

Глава 2

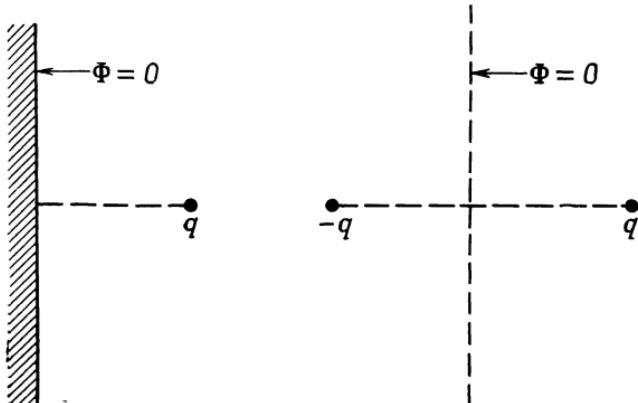
ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ. I

Во многих задачах электростатики рассматриваются граничные поверхности, на которых задан потенциал или плотность поверхностного заряда. В гл. 1, § 10, дано формальное решение задач такого типа с помощью функций Грина. В практических встречающихся случаях (даже при весьма сильной идеализации) определение соответствующей функции Грина подчас весьма затруднительно. В связи с этим был разработан ряд других методов решения граничных задач, причем некоторые из них довольно далеки от метода функций Грина. В этой главе мы познакомимся с двумя такими методами: 1) методом изображений, весьма тесно связанным с методом функций Грина, и 2) методом разложения по ортогональным функциям, в котором используется само дифференциальное уравнение, а непосредственное построение функции Грина не производится. Другие методы решения электростатических задач, как, например, метод конформных преобразований в двумерных задачах, рассматриваться не будут. Читатели, интересующиеся методом конформных преобразований, могут познакомиться с ним по литературе, приводимой в конце главы.

§ 1. Метод изображений

Метод изображений применим в тех задачах, где нужно найти поле одного или нескольких точечных зарядов при наличии граничных поверхностей, например заземленных или поддерживаемых при постоянных потенциалах проводников. При определенных условиях можно подобрать такую систему зарядов, имеющих надлежащую величину и надлежащим образом расположенных вне интересующей нас области, что действие этих зарядов обеспечивает требуемые граничные условия. Эти заряды называются *зарядами-изображениями*, а замена истинной задачи с граничными условиями

на эквивалентную задачу определения поля в расширенной области без граничных условий, но с учетом зарядов-изображений называется *методом изображений*. Заряды-изображения должны находиться вне интересующего нас объема, поскольку потенциал создаваемого ими поля должен удовлетворять уравнению Лапласа



Ф и г. 2.1. К решению задачи методом изображений.

Слева — исходная задача, справа — эквивалентная задача, полученная методом изображений.

в этом объеме; частное же решение уравнения Пуассона дается суммой потенциалов, соответствующих реальным зарядам, находящимся внутри объема.

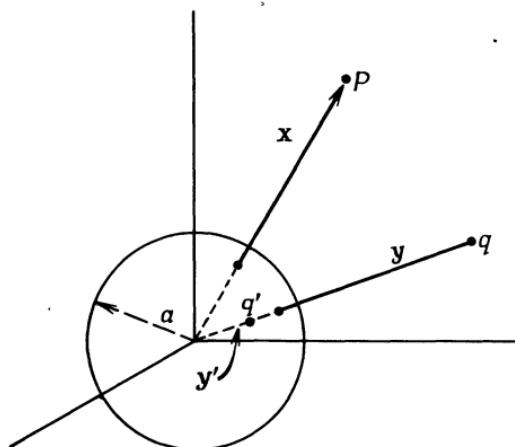
В качестве простейшего примера рассмотрим точечный заряд, расположенный у бесконечной проводящей плоскости, имеющей нулевой потенциал (фиг. 2.1). Очевидно, эта задача эквивалентна задаче об определении потенциала системы двух зарядов — первоначального заряда и равного ему по величине, но противоположного по знаку заряда, расположенного зеркально симметрично первому относительно поверхности проводника.

§ 2. Точечный заряд вблизи заземленного сферического проводника

Для иллюстрации метода изображений рассмотрим задачу о поле точечного заряда q , расположенного в точке у вблизи сферического заземленного¹⁾ проводника радиусом a с центром в начале

¹⁾ Под заземленным мы понимаем проводник, на котором с помощью тонкого провода поддерживается тот же потенциал, что и на бесконечности. Предполагается, что этот связующий провод не искажает распределения потенциала. Однако он позволяет зарядам перемещаться из бесконечности на проводник и обратно так, чтобы обеспечить на проводнике потенциал «земли» (принимаемый обычно за нулевой). Аналогично следует понимать и проводник, поддерживаемый при постоянном потенциале, с той разницей, что в этом случае между землей и проводником включен источник напряжения.

координат (фиг. 2.2). Нужно найти потенциал $\Phi(x)$, удовлетворяющий условию $\Phi(x) = 0$ при $|x| = a$. Из симметрии задачи ясно, что заряд-изображение q' (предполагается, что достаточно одного заряда-изображения) должен быть расположен на прямой, соединяющей начало координат с зарядом q . Если заряд q находится *вне*



Фиг. 2.2. Заряд q вблизи сферического проводника радиусом a и изображение этого заряда q' .

сферы, то точка изображения y' должна быть внутри сферы. Потенциал поля, создаваемого зарядами q и q' , равен

$$\Phi(x) = \frac{q}{|x-y|} + \frac{q'}{|x-y'|}. \quad (2.1)$$

Мы должны попытаться подобрать q' и $|y'|$ так, чтобы этот потенциал обращался в нуль при $|x| = a$. Обозначив через \mathbf{n} единичный вектор в направлении x , а через \mathbf{n}' единичный вектор в направлении y , представим Φ в виде

$$\Phi(x) = \frac{q}{|x\mathbf{n}-y\mathbf{n}'|} + \frac{q'}{|x\mathbf{n}-y'\mathbf{n}'|}. \quad (2.2)$$

Вынося за скобки в первом слагаемом x , а во втором y' и полагая $x = a$, получаем

$$\Phi(x=a) = \frac{q}{a|\mathbf{n}-(y/a)\mathbf{n}'|} + \frac{q'}{|y'\mathbf{n}'-(a/y')\mathbf{n}'|}. \quad (2.3)$$

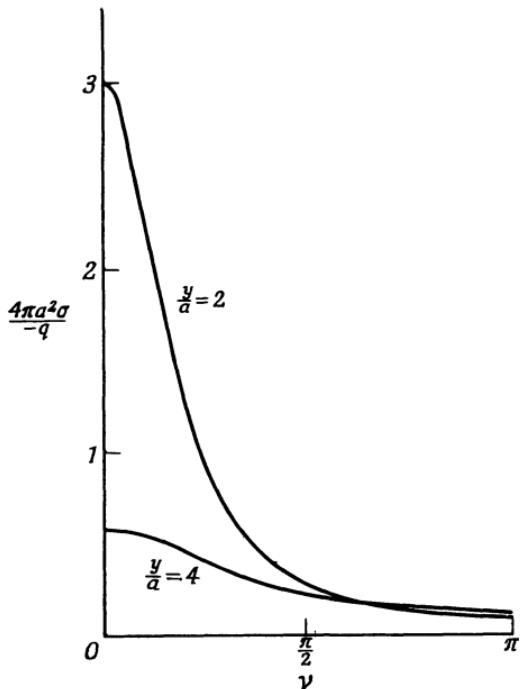
Из (2.3) следует, что если положить

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{y'}, \quad \frac{y}{a} = \frac{a}{y'},$$

то при $x = a$ потенциал Φ равен нулю для всех значений $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$. Таким образом, величина и положение заряда-изображения определяются соотношениями

$$q' = -\frac{a}{y'} q, \quad y' = \frac{a^2}{y}. \quad (2.4)$$

Заметим, что по мере приближения заряда q к поверхности сферы величина заряда-изображения становится все больше и он все больше удаляется от центра сферы навстречу заряду q . Когда заряд q находится у поверхности сферы, его изображение равно ему по величине и противоположно по знаку и расположено тоже у самой поверхности сферы.



Фиг. 2.3. Распределение поверхностной плотности заряда σ на заземленной сфере радиусом a , индуцированное точечным зарядом q , расположенным на расстоянии y от центра сферы.

Приведены кривые для двух значений y . По оси абсцисс отложен угол γ между радиусами-векторами, проведенными из центра сферы к заряду и к точке наблюдения.

