фиг. 1.7). Величина $d\Omega$ положительна, если угол θ острый, т. е. из точки наблюдения видна



Фиг. 1.7. К выводу потенциала двойного слоя.

Потенциал в точке P , создаваемый элементом площади $d\mathbf{a}'$ двойного слоя с моментом единицы поверхности D , равен взятому с обратным знаком произведению момента D на телесный угол $d\Omega$, под которым виден элемент площади $d\mathbf{a}'$ из точки P .

«внутренняя» сторона двойного слоя. Выражение для потенциала двойного слоя может быть записано в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = - \int_S D(\mathbf{x}') d\Omega. \quad (1.26)$$

Если поверхностная плотность дипольного момента D постоянна, то потенциал просто равен взятому с обратным знаком произведению дипольного момента на телесный угол, под которым из точки наблюдения видна вся поверхность независимо от ее формы.

При пересечении двойного слоя потенциал претерпевает скачок, равный поверхностной плотности дипольного момента, умноженной на 4π . В этом легко убедиться, если рассмотреть точку наблюдения, приближающуюся бесконечно близко к поверхности S с внутренней стороны. Тогда, согласно (1.26), потенциал на внутренней

стороне будет равен ¹⁾

$$\Phi_1 = -2\pi D,$$

так как почти весь телесный угол 2π опирается на малый участок поверхности S вблизи точки наблюдения. Аналогично если приближаться к поверхности S с внешней стороны, то потенциал становится равным

$$\Phi_2 = +2\pi D;$$

знак меняется на обратный из-за изменения знака телесного угла. Таким образом, скачок потенциала при пересечении двойного слоя равен

$$\Phi_2 - \Phi_1 = 4\pi D. \quad (1.27)$$

Это соотношение является аналогом формулы (1.22) для скачка нормальной составляющей электрического поля при пересечении «простого» слоя, т. е. поверхностного распределения заряда. Соотношение (1.27) можно физически интерпретировать как падение потенциала «внутри» двойного слоя. Это падение потенциала может быть вычислено (до перехода к пределу) как произведение напряженности поля между обоями слоями, несущими поверхностный заряд, на расстояние между ними.

§ 7. Уравнения Лапласа и Пуассона

В § 4 и 5 было показано, что электростатическое поле описывается двумя дифференциальными уравнениями:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (1.14)$$

Последнее уравнение эквивалентно утверждению о том, что \mathbf{E} является градиентом некоторой скалярной функции — скалярного потенциала Φ :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi. \quad (1.16)$$

Уравнения (1.13) и (1.16) можно объединить в одно уравнение в частных производных для единственной функции $\Phi(x)$:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho. \quad (1.28)$$

Это так называемое *уравнение Пуассона*. В тех областях пространства, где плотность заряда равна нулю, скалярный потенциал

¹⁾ Доказательство автора справедливо лишь для плоских двойных слоев, но сама формула (1.27) верна в общем случае произвольного двойного слоя.—*Прим. ред.*

удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (1.29)$$

Выше мы уже получили выражение (1.17) для скалярного потенциала

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (1.17)$$

Чтобы убедиться в том, что это выражение действительно удовлетворяет уравнению Пуассона (1.28), подействуем оператором Лапласа ∇^2 на обе части равенства (1.17):

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = \int \varrho(\mathbf{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'. \quad (1.30)$$

Чтобы рассчитать $\nabla^2(1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$, перенесем начало координат в точку \mathbf{x}' (что вполне допустимо); тогда это выражение сводится к $\nabla^2(1/r)$, где r — абсолютная величина \mathbf{x} . Непосредственный расчет показывает, что $\nabla^2(1/r) = 0$ при $r \neq 0$:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left(r \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(1) = 0.$$

Однако при $r = 0$ это выражение остается неопределенным. Поэтому необходимо прибегнуть к предельному переходу. Поскольку мы можем предполагать, что $\nabla^2(1/r)$ ведет себя подобно δ -функции, проинтегрируем это выражение по небольшому объему V , содержащему начало координат. Применяя теорему о дивергенции, мы можем преобразовать этот интеграл к поверхностному

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d^3x &\equiv \int_V \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) d^3x = \\ &= \int_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) da = \int_S \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) r^2 d\Omega = -4\pi. \end{aligned}$$

