

Глава 3

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ. II

В этой главе мы продолжим рассмотрение граничных задач электростатики. Сначала обсудим задачи со сферической и цилиндрической симметриями и представим решение уравнения Лапласа в виде разложений по соответствующим ортонормированным функциям. Мы лишь кратко остановимся на методах решения различных обыкновенных уравнений, получающихся при разделении переменных в уравнении Лапласа, однако дадим достаточно полное описание свойств получающихся функций.

Проблема представления функции Грина в виде разложения в ряд по ортонормированным функциям, естественно, возникает при попытке решить уравнение Пуассона с учетом граничных условий. Ниже будет приведено несколько примеров нахождения разложения функции Грина и его применения в различных задачах. В частности, будет рассмотрен вопрос об эквивалентности различных методов решения задач электростатики.

§ 1. Уравнение Лапласа в сферических координатах

В сферических координатах (фиг. 3.1) уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.1)$$

Представим потенциал в виде произведения, т. е. положим

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi). \quad (3.2)$$

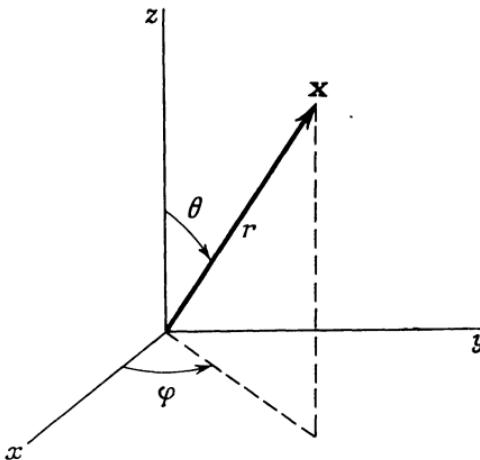
Подставляя (3.2) в (3.1), получаем

$$PQ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{UP}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

или, после умножения на $r^2 \sin^2 \theta / UPQ$,

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0. \quad (3.3)$$

От φ зависит здесь только последнее слагаемое. Очевидно, это слагаемое должно быть постоянным; обозначая постоянную через



Ф и г. 3.1.

$-m^2$, мы придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (3.4)$$

решение которого имеет вид

$$Q = e^{\pm im\varphi}. \quad (3.5)$$

Для того чтобы функция Q была однозначной, величина m должна быть целой. Аналогично можно получить отдельные уравнения для $P(\theta)$ и $U(r)$:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0, \quad (3.7)$$

где $l(l+1)$ — другая действительная постоянная разделения.

Из вида уравнения для радиальной функции ясно, что его решением является простая степенная функция от r (а не ряд по r). Решение имеет вид

$$U = Ar^{l+1} + Br^{-l}, \quad (3.8)$$

где l пока не определено.

§ 2. Уравнение Лежандра и полиномы Лежандра

В уравнении для $P(l)$ обычно переходят от переменной θ к переменной $x = \cos \theta$. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0. \quad (3.9)$$

Это уравнение называется обобщенным уравнением Лежандра, а его решения — присоединенными функциями Лежандра. Прежде чем анализировать уравнение (3.9), найдем решение в виде степенного ряда для обыкновенного дифференциального уравнения Лежандра, соответствующего $m^2 = 0$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1) P = 0. \quad (3.10)$$

Для того чтобы искомое решение имело физический смысл электростатического потенциала, оно должно быть однозначно, конечно и непрерывно в интервале $-1 \leq x \leq 1$. Будем искать решение в виде ряда

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \quad (3.11)$$

где α — пока не определенный параметр. Подставляя это разложение в (3.10), получаем ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{(\alpha+j)(\alpha+j-1) a_j x^{\alpha+j-2} - [(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)] a_j x^{\alpha+j}\} = 0. \quad (3.12)$$

В этом разложении коэффициенты перед всеми степенями x должны в отдельности обращаться в нуль. Для $j = 0$ и $j = 1$ отсюда следует, что:

$$\begin{aligned} &\text{если } a_0 \neq 0, \text{ то } \alpha(\alpha-1) = 0, \\ &\text{если } a_1 \neq 0, \text{ то } \alpha(\alpha+1) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для остальных j получаем соотношение

$$a_{j+2} = \left[\frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} \right] a_j. \quad (3.14)$$

Как легко видеть, оба соотношения (3.13) эквивалентны, и достаточно считать, что лишь один из коэффициентов a_0 и a_1 отличен от нуля. Считая $a_0 = 0$, мы получаем для α два значения: $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Из (3.14) следует, что разложение в ряд содержит только четные степени x (при $\alpha = 0$) или только нечетные степени x (при $\alpha = 1$).