Найдя заряд-изображение, мы можем вернуться к первоначальной задаче о заряде q вне заземленной проводящей сферы. Истинную плотность зарядов на поверхности сферы можно найти по нормальной производной потенциала на поверхности

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{a}{y} \frac{1-a^2/y^2}{[1+a^2/y^2+2(a/y)\cos\gamma]^{3/2}} ; \quad (2.5)$$

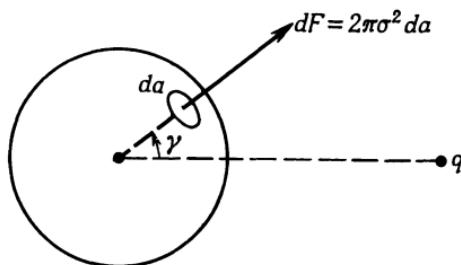
здесь γ — угол между x и y . Зависимость поверхностной плотности (отнесенной к $-q/4\pi a^2$) от γ для двух значений y/a приведена на фиг. 2.3. Как видно из кривых, заряд концентрируется вблизи направления на точечный заряд q , особенно в случае $y = 2a$. Непосредственным интегрированием легко убедиться, что полный индуцированный заряд на сфере равен по величине заряду-изображению, как и должно быть согласно теореме Гаусса.

Силу, действующую на заряд q , можно определять различными способами. Проще всего непосредственно найти силу взаимодействия

ствия заряда q с его изображением q' . Расстояние между ними равно $y - y' = y(1 - a^2/y^2)$, так что сила притяжения, согласно закону Кулона, равна

$$|\mathbf{F}| = \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^3 \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^{-2}. \quad (2.6)$$

На далеких расстояниях эта сила убывает обратно пропорционально кубу расстояния, но вблизи поверхности сферы она меняется обратно пропорционально квадрату расстояния от поверхности сферы.



Ф и г. 2.4.

Силу, действующую на заряд q , можно также найти, вычислив полную силу, действующую на поверхность сферы. На каждый элемент поверхности da действует сила $2\pi\sigma^2 da$ (фиг. 2.4), где σ определяется соотношением (2.5). Из симметрии ясно, что полная сила определяется лишь составляющей, параллельной радиусу-вектору, проведенному из центра сферы к заряду q . Таким образом, полная сила, действующая на сферу (равная по величине и противоположная по направлению силе, действующей на заряд q), равна интегралу

$$|\mathbf{F}| = \frac{q^2}{8\pi a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2 \int \frac{\cos \gamma}{[1 + a^2/y^2 - 2(a/y) \cos \gamma]^3} d\Omega. \quad (2.7)$$

Выполняя интегрирование, непосредственно получаем (2.6).

До сих пор мы предполагали, что точечный заряд q находится *вне* сферы. Однако все приведенные результаты справедливы и для случая, когда точечный заряд q находится *внутри* сферы. В этом случае нужно лишь изменить знак на обратный в выражении для поверхностной плотности заряда (2.5), поскольку внешняя нормаль к проводнику направлена теперь к центру сферы. Мы предоставляем читателю написать все формулы для этого случая с учетом того, что теперь $y \ll a$. Угловое распределение поверхностного заряда аналогично приведенному на фиг. 2.3, но полный наведенный заряд равен, конечно, $-q$ независимо от y .

§ 3. Точечный заряд вблизи заряженного изолированного сферического проводника

В предыдущем параграфе мы рассмотрели задачу о поле точечного заряда q вблизи заземленной сферы и нашли поверхностную плотность заряда, индуцируемого на сфере. Полный индуцируемый заряд, равный $q' = -aq/y$, распределен по поверхности сферы таким образом, что он находится в равновесии под действием электрического поля.

Переходя к задаче о точечном заряде q вблизи изолированной проводящей сферы с заданным полным зарядом Q , мы можем построить решение путем линейной суперпозиции потенциалов. Для удобства расчета представим себе, что сначала проводящая сфера заземлена (полный заряд ее поверхности при этом равен q'). Разомкнем теперь заземляющий провод и внесем на сферу дополнительный заряд $Q - q'$. Полный заряд на сфере станет при этом равным Q . Чтобы найти потенциал, достаточно заметить, что вносимый дополнительный заряд $Q - q'$ распределяется *равномерно* по поверхности сферы, поскольку электростатическое поле, обусловленное точечным зарядом q , уже уравновешено зарядом q' . Таким образом, вне сферы потенциал дополнительного заряда $Q - q'$ равен потенциалу точечного заряда той же величины, помещенного в центре сферы.

Полный потенциал представляет собой суперпозицию потенциала (2.1) и потенциала точечного заряда $Q - q'$, находящегося в начале координат (в центре сферы):

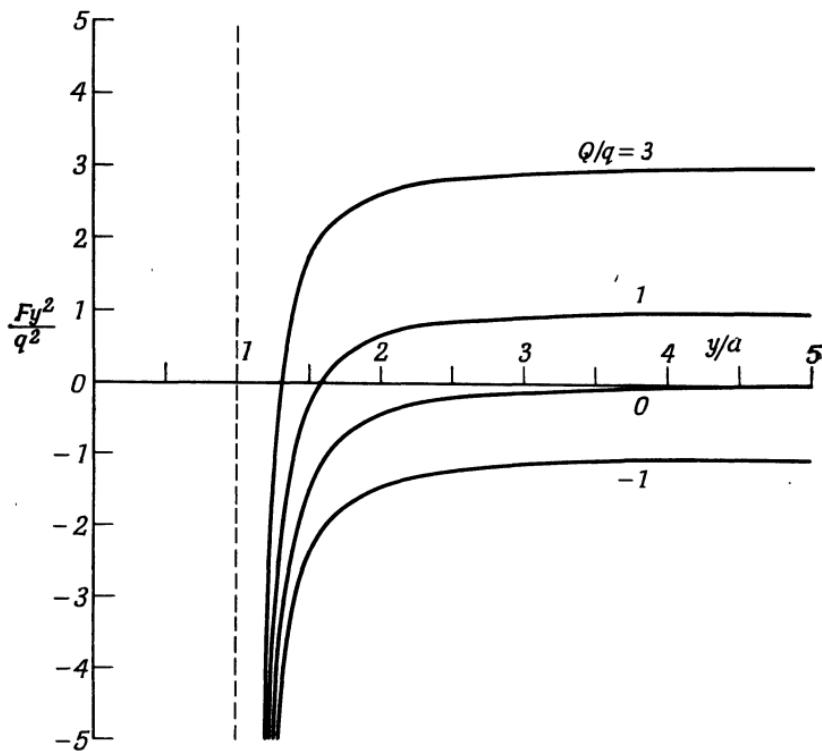
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{aq}{y |\mathbf{x} - (a^2/y^2) \mathbf{y}|} + \frac{Q + (a/y) q}{|\mathbf{x}|}. \quad (2.8)$$

Силу, действующую на заряд q , можно найти непосредственно с помощью закона Кулона. Она направлена вдоль радиуса-вектора точки нахождения заряда q и равна

$$\mathbf{F} = \frac{q}{y^2} \left[Q - \frac{qa^3(2y^2 - a^2)}{y(y^2 - a^2)^2} \right] \frac{\mathbf{y}}{y}. \quad (2.9)$$

В предельном случае $y \gg a$ соотношение (2.9) переходит в обычный закон Кулона для силы взаимодействия двух малых заряженных тел. Если же точечный заряд находится вблизи сферы, то оказывается влияние заряда, индуцированного на поверхности сферы. На фиг. 2.5 показана зависимость силы от расстояния для различных значений Q/q . По оси ординат отложена сила, отнесенная к q^2/y^2 . Положительные значения соответствуют отталкиванию, отрицательные — притяжению. Если заряд сферы равен нулю или противоположен по знаку заряду q , то на всех расстояниях имеет

место притяжение. При одноименных зарядах Q и q на достаточно малых расстояниях также имеет место притяжение. В пределе при $Q \gg q$ точка неустойчивого равновесия, в которой сила, действующая на заряд, равна нулю, очень близка к поверхности сферы: $y \approx a [1 + 1/2 (q/Q)^{1/2}]$. Заметим, что асимптотическое значение



Фиг. 2.5. Сила, действующая на точечный заряд q вблизи изолированной проводящей сферы радиусом a с полным зарядом Q .

Положительные значения силы соответствуют отталкиванию, отрицательные — притяжению. При любом значении Q на малых расстояниях всегда имеет место притяжение благодаря взаимодействию с индуцированным поверхностным зарядом.

силы достигается уже на расстоянии нескольких радиусов от поверхности сферы.