Таким образом, $\nabla^2(1/r) = 0$ при $r \neq 0$, а объемный интеграл от $\nabla^2(1/r)$ равен -4π . Следовательно, мы можем положить, что $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{x})$, или в более общем случае

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (1.31)$$

Установив таким образом значение лапласиана от $1/r$, мы можем закончить доказательство того, что (1.17) удовлетворяет уравнению Пуассона. Действительно, согласно (1.30),

$$\nabla^2 \Phi = \int \varrho(\mathbf{x}') [-4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] d^3x' = -4\pi\varrho(\mathbf{x}),$$

что и требовалось доказать.

§ 8. Теорема Грина

Если бы в электростатических задачах мы всегда имели дело с дискретным или непрерывным распределением заряда без всяких граничных поверхностей, то общее решение (1.17) было бы самой удобной и непосредственной формой решения таких задач и не нужны были бы ни уравнение Лапласа, ни уравнение Пуассона. Однако в действительности в целом ряде, если не в большинстве, задач электростатики мы имеем дело с конечными областями пространства (содержащими или не содержащими заряд), на граничных поверхностях которых заданы определенные граничные («краевые») условия. Эти граничные условия могут быть заменены некоторым соответственно подобранным распределением зарядов вне рассматриваемой области (в частности, в бесконечности), однако соотношение (1.17) в этом случае уже непригодно для расчета потенциала, за исключением некоторых частных случаев (например, в методе изображений).

Для рассмотрения задач с граничными условиями необходимо расширить используемый нами математический аппарат, а именно вывести так называемые *формулы*, или *теоремы Грина* (1824 г.). Они получаются непосредственно из теоремы о дивергенции

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} d^3x = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da,$$

которая справедлива для любого векторного поля \mathbf{A} , определенного в объеме V , ограниченном замкнутой поверхностью S . Пусть $\mathbf{A} = \phi \operatorname{grad} \psi$, где ϕ и ψ — произвольные скалярные функции. Тогда

$$\operatorname{div}(\phi \operatorname{grad} \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi \quad (1.32)$$

и

$$\phi \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{n} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad (1.33)$$

где $\partial/\partial n$ — нормальная производная на поверхности S (по направлению внешней нормали по отношению к объему V). Подставляя (1.32) и (1.33) в теорему о дивергенции, мы придем к *первой формуле Грина*

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi) d^3x = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} da. \quad (1.34)$$

Напишем такую же формулу, поменяв в ней местами ϕ и ψ , и вычтем ее из (1.34). Тогда члены с произведением $\operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi$ сократятся и мы получим *вторую формулу Грина*, называемую

иначе теоремой Грина:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) d^3x = \oint_S \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] da. \quad (1.35)$$

С помощью теоремы Грина можно представить дифференциальное уравнение Пуассона в виде интегрального уравнения. Для этого рассмотрим какой-либо определенный вид функции ψ , например положим ее равной $1/R \equiv 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, где \mathbf{x} — точка наблюдения, а \mathbf{x}' — переменная интегрирования. Далее функцию φ положим равной скалярному потенциальному Φ , который, как мы видели, удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla^2 \Phi = -4\pi\varrho$. Согласно (1.31), $\nabla^2(1/R) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, так что (1.35) дает

$$\begin{aligned} \int_V \left[-4\pi\Phi(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{4\pi}{R} \varrho(\mathbf{x}') \right] d^3x' &= \\ &= \oint_S \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] da'. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для точки \mathbf{x} , находящейся внутри объема V

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{R} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] da'. \quad (1.36)$$

Для точки \mathbf{x} , находящейся вне поверхности S , правая часть соотношения (1.36) равна нулю. Заметим, что это согласуется с интерпретацией поверхностного интеграла как потенциала простого слоя зарядов с плотностью $\sigma = (1/4\pi)(\partial\Phi/\partial n')$ и двойного (дипольного) слоя с плотностью момента $D = -(1/4\pi)\Phi$. Скачки электрического поля и потенциала (1.22) и (1.27) на граничной поверхности как раз обеспечивают равенство нулю потенциала и поля вне объема V .