Можно показать, что оба полученных ряда (соответствующие $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$) обладают следующими свойствами:

а) ряд сходится при $x^2 < 1$ при всех значениях l ;

б) ряд расходится при $x = \pm 1$, если только он не обрывается.

Поскольку мы ищем решение, которое конечно при $x = \pm 1$, так же как и при $x^2 < 1$, необходимо потребовать, чтобы ряд обрывался. Так как α и j — целые неотрицательные числа или нуль, то из рекуррентной формулы (3.14) следует, что ряд обрывается лишь в том случае, когда l равно нулю или положительному целому числу. Но и в этом случае лишь один из двух рядов будет конечен при $x = \pm 1$. Если l четно, то конечен ряд для $\alpha = 0$, если l нечетно, то конечен ряд для $\alpha = 1$ ¹⁾. В обоих случаях старший член пропорционален x^l , следующий x^{l-2} и т. д. до x^0 при четном l или до x при нечетном l . Эти многочлены принято нормировать так, чтобы при $x = +1$ они обращались в единицу. Они называются *полиномами Лежандра* $P_l(x)$ порядка l . Приведем несколько первых полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Исходя из формул (3.11) и (3.14), полиномы Лежандра, представляемые в виде разложения по степеням x , можно преобразовать к весьма компактному виду, известному под названием *формулы Родрига*:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \tag{3.16}$$

Эта формула может быть получена и другим, более изящным путем, в частности с помощью l -кратного интегрирования уравнения (3.10).

Полиномы Лежандра образуют полную систему функций, ортогональных на интервале $-1 \leq x \leq 1$. Для доказательства ортого-

¹⁾ Например, при $l = 0$ в ряде для $\alpha = 1$ общее выражение для коэффициентов имеет вид $a_j = a_0/(j+1)$ при $j = 0, 2, 4, \dots$, так что ряд записывается как $a_0(x + 1/3x^3 + 1/5x^5 + \dots)$. Это разложение в степенной ряд функции $Q_0(x) = 1/2 \ln(1+x)/(1-x)$, которая, очевидно, обращается в бесконечность при $x = \pm 1$. Для каждого значения l наряду с ограниченным решением — полиномом Лежандра — можно построить аналогичное решение $Q_l(x)$ с логарифмической расходимостью на концах интервала (см. книгу Магнуса и Оберхеттингера [70]).

нальности можно использовать непосредственно дифференциальное уравнение (3.10). Напишем дифференциальное уравнение для $P_l(x)$, умножим его на $P_{l'}(x)$ и проинтегрируем по интервалу $(-1, +1)$:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(x) \left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right) + l(l+1) P_l(x) \right] dx = 0. \quad (3.17)$$

Интегрируя первый член по частям, находим

$$\int_{-1}^1 \left[(x^2 - 1) \frac{dP_l}{dx} \frac{dP_{l'}}{dx} + l(l+1) P_{l'}(x) P_l(x) \right] dx = 0. \quad (3.18)$$

Вычитая из (3.18) такое же равенство с заменой l на l' , и наоборот, приходим к условию ортогональности

$$[l(l+1) - l'(l'+1)] \int_{-1}^1 P_{l'}(x) P_l(x) dx = 0. \quad (3.19)$$

При $l \neq l'$ входящий в (3.19) интеграл должен быть равен нулю, а при $l = l'$ он будет конечным. Чтобы вычислить значение этого интеграла, нужно воспользоваться явным представлением полиномов Лежандра, например формулой Родрига. При этом интеграл принимает вид

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx.$$

Интегрируя l раз по частям, получаем

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{(-1)^l}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2 - 1)^l dx.$$

В результате $2l$ -кратного дифференцирования величины $(x^2 - 1)^l$ получим константу $(2l)!$, так что

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^l dx. \quad (3.20)$$

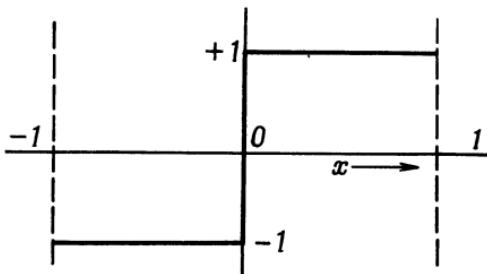
Легко показать, что интеграл в (3.20) равен $2^{2l+1} (l!)^2 / (2l+1)!$; следовательно, условие ортогональности можно записать так:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}, \quad (3.21)$$

а ортонормированные функции (см. гл. 2, § 9) имеют вид

$$U_l(x) = \left(\frac{2l+1}{2} \right)^{1/2} P_l(x). \quad (3.22)$$

Поскольку полиномы Лежандра образуют полную систему ортогональных функций, любая функция $f(x)$ может быть разло-



Ф и г. 3.2.