Этот пример поясняет, почему избыточный заряд на поверхности проводника не покидает тотчас эту поверхность вследствие взаимного отталкивания зарядов. При малейшем смещении элементарного заряда сила взаимодействия с его изображением стремится вернуть его назад. Конечно, совершив достаточно большую работу, можно удалить заряд с поверхности проводника. Работа выхода для металла в основном и есть работа, совершаемая против сил взаимодействия с изображением при удалении электрона с поверхности металла.

§ 4. Точечный заряд вблизи сферического проводника с заданным потенциалом

Столь же легко решается и задача о точечном заряде вблизи проводящей сферы, поддерживаемой при заданном потенциале V . Выражение для потенциала имеет тот же вид, что и в предыдущем случае, с той разницей, что заряд $Q - q'$ в центре сферы заменяется на Va . Действительно, как видно из (2.8), при $|x| = a$ первые два слагаемых компенсируют друг друга, а третье слагаемое дает как раз V , что и требуется. Таким образом, потенциал равен

$$\Phi(x) = \frac{q}{|x-y|} - \frac{aq}{y|x-(a^2/y^2)y|} + \frac{Va}{|x|}. \quad (2.10)$$

Сила взаимодействия точечного заряда со сферой с заданным потенциалом равна

$$\mathbf{F} = \frac{q}{y^2} \left[Va - \frac{qay^3}{(y^2-a^2)^2} \right] \frac{\mathbf{y}}{y}. \quad (2.11)$$

Для соответствующих значений Va/q и Q/q характер зависимости этой силы от расстояния близок к приведенному на фиг. 2.5, хотя приближение к асимптотическому значению (Vaq/y^2) происходит более медленно. При $Va \gg q$ точка неустойчивого равновесия определяется координатой $y \approx a [1 + 1/2 (q/Va)^{1/2}]$.

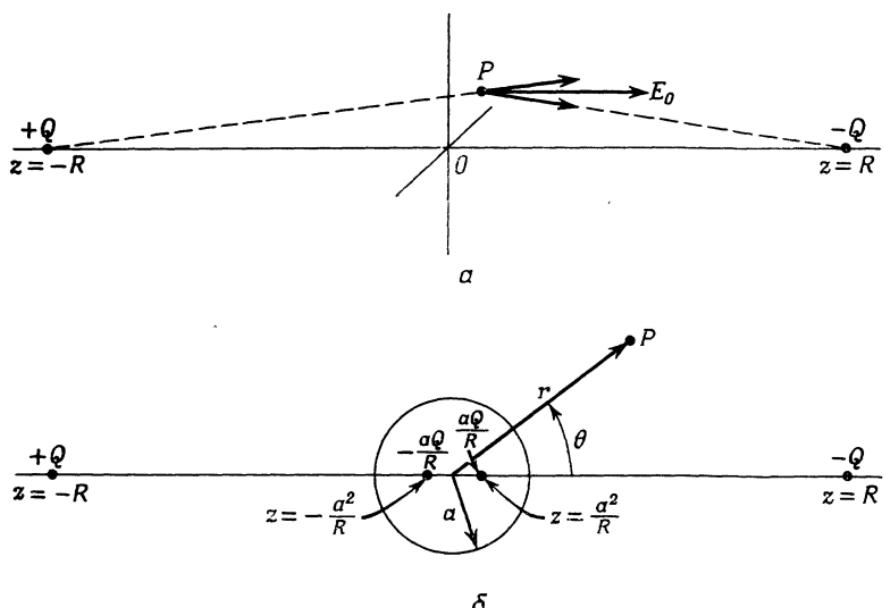
§ 5. Сферический проводник в однородном электрическом поле

В качестве последнего примера применения метода изображений рассмотрим проводящую сферу радиусом a в однородном электрическом поле E_0 . Можно считать, что однородное поле создано соответствующими положительным и отрицательным зарядами на бесконечности. Если, например, два заряда $+Q$ и $-Q$ находятся в точках $z = \mp R$, как показано на фиг. 2.6, *а*, то в близкой к началу координат области, размеры которой много меньше R , электрическое поле имеет почти постоянное значение $E_0 \approx 2Q/R^2$ и приблизительно параллельно оси z . В пределе, когда $R \rightarrow \infty$, $Q \rightarrow \infty$ при $Q/R^2 = \text{const}$, это приближение становится совершенно точным.

Пусть теперь в начало координат помещена проводящая сфера радиусом a (фиг. 2.6, *б*); при этом поле будет определяться реальными зарядами $\pm Q$, находящимися на расстоянии $\mp R$, и зарядами-изображениями, соответственно равными $\mp Qa/R$ и расположенными в точках $z = \mp a^2/R$. Полный потенциал равен

$$\Phi = \frac{Q}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos \theta)^{1/2}} - \frac{Q}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2}} - \\ - \frac{aQ}{R \left(r^2 + \frac{a^4}{R^2} + \frac{2a^2r}{R} \cos \theta \right)^{1/2}} + \frac{aQ}{R \left(r^2 + \frac{a^4}{R^2} - \frac{2a^2r}{R} \cos \theta \right)^{1/2}}, \quad (2.12)$$

где введены сферические координаты r, θ точки наблюдения. В первых двух слагаемых, учитывая, что, по предположению, R много больше r , можно разложить корень по степеням r/R ,



Ф и г. 2.6. Применение метода изображений к проводящей сфере в однородном электрическом поле.

вынеся предварительно за скобки R^2 . Аналогично в третьем и четвертом членах можно произвести разложение после вынесения r^2 . В результате получим

$$\Phi = \left[-\frac{2Q}{R^2} r \cos \theta + \frac{2Q}{R^2} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \right] + \dots \quad (2.13)$$

Здесь не выписаны члены, обращающиеся в нуль при $R \rightarrow \infty$. В пределе при $R \rightarrow \infty$ отношение $2Q/R^2$ переходит в величину приложенного электрического поля E_0 , так что потенциал равен

$$\Phi = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (2.14)$$

Первое слагаемое $(-E_0 z)$ равно, очевидно, просто потенциалу однородного поля E_0 , который можно было бы написать сразу вместо первых двух слагаемых в (2.12). Второе слагаемое описывает потенциал, создаваемый индуцированными поверхностными зарядами, или, что то же самое, потенциал, создаваемый зарядами-изображениями. Заметим, что заряды-изображения образуют

диполь с моментом $D = (Qa/R)(2a^2/R) = E_0 a^3$. Поверхностная плотность индуцируемого заряда равна

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \theta. \quad (2.15)$$

Заметим, что интеграл от поверхности плотности равен нулю, так что безразлично, считаем ли мы сферу заземленной или изолированной.

§ 6. Метод инверсии

Изложенные в предыдущих параграфах примеры применения метода изображений к сфере наводят на мысль о том, что решения электростатических задач, связанных обратным преобразованием радиуса

$$r \rightarrow r' = \frac{a^2}{r}, \quad (2.16)$$

в каком-то смысле эквивалентны. Эта эквивалентность является основой так называемого метода инверсии, а преобразование (2.16) называется *преобразованием инверсии на сфере*. Радиус сферы называют *радиусом инверсии*, а ее центр — *центром инверсии*. Математический смысл эквивалентности ясен из следующей теоремы:

Пусть $\Phi(r, \theta, \varphi)$ — потенциал, обусловленный системой точечных зарядов q_i в точках $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$. Тогда функция

$$\Phi'(r, \theta, \varphi) = \frac{a}{r} \Phi\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right) \quad (2.17)$$

является потенциалом системы зарядов

$$q'_i = \frac{a}{r_i} q_i, \quad (2.18)$$

расположенных в точках $(a^2/r_i, \theta_i, \varphi_i)$.

Докажем эту теорему. Потенциал $\Phi(r, \theta, \varphi)$ можно представить в виде

$$\Phi = \sum_i \frac{q_i}{(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \gamma_i)^{1/2}},$$

где γ_i — угол между радиусами-векторами \mathbf{x} и \mathbf{x}_i . При преобразовании (2.16) углы не меняются. Следовательно, новый потенциал Φ' имеет вид

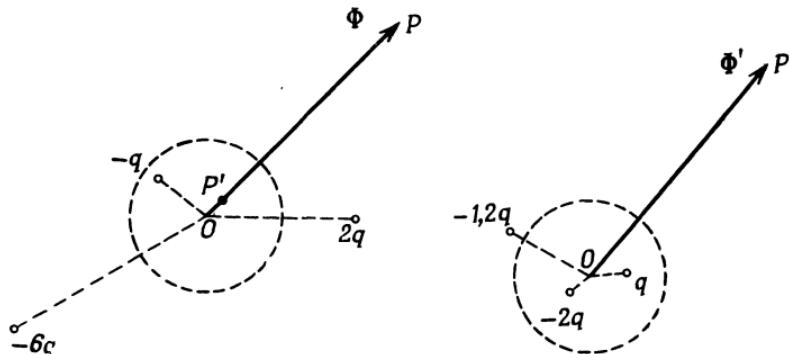
$$\Phi'(r, \theta, \varphi) = \frac{a}{r} \sum_i \frac{q_i}{\left(\frac{a^4}{r^2} + r_i^2 - \frac{2a^2}{r} r_i \cos \gamma_i\right)^{1/2}}.$$

Вынося r_i^2/r^2 за знак радикала, мы можем переписать Φ' в виде

$$\Phi'(r, \theta, \varphi) = \sum_i \frac{aq_i/r_i}{\left(r^2 + \frac{a^4}{r_i^2} - 2r \frac{a^2}{r_i} \cos \gamma_i \right)^{1/2}},$$

откуда и следует справедливость теоремы.