По поводу формулы (1.36) следует сделать два замечания. Во-первых, если поверхность S удаляется в бесконечность и электрическое поле убывает на ней быстрее, чем R^{-1} , то поверхностный интеграл обращается в нуль и (1.36) переходит в известное выражение (1.17). Во-вторых, для объема, не содержащего зарядов, потенциал в любой точке внутри объема (дающий решение уравнения Лапласа), согласно (1.36), выражается только через значение потенциала и его нормальной производной на поверхности, ограничивающей объем. Этот довольно неожиданный результат не является, однако, решением граничной задачи, а представляет собой лишь интегральное уравнение, поскольку, задав Φ , и $\partial\Phi/\partial n$ (граничные условия Коши), мы переопределели задачу. Мы обсудим этот вопрос более подробно в следующих параграфах, в которых будут рассмотрены методы нахождения решений с помощью теоремы Грина (1.35) при соответствующих граничных условиях.

§ 9. Единственность решения при граничных условиях Дирихле или Неймана

Представляет интерес вопрос о том, при каких граничных условиях внутри ограниченного объема существует единственное и физически разумное решение задачи Пуассона (или Лапласа). На основе данных физического опыта можно полагать, что задание потенциала на замкнутой поверхности единственным образом определяет распределение потенциалов (примером может служить система проводников, на которых поддерживаются различные потенциалы). Это так называемая *задача Дирихле, или граничные условия Дирихле*. Аналогично можно ожидать, что задание электрического поля (т. е. нормальной производной от потенциала) на граничной поверхности (что соответствует заданию распределения поверхностного заряда) также однозначно определяет решение. Такие граничные условия носят название *граничных условий Неймана*. Докажем теперь справедливость этих предположений с помощью первой формулы Грина (1.34).

Нам нужно доказать единственность решения уравнения Пуассона $\nabla^2\Phi = -4\pi\rho$ в объеме V при граничных условиях Дирихле или Неймана на поверхности S , ограничивающей этот объем. Предположим, наоборот, что существуют два решения Φ_1 и Φ_2 , удовлетворяющие одним и тем же граничным условиям, и положим

$$U = \Phi_2 - \Phi_1. \quad (1.37)$$

Тогда $\nabla^2U = 0$ внутри V и $U = 0$ или $\partial U / \partial n = 0$ на границе S объема V соответственно для граничных условий Дирихле или Неймана. Полагая $\varphi = \psi = U$, из первой формулы Грина (1.34) получаем

$$\int_V (U\nabla^2U + \operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} U) d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} da. \quad (1.38)$$

Учитывая свойства функции U , мы придем для обоих граничных условий к соотношению

$$\int_V |\operatorname{grad} U|^2 d^3x = 0,$$

откуда следует, что $\operatorname{grad} U = 0$. Таким образом, внутри объема V функция U постоянна. Для граничных условий Дирихле $U = 0$ на границе S , так что внутри V всюду $\Phi_1 = \Phi_2$ и решение единственно. Для граничных условий Неймана решение также единственно с точностью до несущественной аддитивной постоянной.

Из вида правой части соотношения (1.38) следует, что и смешанная граничная задача, когда на части граничной поверхности

задано условие Дирихле, а на остальной поверхности — условие Неймана, также имеет единственное решение.

Из сказанного следует, что уравнение Пуассона, вообще говоря, не имеет решения, принимающего заданные значения Φ и $\partial\Phi/\partial n$ на ограничивающей поверхности (граничные условия Коши), так как уже условия Дирихле или Неймана, взятые в отдельности, определяют единственным образом решение, и эти решения в общем

Вид граничного условия	Тип уравнения		
	эллиптический (уравнение Пуассона)	гиперболический (волновое уравнение)	параболический (уравнение теплопроводности)
<i>Условие Дирихле</i> на незамкнутой поверхности	Недостаточно	Недостаточно	Единственное устойчивое решение в одном на- правлении
	на замкнутой поверхности	Единственное устойчивое решение	Избыточные усло- вия
<i>Условие Неймана</i> на незамкнутой поверхности	Недостаточно	Недостаточно	Избыточные усло- вия
	на замкнутой поверхности	Единственное устойчивое решение в общем слу- чае	Избыточные усло- вия
<i>Условие Коши</i> на незамкнутой поверхности	Решение не имеет физического смысла	Единственное устойчивое решение	Избыточные усло- вия
	на замкнутой поверхности	Избыточные усло- вия	Избыточные усло- вия

Примечание. Устойчивым называется решение, которое при небольшом изменении граничных условий меняется заметным образом лишь в окрестности границы.

случае не совпадают. Вопрос о том, определяют ли граничные условия Коши на *незамкнутой* поверхности единственным образом решение электростатической задачи, требует более детального рассмотрения, выходящего за рамки настоящей книги. Читатель может найти детальное изложение этих вопросов в работах Морса и Фешбаха [77] или Зоммерфельда [103]. Морс и Фешбах заменяют уравнение в частных производных соответствующим уравнением в конечных разностях, которое затем решают методом итерации. Зоммерфельд же главным образом пользуется методом характеристик. Результаты исследований достаточности различных граничных условий сведены в таблицу на стр. 31 (основанной на таблице, приведенной в книге Морса и Фешбаха [77]); в нее включены различные типы дифференциальных уравнений в частных производных и различные виды граничных условий.

Из таблицы следует, что электростатические задачи имеют однозначное решение лишь при задании граничных условий Дирихле и Неймана на замкнутой поверхности (которая частично или вся целиком может, конечно, находиться в бесконечности).

§ 10. Формальное решение граничных задач электростатики с помощью функции Грина

Решение уравнений Пуассона или Лапласа в конечном объеме V , если на ограничивающей поверхности S заданы граничные условия Дирихле или Неймана, можно получить с помощью теоремы Грина (1.35) и так называемых функций Грина.

При выводе соотношения (1.36) (которое не является решением граничной задачи) мы полагали функцию ψ равной $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, т. е. равной потенциалу единичного точечного заряда, удовлетворяющему уравнению

$$\nabla'^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (1.31)$$

Функция $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ — лишь одна из множества функций, зависящих от \mathbf{x} и \mathbf{x}' и удовлетворяющих (1.31) (так называемых *функций Грина*). В общем случае

$$\nabla'^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.39)$$

где

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (1.40)$$

Здесь F удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla'^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad (1.41)$$

внутри объема V .

При отыскании решения уравнения Пуассона, принимающего заданное значение Φ или $\partial\Phi/\partial n$ на границе, мы можем исходить из уравнения (1.36). Как мы уже указывали, это соотношение не является решением, удовлетворяющим корректным граничным условиям, поскольку в поверхностный интеграл входят и Φ , и $\partial\Phi/\partial n$. В лучшем случае это всего лишь интегральное уравнение для Φ . Однако, если исходить из общего понятия функции Грина и воспользоваться свободой в определении этой функции [поскольку функция $F(x, x')$ не определена однозначно], можно в теореме Грина принять функцию ψ равной $G(x, x')$ и выбрать $F(x, x')$ так, чтобы один из двух поверхностных интегралов в формуле Грина обращался в нуль. Тогда формула Грина будет содержать лишь граничные условия Дирихле и Неймана. Конечно, если бы вид необходимой функции $G(x, x')$ очень сложно зависел от граничных условий, то этот метод нельзя было бы считать общим. Однако мы сейчас покажем, что это не так: $G(x, x')$ удовлетворяет довольно простым граничным условиям на S .

Исходя из теоремы Грина (1.35), полагая $\varphi = \Phi$ и $\psi = G(x, x')$ и учитывая соотношение (1.39) для функции Грина, мы придем к соотношению

$$\Phi(x) = \int_V \varrho(x') G(x, x') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(x, x') \frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} \right] da', \quad (1.42)$$

являющемуся обобщением (1.36). Пользуясь свободой в определении функции Грина, мы можем оставить в поверхностном интеграле лишь желательные граничные значения. Так, при задании граничных условий Дирихле мы потребуем, чтобы выполнялось условие

$$G_D(x, x') = 0 \quad \text{для } x' \text{ на } S. \quad (1.43)$$

Тогда первый член в поверхностном интеграле в (1.42) обратится в нуль и мы получим решение

$$\Phi(x) = \int_V \varrho(x') G_D(x, x') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(x') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da'. \quad (1.44)$$

Если заданы граничные условия Неймана, то мы должны быть более осторожны. На первый взгляд может показаться, что условие, налагаемое на функцию Грина $G(x, x')$, должно иметь вид