На фиг. 2.7 показана простая конфигурация зарядов до и после инверсии. Потенциал Φ' в точке P , обусловленный инвертированной системой зарядов, связан с потенциалом Φ исходной системы в точке P' зарядов соотношением (2.17).



Ф и г. 2.7.

Мы доказали теорему инверсии для системы точечных зарядов. Предоставляем читателю в качестве упражнения доказать, что если потенциал Φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho,$$

то новый потенциал Φ' , определяемый соотношением (2.17), также удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi'(r, \theta, \varphi) = -4\pi\rho'(r, \theta, \varphi), \quad (2.19)$$

где новая объемная плотность зарядов равна

$$\rho'(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{a}{r}\right)^5 \rho\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right). \quad (2.20)$$

Связь между этим законом преобразования объемной плотности заряда и законом преобразования величины точечных зарядов (2.18) можно установить, представив плотность распределения для системы дискретных зарядов в виде суммы δ -функций:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i).$$

В сферических координатах с началом координат в центре инверсии объемная плотность заряда записется в виде

$$\varrho(r, \theta, \varphi) = \sum_i q_i \delta(\Omega - \Omega_i) \frac{1}{r_i^2} \delta(r - r_i),$$

где $\delta(\Omega - \Omega_i)$ — угловая δ -функция, интеграл от которой по телесному углу дает единицу, а $\delta(r - r_i)$ — радиальная δ -функция¹⁾. При инверсии угловая зависимость не меняется. Следовательно,

$$\varrho\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right) = \sum_i q_i \delta(\Omega - \Omega_i) \frac{1}{r_i^2} \delta\left(\frac{a^2}{r} - r_i\right).$$

Как указано в гл. 1, § 2, радиальную δ -функцию можно преобразовать следующим образом:

$$\delta\left(\frac{a^2}{r} - r_i\right) = \frac{r^2}{a^2} \delta\left(r - \frac{a^2}{r_i}\right) = \frac{a^2}{r_i^2} \delta\left(r - \frac{a^2}{r_i}\right),$$

так что

$$\varrho\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right) = \sum_i q_i \delta(\Omega - \Omega_i) \frac{a^6}{r_i^6} \frac{\delta(r - a^2/r_i)}{(a^2/r_i)^2},$$

а новая объемная плотность заряда принимает, согласно (2.20), вид

$$\varrho'(r, \theta, \varphi) = \frac{a^5}{r^5} \sum_i q_i \left(\frac{a}{r_i}\right)^6 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i) = \sum_i q'_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i),$$

где $\mathbf{x}'_i = (a^2/r_i, \theta, \varphi)$, а $q'_i = (a/r_i) q_i$, что совпадает с (2.18).

Для *поверхностной* плотности зарядов закон преобразования при инверсии имеет вид

$$\sigma'(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sigma\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right); \quad (2.21)$$

такую зависимость и следовало ожидать из сопоставления соотношений (2.18) и (2.20).

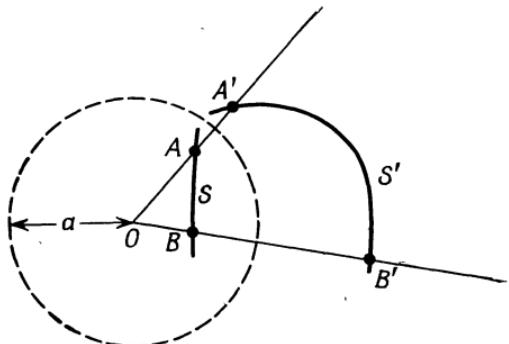
Прежде чем перейти к примерам применения метода инверсии, следует остановиться на нескольких вопросах физического и геометрического характера.

В отношении физических свойств преобразования инверсии заметим сначала, что, если в первоначальной задаче на некоторых поверхностях был задан постоянный потенциал, после инверсии на инвертированных поверхностях потенциал не будет, вообще

¹⁾ Множитель r_i^{-2} перед радиальной δ -функцией компенсирует множитель r^2 в элементе объема $d^3x = r^2 dr d\Omega$.

говоря, постоянным. Это видно из соотношения (2.17): из-за множителя a/r потенциал Φ' инвертированной поверхности не будет постоянным, даже если потенциал Φ первоначальной поверхности был постоянным. Единственным исключением является случай, когда потенциал Φ равен нулю на некоторой поверхности; тогда и потенциал Φ' равен нулю на инвертированной поверхности¹⁾.

Может показаться, что, поскольку потенциал Φ содержит произвольную аддитивную постоянную, мы можем приравнять



Фиг. 2.8. Преобразование инверсии.

Поверхность S преобразуется в S' , и наоборот; O — центр инверсии, a — радиус инверсии.

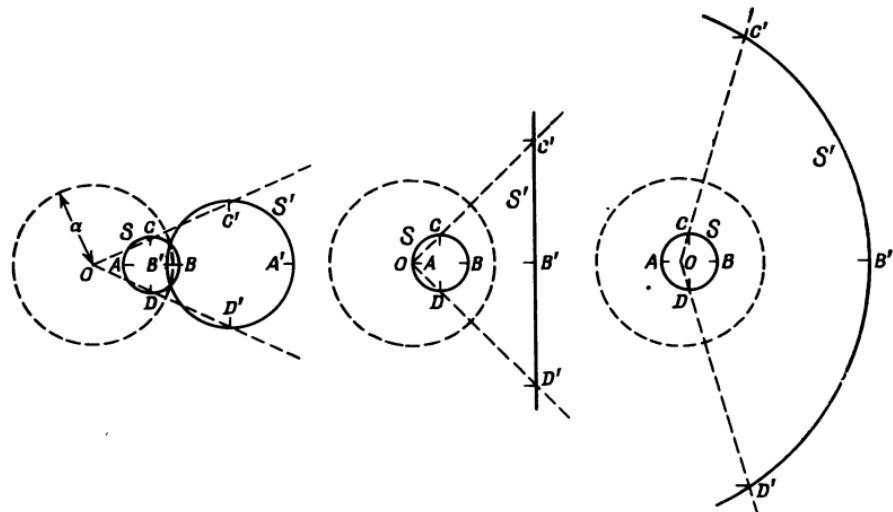
нулю потенциал произвольной поверхности первоначальной конфигурации, обеспечив тем самым нулевой потенциал инвертированной поверхности. Однако тут мы сталкиваемся со вторым характерным физическим свойством преобразования инверсии. Оказывается, потенциалы, получающиеся по методу инверсии для двух задач, в которых потенциалы первоначальных систем различаются лишь на постоянную Φ_0 , соответствуют физически различным системам зарядов, а именно распределение зарядов отличается на точечный заряд $a\Phi_0$, расположенный в центре инверсии. Это легко видеть из (2.17): добавление постоянного слагаемого Φ_0 к Φ приводит к увеличению Φ' на $a\Phi_0/r$. Соответственно при применении метода инверсии следует иметь в виду, что при отображении бесконечно удаленной точки в начало координат там может появиться точечный заряд. Если он не требуется по условиям задачи, то его следует убрать надлежащей линейной суперпозицией.

Приведем теперь несколько простых геометрических свойств преобразования инверсии, в справедливости которых легко убедиться. Пусть O — центр инверсии, a — радиус инверсии (фиг. 2.8). Пересечение сферы инверсии с плоскостью чертежа показано на фиг. 2.8 пунктиром. Пусть кривая AB — след пересечения

¹⁾ Исключением является также мало интересный случай, когда инвертируемая поверхность представляет собой сферу с центром в центре инверсии: в этом случае $a/r = \text{const}$ на поверхности.— Прим. ред.

поверхности S с плоскостью чертежа. Инвертированная поверхность S' , определяемая преобразованием (2.16), пересекается с плоскостью чертежа по кривой $A'B'$. При инверсии справедливы следующие положения, доказательства которых мы приводить не будем:

- углы пересечения не меняются;
- величина элементарной площадки da на поверхности S связана с величиной соответствующей площадки da' на инвертированной поверхности S' соотношением $da/d a' = r^2/r'^2$;



Ф и г. 2.9. Различные варианты инверсии сферы.

Если центр O инверсии расположен на поверхности S сферы, то инвертированная поверхность S' представляет собой плоскость, в остальных случаях — сферу. Сфера инверсии показана пунктиром.

в) сфера переходит в сферу (в частности, бесконечного радиуса, см. п. «г»);

г) плоскость переходит в сферу, проходящую через центр инверсии, и наоборот.

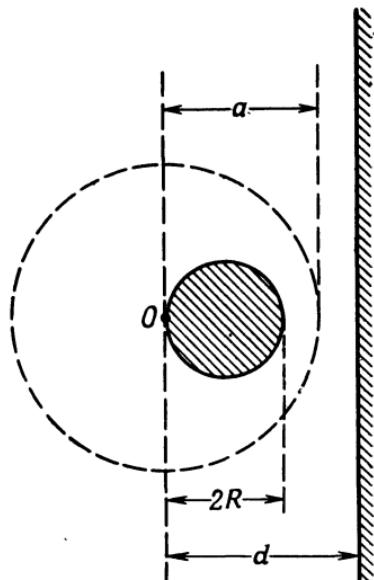
На фиг. 2.9 показаны различные варианты инверсии сферы, соответствующие п. «в» и «г» для случаев, когда центр инверсии расположен вне сферы, на ее поверхности и внутри сферы.

В качестве простейшего примера решения электростатической задачи методом инверсии рассмотрим проводящую сферу радиусом R , несущую заряд Q . Внутри этой сферы потенциал постоянен и равен Q/R , а вне сферы убывает обратно пропорционально расстоянию от ее центра. Надлежащим выбором центра инверсии и соответствующих параметров мы можем с помощью метода инверсии найти потенциал точечного заряда q , расположенного на расстоянии d от бесконечной проводящей заземленной плоскости. Очевидно, если поместить центр инверсии O на поверхности сферы

радиусом R , то в результате преобразования она перейдет в плоскость (фиг. 2.10). Далее, если принять произвольную постоянную Φ_0 в потенциале равной $-Q/R$, то сфера и получающаяся при ее преобразовании плоскость будут иметь нулевой потенциал, а в центре инверсии появится точечный заряд $-aQ/R$. Чтобы получить точечный заряд q на расстоянии d от плоскости, следует положить радиус инверсии a равным $(2Rd)^{1/2}$, а начальный заряд Q

Фиг. 2.10. Нахождение потенциала точечного заряда методом инверсии.

Потенциал изолированной заряженной проводящей сферы переходит при преобразовании инверсии в потенциал точечного заряда, находящегося на расстоянии d от бесконечной проводящей плоскости.



равным $-(R/2d)^{1/2}q$. Поверхностная плотность заряда, индуцируемая на плоскости, легко находится с помощью соотношения (2.21). Поскольку на поверхности сферы поверхностная плотность постоянна, на плоскости она меняется обратно пропорционально кубу расстояния от начала координат (это легко проверить методом изображений; см. задачу 2.1).

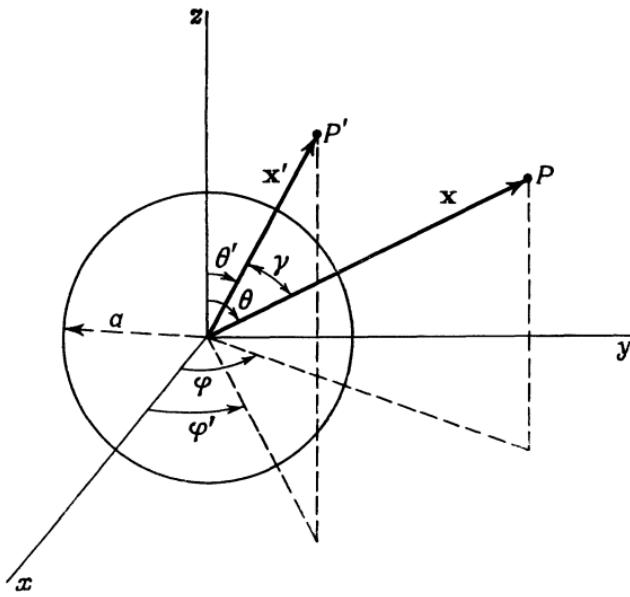
Если центр инверсии находится вне изолированной проводящей сферы, то, как видно из фиг. 2.9, преобразованием инверсии можно решить задачу о поле точечного заряда вблизи заземленной проводящей сферы (в § 2 она была решена методом изображений). Представляем читателю убедиться в этом (см. задачу 2.9).

Весьма интересно применил метод инверсии лорд Кельвин в 1847 г. Он рассчитал распределение плотности заряда на внутренней и внешней сторонах тонкой заряженной проводящей «чаши», получающейся срезанием верхушки у сферической поверхности. В качестве исходного потенциала, подвергавшегося инверсии, был принят потенциал тонкого плоского заряженного круглого диска (см. гл. 3, § 12). По мере изменения формы поверхности от мелкой

чаши типа часового стекла до почти замкнутой сферы с небольшим отверстием распределение заряда также изменяется: сначала оно близко к распределению на диске, а затем переходит в распределение на сфере. В первом предельном случае плотность заряда внутри и снаружи почти одинакова, причем заряды сосредоточены в основном у краев, во втором случае на внутренней стороне плотность заряда почти нулевая, а на наружной заряд распределен почти равномерно. Численные данные приведены в трудах Кельвина [58] и в книге Джинса [55].

§ 7. Функция Грина для сферы. Общее выражение для потенциала

Выше задача о точечном заряде вблизи проводящей сферы была рассмотрена методом изображений. Как указывалось в гл. 1, § 10, потенциал единичного заряда и его изображения (или изображений), удовлетворяющий соответствующим однородным граничным условиям, как раз является функцией Грина [см. (1.43)]



Ф и г. 2.11.

или (1.45) для граничных условий Дирихле или Неймана. В функции $G(x, x')$ переменная x' определяет точку P' , в которой находится единичный заряд, а переменная x — точку P , для которой вычисляется потенциал (фиг. 2.11). Для граничных условий Дирихле на сфере радиусом a потенциал единичного заряда и его изображения дается соотношениями (2.1) и (2.4), в которых следует полу-

жить $q = 1$. Изменив соответственно обозначения, получим функцию Грина в виде

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \leftarrow \frac{a}{x' \left| \mathbf{x} - \frac{a^2}{x'^2} \mathbf{x}' \right|}, \quad (2.22)$$

или в сферических координатах

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \gamma)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\frac{x^2 x'^2}{a^2} + a^2 - 2xx' \cos \gamma \right)^{1/2}}, \quad (2.23)$$

здесь γ — угол между \mathbf{x} и \mathbf{x}' . Из формы соотношения (2.23) непосредственно видно, что функция Грина симметрична по отношению к переменным \mathbf{x} и \mathbf{x}' и равна нулю в случае, если \mathbf{x} или \mathbf{x}' находится на поверхности сферы.

Чтобы записать решение (1.44) уравнения Пуассона, нужно знать не только G , но и значение $\partial G / \partial n'$ на сфере. Учитывая, что n' означает внешнюю нормаль по отношению к интересующему нас объему, т. е. нормаль, направленную к центру сферы, найдем

$$\frac{\partial G}{\partial n'} \Big|_{x'=a} = - \frac{x^2 - a^2}{a(x^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (2.24)$$

Заметим, что $\partial G / \partial n'$ фактически представляет собой распределение плотности заряда (2.5). Отсюда следует, что решение уравнения Лапласа *вне* сферы при заданном потенциале на сфере дается, согласно (1.44), выражением

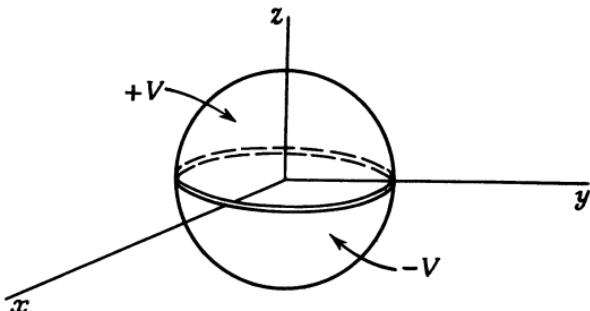
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \Phi(a, \theta', \varphi') \frac{a(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega', \quad (2.25)$$

где $d\Omega'$ — элемент телесного угла в точке (a, θ', φ') , а $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi')$. Для *внутренней* задачи вектор нормали направлен наружу, так что знак $\partial G / \partial n'$ обратен (2.24). Это эквивалентно замене множителя $(x^2 - a^2)$ на $(a^2 - x^2)$ в (2.25). Если, кроме того, задано некоторое распределение объемного заряда, то к (2.25) следует прибавить соответствующий интеграл, согласно (1.44), с функцией Грина (2.23).