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(x, x') = 0 \quad \text{для } x' \text{ на } S,$$

поскольку при этом второй член в поверхностном интеграле в (1.42) обращается в нуль. Однако, применяя теорему Гаусса к (1.39), можно убедиться, что

$$\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'} da' = -4\pi.$$

Поэтому простейшее допустимое граничное условие для G_N имеет вид

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'} (\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{для } \mathbf{x}' \text{ на } S, \quad (1.45)$$

где S — полная площадь граничной поверхности. Тогда решение запишется следующим образом:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n'} G_N da', \quad (1.46)$$

где $\langle \Phi \rangle_S$ — среднее значение потенциала на поверхности S .

Обычно задача Неймана представляет собой так называемую «внешнюю задачу», когда объем V ограничен двумя поверхностями, одна из которых замкнута и конечна, а вторая находится в бесконечности. В этом случае площадь поверхности S бесконечна, граничное условие (1.45) становится однородным и среднее значение $\langle \Phi \rangle_S$ обращается в нуль.

Заметим, что функции Грина удовлетворяют простым граничным условиям (1.43) или (1.45), не зависящим от граничных условий Дирихле (или Неймана). Тем не менее отыскание функции $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ представляет собой подчас весьма сложную, а иногда и невыполнимую задачу из-за зависимости этой функции от *формы* поверхности S . С задачами подобного рода мы встретимся в гл. 2 и 3.

Функции Грина, удовлетворяющие граничным условиям (1.43) или (1.45), обладают свойством симметрии $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$; это можно доказать, пользуясь теоремой Грина и полагая $\Phi = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\psi = G(\mathbf{x}', \mathbf{y})$, где \mathbf{y} — переменная интегрирования. Поскольку функция Грина, если рассматривать ее как функцию одной из переменных, описывает потенциал единичного точечного заряда, свойство симметрии отражает физический факт возможности перестановки источника и точки наблюдения. Из соотношения (1.40) для $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ следует, что $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ также является симметричной функцией аргументов.

В заключение сделаем важное замечание относительно физического смысла функции $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Эта функция представляет собой решение уравнения Лапласа внутри области V и, следовательно, описывает потенциал системы зарядов, расположенных вне объема V . Функцию $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ можно представлять себе как потенциал

такого внешнего распределения зарядов, которое в сочетании с точечным единичным зарядом, находящимся в точке \mathbf{x}' , удовлетворяет на поверхности S однородному граничному условию равенства нулю потенциала (или его нормальной производной). Поскольку потенциал в точке \mathbf{x} на поверхности S , создаваемый точечным зарядом, зависит от положения \mathbf{x}' этого заряда, потенциал внешнего распределения зарядов $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ также должен зависеть от «параметра» \mathbf{x}' . С этой точки зрения метод изображений, который мы будем рассматривать ниже, в гл. 2, физически эквивалентен некоторому способу определения соответствующей функции $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, удовлетворяющей граничным условиям (1.43) или (1.45). Для граничных условий Дирихле на поверхности проводников функцию $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ можно также интерпретировать как потенциал, создаваемый поверхностным распределением зарядов, индуцируемым на проводниках единичным зарядом, находящимся в точке \mathbf{x}' .

§ 11. Потенциальная энергия и плотность энергии электростатического поля

В § 5 было показано, что произведение скалярного потенциала на величину точечного заряда можно интерпретировать как потенциальную энергию этого заряда. Более точно, если точечный заряд q_i внести из бесконечности в точку \mathbf{x}_i , находящуюся в области, где имеется электрическое поле, описываемое скалярным потенциалом Φ (обращающимся в нуль на бесконечности), то работа, совершенная при перемещении заряда (а следовательно, и потенциальная энергия заряда), равна

$$W_i = q_i \Phi(\mathbf{x}_i). \quad (1.47)$$

Считая, что потенциал Φ создается системой ($n - 1$) зарядов q_j ($j = 1, 2, \dots, n - 1$), находящихся в точках \mathbf{x}_j , получаем

$$\Phi(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}, \quad (1.48)$$

так что потенциальная энергия заряда q_i равна

$$W_i = q_i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (1.49)$$

Очевидно, полная потенциальная энергия всей системы зарядов, обусловленная силами их взаимодействия, равна

$$W = \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}, \quad (1.50)$$

в чем можно убедиться последовательным добавлением по одному заряду к системе. Это выражение можно записать в более симметричной форме, сняв ограничение $j < i$ при суммировании и поделив сумму на 2:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}; \quad (1.51)$$

при этом подразумевается, что члены с $i = j$ в двойной сумме (соответствующие бесконечной «собственной» энергии точечных зарядов) опускаются.