§ 8. Две примыкающие проводящие полусфера, имеющие различный потенциал

В качестве примера применения общего метода нахождения потенциала вне сферы при заданном потенциале на ее поверхности рассмотрим задачу о проводящей сфере радиусом a , составленной из двух полусфер, разделенных тонкой изолирующей прокладкой.

Потенциалы полусфер различны. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда потенциалы равны соответственно V и $-V$, поскольку, добавляя к результату решение для сферы, находящейся под постоянным потенциалом, можно получить решение для



Фиг. 2.12.

произвольных потенциалов полусфер. Изолирующая прокладка расположена в плоскости $z = 0$ (фиг. 2.12), потенциал верхней полусферы V , нижней $-V$.

Согласно (2.25), решение $\Phi(x, \theta, \varphi)$ представляется интегралом

$$\Phi(x, \theta, \varphi) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left\{ \int_0^1 d(\cos \theta') - \int_{-1}^0 d(\cos \theta') \right\} \frac{a(x^2 - a^2)}{(a^2 + x^2 - 2ax \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (2.26)$$

Соответствующей заменой переменных во втором интеграле ($\theta' \rightarrow \pi - \theta'$, $\varphi' \rightarrow \varphi' + \pi$) это выражение можно представить в виде

$$\Phi(x, \theta, \varphi) = \frac{Va(x^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos \theta') [(a^2 + x^2 - 2ax \cos \gamma)^{-3/2} - (a^2 + x^2 + 2ax \cos \gamma)^{-3/2}]. \quad (2.27)$$

Из-за сложной зависимости $\cos \gamma$ от углов (θ', φ') и (θ, φ) интегралы в выражении (2.27) в общем случае не удается вычислить в замкнутом виде.

В качестве частного случая рассмотрим потенциал на положительной полуоси z . В этом случае $\cos \gamma = \cos \theta'$, поскольку $\theta = 0$. После элементарного интегрирования получим для потенциала выражение

$$\Phi(z) = V \left[1 - \frac{z^2 - a^2}{z(z^2 + a^2)^{1/2}} \right]. \quad (2.28)$$

При $z = a$, как и следовало ожидать, потенциал Φ равен V , а на больших расстояниях он примерно равен $3Va^2/2z^2$.

В общем случае (2.27), когда интегрирование в замкнутом виде не производится, можно разложить подынтегральное выражение в ряд и проинтегрировать каждый член ряда. Вынося за скобки множитель $(a^2 + x^2)$, получаем

$$\Phi(x, \theta, \varphi) = \frac{Va(x^2 - a^2)}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos \theta') [(1 - 2a \cos \gamma)^{-3/2} - (1 + 2a \cos \gamma)^{-3/2}], \quad (2.29)$$

где $a = ax/(a^2 + x^2)$. Заметим, что в разложении разности радиkalов останутся лишь нечетные степени $a \cos \gamma$:

$$[(1 - 2a \cos \gamma)^{-3/2} - (1 + 2a \cos \gamma)^{-3/2}] = 6a \cos \gamma + 35a^3 \cos^3 \gamma + \dots . \quad (2.30)$$

Интегралы от нечетных степеней $\cos \gamma$ по $d\varphi' d(\cos \theta')$ равны

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos \theta') \cos \gamma &= \pi \cos \theta, \\ \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos \theta') \cos^3 \gamma &= \frac{\pi}{4} \cos \theta (3 - \cos^2 \theta). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Подставляя (2.30) и (2.31) в (2.29), найдем потенциал

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \varphi) &= \frac{3Va^2}{2x^2} \left[\frac{x^3(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^{5/2}} \right] \cos \theta \times \\ &\times \left[1 + \frac{35}{24} \frac{a^2 x^2}{(a^2 + x^2)^2} (3 - \cos^2 \theta) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Заметим, что в (2.32) входят лишь нечетные степени $\cos \theta$, как и следует из симметрии задачи. Если принять за параметр разложения не a^2 , а a^2/x^2 , то ряд будет иметь следующий вид:

$$\Phi(x, \theta, \varphi) = \frac{3Va^2}{2x^2} \left[\cos \theta - \frac{7a^2}{12x^2} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right) + \dots \right]. \quad (2.33)$$

Для больших значений x/a это разложение быстро сходится, так что им очень удобно пользоваться для вычисления потенциала. Уже при $x/a = 5$ второй член ряда составляет всего 2% от первого. Легко убедиться, что для $\cos \theta = 1$ выражение (2.33) представляет собой разложение в ряд потенциала (2.28) на оси. Угловые множители в выражении (2.33) совпадают с полиномами Лежандра. Первый множитель — полином $P_1(\cos \theta)$, второй — $P_3(\cos \theta)$, а весь ряд в целом представляет собой разложение потенциала в ряд по полиномам Лежандра нечетного порядка. Мы рассмотрим этот вопрос более последовательно в гл. 3, § 3.

§ 9. Разложение по ортогональным функциям

Разложение решения электростатических задач (или других задач математической физики) в ряд по ортогональным функциям — один из наиболее эффективных методов, пригодный для решения широкого класса задач. Конкретный выбор ортогональной системы функций зависит от симметрии, которой обладает (точно или приближенно) рассматриваемая система. Чтобы напомнить общие свойства ортогональных функций и разложений по ним, рассмотрим интервал (a, b) изменения переменной ξ и совокупность действительных или комплексных функций $U_n(\xi)$, $n = 1, 2, \dots$, ортогональных на интервале (a, b) . Условие ортогональности функций $U_n(\xi)$ выражается соотношением

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) d\xi = 0 \quad \text{при } m \neq n. \quad (2.34)$$

При $n = m$ интеграл конечен. Мы будем предполагать, что функции нормированы, так что интеграл равен единице. В этом случае систему функций $U_n(\xi)$ называют *ортонормированной*; она удовлетворяет условию

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) d\xi = \delta_{nm}. \quad (2.35)$$

Произвольная функция $f(\xi)$ с интегрируемым квадратом в интервале (a, b) может быть разложена в ряд по ортонормированным функциями $U_n(\xi)$. Если число членов суммы конечно (скажем, равно N), т. е.

$$f(\xi) \leftrightarrow \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi), \quad (2.36)$$

то можно поставить вопрос о «наилучшем» выборе коэффициентов a_n так, чтобы ряд «наилучшим» образом воспроизводил функцию $f(\xi)$. Если считать наилучшим приближением такое, при котором среднеквадратичная ошибка

$$M_N = \int_a^b \left| f(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi) \right|^2 d\xi \quad (2.37)$$

минимальна, то, как легко видеть, для коэффициентов a_n с учетом условия (2.35) получается выражение

$$a_n = \int_a^b U_n^*(\xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.38)$$

Это — известное выражение для коэффициентов разложения по ортонормированной системе функций.

Если увеличивать число членов в сумме (2.36), то естественно ожидать, что представление функции $f(\xi)$ с помощью ряда будет становиться все более точным. Это действительно имеет место, если система ортонормированных функций является *полной*, т. е. для любого сколь угодно малого положительного числа существует такое конечное число N_0 , что при $N > N_0$ среднеквадратичная ошибка M_N может быть сделана меньше этого числа. В этом случае пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\xi) = f(\xi), \quad (2.39)$$

где a_n определяется соотношением (2.38), и говорят, что ряд *сходится в среднем* к $f(\xi)$. Физики обычно предоставляют математикам проводить весьма кропотливые доказательства полноты системы функций. В математических работах доказано, что все системы ортонормированных функций, которыми обычно пользуются в математической физике, представляют собой полные системы функций.

Ряд (2.39) можно переписать, подставив явное выражение (2.38) для коэффициентов a_n :

$$f(\xi) = \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi') U_n(\xi) \right\} f(\xi') d\xi'. \quad (2.40)$$

Поскольку это справедливо для любой функции $f(\xi)$ на интервале (a, b) , то, очевидно, сумма в фигурных скобках должна быть отлична от нуля лишь в бесконечно малой окрестности точки $\xi' = \xi$, т. е. должно выполняться соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi') U_n(\xi) = \delta(\xi' - \xi). \quad (2.41)$$

Это так называемое *условие полноты*, или *замкнутости*. Оно аналогично условию ортонормальности (2.35), но непрерывная переменная ξ и дискретный индекс n здесь обменялись ролями.

Наиболее известная система ортогональных функций — это тригонометрические функции синус и косинус; разложение по этим функциям носит название ряда Фурье. Для интервала $(-\pi, \pi)$ изменения переменной x система ортонормированных функций имеет вид

$$\left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \sin \left(\frac{2\pi mx}{\pi} \right), \quad \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{2\pi mx}{\pi} \right),$$

где m — целое число. Ряд, соответствующий ряду (2.39), обычно записывают в этом случае в виде

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) + B_m \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \right], \quad (2.42)$$

где

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) dx, \\ B_m &= \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) dx. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Обобщение формул (2.34) — (2.39) на случай нескольких переменных очевидно. Пусть пространство двумерно, переменная ξ меняется в интервале (a, b) , а переменная η — в интервале (c, d) . Пусть $U_n(\xi)$ и $V_m(\eta)$ представляют собой системы ортонормированных функций для этих интервалов. Тогда разложение произвольной функции $f(\xi, \eta)$ имеет вид

$$f(\xi, \eta) = \sum_n \sum_m a_{nm} U_n(\xi) V_m(\eta), \quad (2.44)$$

где

$$a_{nm} = \int_a^b d\xi \int_c^d d\eta U_n^*(\xi) V_m^*(\eta) f(\xi, \eta). \quad (2.45)$$

Если интервал (a, b) становится бесконечно большим, то множество функций $U_n(\xi)$ становится уже несчетным, а символ Кронекера δ_{nm} в (2.35) переходит в δ -функцию Дирака. Важным примером является интеграл Фурье. Начнем с ортонормированной на интервале $(-a/2, a/2)$ системы комплексных экспоненциальных функций

$$U_m(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i(2\pi mx/a)}, \quad (2.46)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Разложение в ряд имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i(2\pi mx/a)}, \quad (2.47)$$

где

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i(2\pi mx'/a)} f(x') dx'. \quad (2.48)$$

Примем теперь, что величина интервала неограниченно увеличивается ($a \rightarrow \infty$), и произведем замену

$$\begin{aligned} \frac{2\pi m}{a} &\rightarrow k, \\ \sum_m &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dm = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk, \\ A_m &\rightarrow \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} A(k). \end{aligned} \quad (2.49)$$

В пределе (2.47) переходит в интегральное разложение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk, \quad (2.50)$$

где

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (2.51)$$

Условие ортогональности имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = \delta(k - k'), \quad (2.52)$$

а условие полноты есть

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta(x - x'). \quad (2.53)$$

Последние интегралы являются удобными представлениями δ -функции. Заметим, что в (2.50) — (2.53) непрерывные переменные x и k совершенно равноправны.

§ 10. Разделение переменных.

Уравнение Лапласа в декартовых координатах

Одним из наиболее удобных и употребительных методов решения уравнений в частных производных математической физики является *метод разделения переменных*. Использование этого метода часто приводит к построению систем ортогональных функций, имеющих

самостоятельное значение. Как известно, уравнения, содержащие трехмерный оператор Лапласа, разделяются в одиннадцати различных системах координат (см. книгу Морса и Фешбаха [77]). Мы рассмотрим подробно лишь три из них — декартову (прямоугольную), сферическую и цилиндрическую, причем начнем с простейшей — декартовой.

Уравнение Лапласа в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.54)$$

Решение этого уравнения в *частных производных* может быть выражено через решения трех *обыкновенных* дифференциальных уравнений, имеющих одинаковый вид¹⁾, если представить потенциал как произведение трех функций, каждая из которых зависит лишь от одной координаты:

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (2.55)$$

Подставляя (2.55) в (2.54) и деля на Φ , получаем

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (2.56)$$

Здесь частные производные заменены полными, поскольку каждая функция зависит лишь от одной переменной. Чтобы соотношение (2.56) было справедливо для произвольных значений аргументов, каждое слагаемое должно быть в отдельности постоянным:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\alpha^2, \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -\beta^2, \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= \gamma^2, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

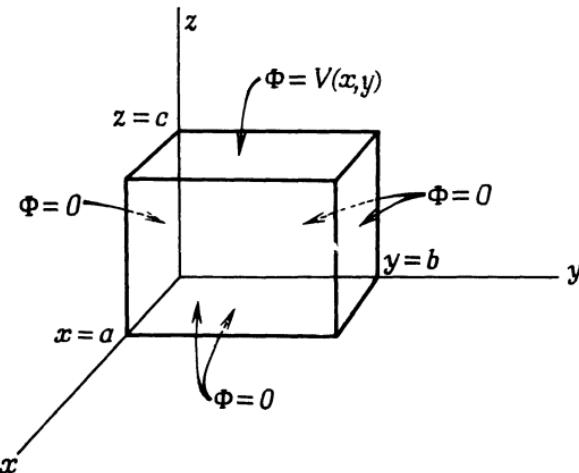
Считая совершенно произвольно α^2 и β^2 положительными, мы получаем в качестве решений трех дифференциальных уравнений (2.57) функции $\exp(\pm i\alpha x)$, $\exp(\pm i\beta y)$ и $\exp(\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z)$. Потенциал (2.55) получается как произведение этих функций

$$\Phi = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}. \quad (2.58)$$

Пока числа α и β здесь совершенно произвольны, так что линейной суперпозицией решений типа (2.58) можно получить весьма широкий класс решений уравнения Лапласа.

¹⁾ Последнее обстоятельство свойственно только декартовой системе, и обусловлено тем, что все три координаты здесь равноправны.— Прим. ред.

Чтобы определить α и β , на потенциал нужно наложить определенные граничные условия. Рассмотрим для примера прямоугольный параллелепипед, расположенный, как показано на фиг. 2.13, с размерами (a, b, c) по осям (x, y, z) . Пусть на всех гранях параллелепипеда потенциал равен нулю, за исключением



Фиг. 2.13. Полый прямоугольный параллелепипед, на пяти гранях которого потенциал нулевой, а на шестой ($z = c$) принимает заданные значения $\Phi = V(x, y)$.

грани $z = c$, на которой задано значение потенциала $V(x, y)$. Требуется найти значение потенциала всюду внутри параллелепипеда. Исходя из требования $\Phi = 0$ при $x = 0, y = 0$ и $z = 0$, легко убедиться, что искомые функции X, Y, Z имеют вид

$$\begin{aligned} X &= \sin \alpha x, \\ Y &= \sin \beta y, \\ Z &= \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Из условия $\Phi = 0$ при $x = a$ и $y = b$ следует, что $\alpha a = n\pi$ и $\beta b = m\pi$. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{n\pi}{a}, \\ \beta_m &= \frac{m\pi}{b}, \\ \gamma_{nm} &= \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

мы можем записать частное решение

$$\Phi_{nm} = \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y \cdot \operatorname{sh} \gamma_{nm} z, \quad (2.61)$$

которое удовлетворяет граничным условиям на всех гранях, кроме одной. Искомый потенциал можно разложить в ряд по функциям Φ_{nm} с первоначально произвольными коэффициентами

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n, m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \operatorname{sh} \gamma_{nm} z; \quad (2.62)$$

коэффициенты должны определяться из последнего граничного условия. Остается использовать условие $\Phi = V(x, y)$ при $z = c$:

$$V(x, y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \operatorname{sh} \gamma_{nm} c. \quad (2.63)$$

Полученное соотношение представляет собой разложение функции $V(x, y)$ в двойной ряд Фурье. Следовательно, коэффициенты этого ряда равны

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \operatorname{sh} \gamma_{nm} c} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y. \quad (2.64)$$

Если потенциал отличен от нуля на всех шести гранях параллелепипеда, то искомое решение можно получить как линейную суперпозицию шести решений типа (2.62) и (2.64), соответствующих каждой грани. Чтобы решить уравнение Пуассона, т. е. найти потенциал внутри параллелепипеда при заданных распределениях зарядов внутри него и заданных граничных условиях на его поверхности, нужно, согласно (1.43) и (1.44), построить соответствующую функцию Грина. Мы вернемся к этому вопросу после рассмотрения уравнения Лапласа в сферической и цилиндрической системах координат. Здесь же мы заметим лишь, что решение, определяемое соотношениями (2.62) и (2.64), эквивалентно поверхностному интегралу в (1.44).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Метод изображений и инверсии рассмотрен во многих книгах. Лучше или подробнее других он рассмотрен Джинсом [55], гл. 8, Максвеллом [73], т. I, гл. 11, и Смайтом [100], гл. 4 и 5. Поистине энциклопедическим источником примеров с многочисленными графиками может служить книга Дюрана [37], особенно гл. 3 и 4.