Для непрерывного распределения зарядов потенциальная энергия принимает вид

$$W = \frac{1}{2} \int \int \frac{\varrho(\mathbf{x}) \varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x'. \quad (1.52)$$

Это выражение можно считать справедливым и в общем случае, если воспользоваться δ -функцией Дирака (1.6)¹). Другое выражение, эквивалентное (1.52), можно получить, если учесть, что внутренний интеграл в (1.52) как раз равен скалярному потенциалу (1.17). Следовательно, мы можем написать

$$W = \frac{1}{2} \int \varrho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3x. \quad (1.53)$$

В выражениях (1.51) — (1.53) электростатическая потенциальная энергия представлена как функция положения зарядов; это подчеркивает, что взаимодействие зарядов описывается законом Кулона. Возможен иной подход, при котором энергия выражается через электрическое поле; тем самым подчеркивается идея о локализации энергии в пространстве, окружающем заряды. Чтобы получить такое выражение для энергии, исключим с помощью уравнения Пуассона плотность зарядов из (1.53)

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int \Phi \nabla^2 \Phi d^3x.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$W = \frac{1}{8\pi} \int |\operatorname{grad} \Phi|^2 d^3x = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{E}|^2 d^3x, \quad (1.54)$$

где интегрирование производится по всему пространству. В (1.54) распределение зарядов явно не входит; энергия выражается через интеграл от квадрата электрического поля по всему пространству.

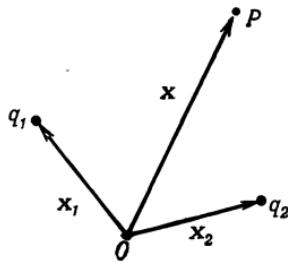
¹⁾ Выражение (1.52) в применении к δ -распределениям дает бесконечные слагаемые, соответствующие «собственной» энергии точечных зарядов, так что, строго говоря, для δ -распределений интеграл (1.52) расходится. При определении взаимной энергии системы зарядов эти бесконечные слагаемые следует опускать, что соответствует опущению членов с $i = j$ в (1.51). — Прим. ред.

Поэтому естественно отождествить подынтегральное выражение с плотностью энергии

$$w = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2. \quad (1.55)$$

Это выражение для плотности энергии согласуется с интуитивным представлением о том, что в областях с большим полем энергия «должна» быть больше.

Выражение (1.55) для плотности энергии может показаться странным в одном отношении. Оно всегда положительно определено, так что и объемный интеграл (1.54) всегда будет неотрицателен.



Ф и г. 1.8.

Это, казалось бы, противоречит тому факту, что, согласно (1.51), потенциальная энергия системы двух зарядов противоположного знака отрицательна. Причина этого кажущегося противоречия заключается в том, что выражения (1.54) и (1.55) включают и «собственную» энергию зарядов, тогда как (1.51) не включает ее. Рассмотрим, например, два точечных заряда q_1 и q_2 , находящихся в точках \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 (фиг. 1.8). Электрическое поле в точке P с радиусом-вектором \mathbf{x} равно

$$\mathbf{E} = \frac{q_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + \frac{q_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3},$$

так что плотность энергии составляет

$$w = \frac{q_1^2}{8\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^4} + \frac{q_2^2}{8\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^4} + \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3}. \quad (1.56)$$

Два первых слагаемых соответствуют, очевидно, собственной энергии зарядов q_1 и q_2 . Чтобы убедиться, что третье слагаемое дает правильное выражение для потенциальной энергии взаимодействия, проинтегрируем его по всему пространству:

$$W_{\text{взаим}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} d^3x. \quad (1.57)$$

Переходя к переменной $\mathbf{Q} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)/|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$, получаем

$$W_{\text{взаим}} = \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{n})}{|\mathbf{Q}|^3 |\mathbf{Q} + \mathbf{n}|^3} d^3Q, \quad (1.58)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Непосредственным интегрированием можно убедиться, что входящий в последнее выражение безразмерный интеграл равен 4π , так что мы получаем ожидаемое выражение для энергии взаимодействия.

Силы взаимодействия заряженных тел можно найти, определив изменение полной электростатической энергии системы при малых виртуальных перемещениях. Несколько примеров такого рода расчетов приведено ниже (см. задачи к гл. 1). При этом энергию нужно представить в таком виде, чтобы было видно, какие члены меняются при изменении конфигурации и какие остаются постоянными.

В качестве простейшего примера рассчитаем силу, действующую на единицу поверхности проводника с поверхностной плотностью заряда $\sigma(\mathbf{x})$. Вблизи поверхности проводника плотность энергии

$$\omega = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 = 2\pi\sigma^2. \quad (1.59)$$

Пусть теперь элемент поверхности проводника Δa смещается на величину Δx наружу. Тогда электростатическая энергия уменьшается на величину, равную произведению плотности энергии ω на исключаемый объем $\Delta x \Delta a$:

$$\Delta W = -2\pi\sigma^2 \Delta a \Delta x. \quad (1.60)$$

Это означает, что на единичную площадку на поверхности проводника действует сила, равная $2\pi\sigma^2 = \omega$, направленная из проводника наружу. Обычно это выражение для силы находят как произведение поверхностной плотности заряда σ на электрическое поле, причем при нахождении последнего следует исключить поле, создаваемое самим рассматриваемым элементом поверхности.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

В книге Лайтхилла [66] с математической точки зрения просто и достаточно строго рассмотрены δ -функции.

Различные типы дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующие граничные условия рассмотрены в книгах Морса и Фешбаха [77], гл. 6, Зоммерфельда [103], гл. 2, и Куранта и Гильберта [32], гл. 3–6.

Общая теория функций Грина подробно изложена в книгах Фридмана [42], гл. 3, и Морса и Фешбаха [77], гл. 7.

Общие вопросы электростатики рассмотрены во многих старых руководствах по электростатике, из которых, несмотря на устаревшие обозначения, стоит упомянуть монографии Максвелла [73], т. 1, гл. 2 и 4, и Джинса [55], гл. 2, 6, 7. Из более поздних работ упомянем обширную монографию Стрэттона [106], гл. 3, и отдельные части из гл. 2.

Дополнение редактора. Общая математическая теория обобщенных функций, частным случаем которых является δ -функция, изложена в монографии Гельфанд и Шилова [124]. Краткое изложение свойств δ -функций

и их применения можно найти в книге Иваненко и Соколова [53]. Прекрасное изложение физических основ электростатики дано в учебнике Тамма [130].

ЗАДАЧИ

1.1. С помощью теоремы Гаусса доказать следующие утверждения:

а) Любой заряд, вносимый на проводник, может располагаться лишь на его поверхности. (По определению, в проводнике заряды могут свободно перемещаться под действием электрического поля.)

б) Замкнутый полый проводник экранирует внутренний объем от действия зарядов, расположенных снаружи, но не экранирует внешнего объема от действия зарядов, расположенных внутри.

в) Электрическое поле на поверхности проводника всегда нормально этой поверхности и равно $4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность заряда.

1.2. Две бесконечные проводящие плоские пластины постоянной толщины t_1 и t_2 помещены параллельно друг другу на расстоянии L (между соседними поверхностями). Полный заряд на единицу площади (т. е. сумма зарядов на обеих сторонах пластины) равен q_1 для первой пластины и q_2 для второй. Используя симметрию задачи¹⁾ и теорему Гаусса, показать, что

а) поверхностные плотности зарядов на внутренних поверхностях пластин равны между собой по величине и противоположны по знаку;

б) поверхностные плотности на внешних поверхностях пластин одинаковы;

в) значения плотностей зарядов и обусловливаемых ими полей не зависят от t_1 , t_2 и L . Найти явное выражение поверхностных плотностей и полей через q_1 и q_2 и рассмотреть частный случай $q_1 = -q_2 = Q$.