Применение метода конформных отображений для решения двумерных электростатических задач рассмотрено в книгах Дюрана [37], гл. 10, Джинса [55], гл. 8, § 306—337, Максвелла [73], т. I, гл. 12, и Смайта [100], гл. 4, § 9—29. Этому же вопросу посвящено большое число руководств для инженеров, как, например, монография Роте, Оллендорфа и Польхаузена [88].

Элементарное, но ясное изложение теории рядов и интегралов Фурье и разложений по ортогональным функциям можно найти в книгах Чер-

чилла [28] и Хильдебранда [51], гл. 5. Несколько устаревшее изложение теории рядов и интегралов Фурье, но зато с большим числом примеров и задач дано у Байерли [25].

Дополнение редактора. Довольно подробное рассмотрение различных методов решения электростатических задач, в том числе метода инверсии, можно найти в книге Гринберга [127].

ЗАДАЧИ

2.1. Точечный заряд q помещен на расстоянии d от бесконечного плоского проводника, имеющего нулевой потенциал. С помощью метода изображений найти:

- поверхностную плотность зарядов (построить график);
- силу взаимодействия заряда с плоскостью (использовать закон Кулона для силы взаимодействия заряда с его изображением);
- полную силу, действующую на плоскость (определить ее интегрированием величины $2\pi r^2$ по всей плоскости);
- работу, которую необходимо совершить, чтобы удалить заряд q в бесконечность;
- потенциальную энергию взаимодействия заряда q с его изображением (сравнить результат с п. «г» и проанализировать);
- выразить результат п. «г» в электрон-вольтах для случая, когда электрон находился первоначально на расстоянии 1 \AA от поверхности.

2.2. С помощью метода изображений рассмотреть задачу о точечном заряде q , находящемся *внутри* полой заземленной проводящей сферы с внутренним радиусом a . Найти:

- потенциал внутри сферы;
- поверхностную плотность индуцированных зарядов;
- величину и направление силы, действующей на заряд.

Меняется ли как-либо решение в случае, когда задан потенциал сферы V ? Когда задан ее полный заряд Q ?

2.3. Две бесконечные заземленные проводящие плоскости расположены при $x = a/2$ и $x = -a/2$. Точечный заряд q расположен между плоскостями в точке (x', y', z') , причем $-a/2 < x' < a/2$.

а) Найти расположение и величину всех зарядов-изображений, необходимых для того, чтобы удовлетворялись граничные условия для потенциала, и написать функцию Грина $G(x, x')$.

б) Для заряда q , расположенного в точке $(x', 0, 0)$, найти распределение поверхностной плотности зарядов, индуцируемых на каждой плоскости, и показать, что сумма зарядов, индуцируемых на обеих плоскостях, равна $-q$.

2.4. Рассмотреть задачу об определении потенциала в полупространстве $z \geq 0$ по условиям Дирихле в плоскости $z = 0$ (и по условию в бесконечности).

а) Написать соответствующую функцию Грина $G(x, x')$.

б) Найти интегральное выражение для потенциала в произвольной точке P с цилиндрическими координатами (q, φ, z) , если в плоскости $z = 0$ потенциал Φ равен константе V внутри окружности радиусом a с центром в начале координат и нулю вне этой окружности.

в) Показать, что на оси окружности ($q = 0$) потенциал равен

$$\Phi = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

г) Показать, что на больших расстояниях ($Q^2 + z^2 \gg a^2$) потенциал может быть разложен в степенной ряд по $(Q^2 + z^2)^{-1}$ и что первые члены ряда равны

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{(Q^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3a^2}{4(Q^2 + z^2)} + \frac{5(3Q^2a^2 + a^4)}{8(Q^2 + z^2)^2} + \dots \right].$$

Показать, что результаты п. «в» и «г» согласуются друг с другом в общей области их применимости.

2.5. Изолированная сферическая проводящая оболочка радиусом a помещена в однородное электрическое поле E_0 . Пусть оболочка разрезана на две полусфера плоскостью, перпендикулярной электрическому полю. Найти силу, необходимую для предотвращения разделения полусфер в случае:

- а) когда сфера незаряжена;
- б) когда полный заряд сферы равен Q .

2.6. Большой плоскопараллельный конденсатор состоит из двух плоских проводящих пластин, на внутренней поверхности одной из которых имеется маленький полусферический выступ. Проводник с выступом радиусом a находится под нулевым потенциалом, потенциал второго проводника таков, что вдали от выступа электрическое поле между пластинами равно E_0 .

а) Найти плотность поверхностного заряда в произвольной точке на плоскости и на выступе и построить график изменения плотности в зависимости от расстояния (или от угла).

б) Показать, что полная величина заряда на выступе равна $3E_0a^2/4$.

в) Показать, что если вместо другой проводящей пластины поместить заряд q как раз над выступом на расстоянии d от его центра, то заряд, индуцируемый на выступе, будет равен

$$q' = -q \left[1 - \frac{d^2 - a^2}{d \sqrt{d^2 + a^2}} \right].$$

2.7. Заряженная нить с линейной плотностью заряда τ помещена параллельно оси проводящего цилиндра радиусом b на расстоянии R от оси. Считая потенциал цилиндра нулевым, найти методом изображений:

а) величину и положение зарядов-изображений;

б) потенциал в произвольной точке (в полярных координатах; прямую, соединяющую ось цилиндра с заряженной нитью, принять за ось x), в том числе его асимптотическое представление вдали от цилиндра;

в) плотность индуцированного поверхностного заряда (построить график плотности, отнесеной к $\tau/2\pi b$ для $R/b = 2$ и 4);

г) силу, действующую на заряженную нить.

2.8. а) Найти функцию Грина для двумерной электростатической задачи, если задан потенциал на поверхности цилиндра радиусом b , и показать, что решение внутри цилиндра дается интегралом Пуассона

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(b, \theta') \frac{b^2 - r^2}{b^2 + r^2 - 2br \cos(\theta' - \theta)} d\theta'.$$

б) Длинная проводящая цилиндрическая оболочка радиусом b разделена узким продольным зазором на две половины, находящиеся соответственно под потенциалом V_1 и V_2 . Показать, что потенциал внутри цилиндра равен

$$\Phi(r, \theta) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2br}{b^2 - r^2} \cos \theta \right),$$

где θ отсчитывается от плоскости, перпендикулярной плоскости зазора.

в) Рассчитать распределение поверхностной плотности заряда на обеих половинах цилиндра.

г) Какие изменения следует внести в решение, приведенное в п. «а», если требуется найти потенциал в области пространства, внешней по отношению к цилинду?

2.9. а) Изолированная проводящая сфера находится под потенциалом V . Написать (триivialное) выражение для потенциала электростатического поля во всем пространстве.

б) Применить теорему инверсии, взяв центр инверсии *вне* проводящей сферы. Убедиться *непосредственно*, что полученное решение описывает потенциал заземленной сферы в присутствии точечного заряда $-VR$, где R — радиус инверсии.

в) Каков физический смысл инвертированного решения в случае, когда центр инверсии находится внутри проводящей сферы?

2.10. Зная, что емкость тонкого плоского кругового проводящего диска радиусом a равна $2a/\pi$ и что поверхностная плотность заряда на изолированном диске, находящемся под определенным потенциалом, пропорциональна $(a^2 - r^2)^{-1/2}$, где r — расстояние от центра диска,

а) показать, что методом инверсии можно найти потенциал бесконечной заземленной проводящей плоскости с круглым отверстием, в произвольной точке которого находится точечный заряд;

б) показать, что для случая единичного точечного заряда, расположенного в центре отверстия, индуцированный заряд на плоскости равен

$$\sigma(r, \theta, \phi) = -\frac{a}{\pi^2 r^2 \sqrt{r^2 - a^2}};$$

в) показать, что «а» и «б» являются частными случаями более общей задачи о нахождении потенциала заземленной проводящей сферической чаши в присутствии заряда, расположенного в некоторой точке срезанной ее части, которая также решается методом инверсии потенциала диска.

2.11. Полый куб ограничен проводящими гранями, определяемыми шестью плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a, z = a$. Границы $z = 0$ и $z = a$ находятся под потенциалом V , остальные — под нулевым потенциалом.

а) Найти потенциал $\Phi(x, y, z)$ в произвольной точке внутри куба.

б) Рассчитать численно потенциал в центре куба с точностью до трех значащих цифр. Сколько членов ряда нужно удержать, чтобы получить требуемую точность? Сопоставить полученное численное значение со средним значением потенциала на гранях.

в) Найти распределение поверхностной плотности заряда на грани $z = a$.