1.3. Даны три заряженные сферы радиусом a . Одна из них проводящая, другая однородно заряжена по всему объему, а на третьей заряд распределен сферически симметрично, причем плотность заряда меняется как r^n ($n > -3$). Полный заряд каждой сферы равен Q . Пользуясь теоремой Гаусса, найти электрическое поле внутри и вне каждой сферы. Построить графики зависимости поля от радиуса для первых двух случаев и для третьего случая при $n = -2$ и $n = +2$.

1.4. Усредненное (по времени) значение потенциала для нейтрального атома водорода описывается формулой

$$\Phi = e \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2} \right),$$

где e — заряд электрона, а $\alpha^{-1} = a_0/2$ ²⁾. Найти распределение зарядов (непрерывное и дискретное), обеспечивающее такой вид потенциала, и пояснить его физический смысл.

1.5. Простейший конденсатор представляет собой два рядом расположенных изолированных проводника. Если на проводники поместить равные, но противоположные по знаку заряды, то между ними устанавливается определенная разность потенциалов. Отношение величины заряда на одном из проводников к величине разности потенциалов называется емкостью конденсатора (в электростатической системе единиц емкость измеряется в сантиметрах). Используя теорему Гаусса, рассчитать емкость для случаев, когда имеются следующие системы проводников:

¹⁾ В этом примере в условия симметрии следует включить и условия одинаковости полей вдали от пластин (во внешних областях). — Прим. ред.

²⁾ Здесь a_0 — так называемый радиус электрона, равный e^2/mc^2 (e — заряд, m — масса электрона, c — скорость света). — Прим. ред.

- а) две большие плоские пластины площадью A на небольшом расстоянии d друг от друга;
 б) две концентрические проводящие сферы радиусами a и b ($b > a$);
 в) два концентрических проводящих цилиндра, длина которых L много больше их радиусов a и b ($b > a$).

1.6. Два длинных цилиндрических проводника радиусами a_1 и a_2 расположены параллельно друг другу на расстоянии d , которое много больше их радиуса. Показать, что емкость единицы длины приблизительно равна

$$C \approx \left(4 \ln \frac{d}{a} \right)^{-1},$$

где a — среднее геометрическое обоих радиусов.

Какого диаметра проволока потребуется для двухпроводной линии передачи с погонной емкостью $0,1 \text{ пФ/см}$, если расстояние между проводами равно $0,5 \text{ см}$? $1,5 \text{ см}$? $5,0 \text{ см}$?

1.7. а) Для трех вариантов конденсатора, рассмотренных в задаче 1.5, рассчитать полную электростатическую энергию и выразить ее через заряды (Q и $-Q$) на проводниках и через разность потенциалов между ними.

б) Построить графики зависимости плотности энергии от соответствующей линейной координаты для всех трех случаев.

1.8. Рассчитать силу притяжения проводников в плоском конденсаторе (задача 1.5, п. «а») и цилиндрическом конденсаторе (задача 1.6) в случае:

- а) заданных зарядов на обкладках конденсатора,
 б) заданной разности потенциалов между обкладками.

1.9. Доказать *теорему о среднем значении*: значение электростатического потенциала в любой точке объема, не содержащего зарядов, равно среднему значению потенциала на поверхности любой сферы с центром в этой точке.

1.10. С помощью теоремы Гаусса доказать, что на искривленной поверхности заряженного проводника нормальная производная электрического поля удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности.

1.11. Доказать *теорему взаимности Грина*: если Φ — потенциал, обусловленный объемным распределением заряда Q и поверхностным распределением σ , а Φ' — потенциал, обусловленный другим объемным распределением Q' и поверхностным распределением σ' , то справедливо соотношение

$$\int_V q \Phi' d^3x + \int_S \sigma \Phi' da = \int_V q' \Phi d^3x + \int_S \sigma' \Phi da.$$

1.12. Доказать *теорему Томсона*: при фиксированном положении проводящих поверхностей и заданном полном заряде на каждой поверхности электростатическая энергия поля в области, ограниченной этими поверхностями, минимальна для такого расположения зарядов, при котором каждая поверхность является эквипотенциальной.

1.13. Доказать следующую теорему: при фиксированном положении проводящих поверхностей и заданном полном заряде на каждой из них внесение незаряженного изолированного проводника в область, ограниченную этими поверхностями, снижает электростатическую энергию системы.