жена в ряд по полиномам Лежандра на интервале $-1 \leq x \leq 1$. Это разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x), \quad (3.23)$$

где

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_l(x) dx. \quad (3.24)$$

Рассмотрим для примера функцию, изображенную на фиг. 3.2:

$$\begin{aligned} f(x) &= +1 && \text{при } x > 0, \\ f(x) &= -1 && \text{при } x < 0. \end{aligned}$$

В этом случае

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \left[\int_0^1 P_l(x) dx - \int_{-1}^0 P_l(x) dx \right].$$

Поскольку при нечетных l полином $P_l(x)$ нечетен относительно $x=0$, а при четных l четен, отличны от нуля только коэффициенты с нечетным l . Таким образом, для нечетных l имеем

$$A_l = (2l+1) \int_0^1 P_l(x) dx. \quad (3.25)$$

Вычисляя последний интеграл с помощью формулы Родрига, найдем

$$A_l = \left(-\frac{1}{2} \right)^{(l-1)/2} \frac{(2l+1)(l-2)!!}{2 \left(\frac{l+1}{2} \right)!}, \quad (3.26)$$

где $(2n+1)!! \equiv (2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1$. Таким образом, ряд для $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{3}{2} P_1(x) - \frac{7}{8} P_3(x) + \frac{11}{16} P_5(x) - \dots . \quad (3.27)$$

Полиномы Лежандра различного порядка связаны определенными рекуррентными соотношениями, которые оказываются весьма полезными при вычислении интегралов, нахождении полиномов высокого порядка по полиномам низкого порядка и т. п. Из формулы Родрига легко вывести соотношение

$$\frac{dP_{l+1}}{dx} - \frac{dP_{l-1}}{dx} - (2l+1)P_l = 0. \quad (3.28)$$

Комбинируя это соотношение с дифференциальным уравнением (3.10), можно получить целый ряд рекуррентных формул, например:

$$\begin{aligned} (l+1)P_{l+1} - (2l+1)xP_l + lP_{l-1} &= 0, \\ \frac{dP_{l+1}}{dx} - x \frac{dP_l}{dx} - (l+1)P_l &= 0, \\ (x^2 - 1) \frac{dP_l}{dx} - lxP_l + lP_{l-1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Для иллюстрации применения этих рекуррентных соотношений вычислим интеграл

$$I_1 = \int_{-1}^1 xP_l(x)P_{l'}(x)dx. \quad (3.30)$$

Из первой формулы (3.29) найдем выражение для $xP(x)$. Представляя его в (3.30), приведем интеграл к виду

$$I_1 = \frac{1}{2l+1} \int_{-1}^1 P_{l'}(x) [(l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)] dx.$$

Из условия ортогональности (3.21) следует, что интеграл отличен от нуля лишь при $l' = l \pm 1$ и равен при этом

$$\int_{-1}^1 xP_l(x)P_{l'}(x)dx = \begin{cases} \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)} & \text{при } l' = l+1, \\ \frac{2l}{(2l'-1)(2l+1)} & \text{при } l' = l-1. \end{cases} \quad (3.31)$$

Правые части в (3.31) фактически одинаковы, отличаясь лишь заменой l на l' . Аналогично можно показать, что

$$\int_{-1}^1 x^2 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \begin{cases} \frac{2(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} & \text{при } l' = l+2, \\ \frac{2(2l^2+2l-1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} & \text{при } l' = l, \end{cases} \quad (3.32)$$

где предполагается, что $l' \geq l$.

§ 3. Границные задачи с азимутальной симметрией

Из общего вида (3.2) решения уравнения Лапласа в сферических координатах следует, что для задач, обладающих азимутальной симметрией, нужно в (3.5) положить $m = 0$. Поэтому общее решение задачи имеет вид

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta). \quad (3.33)$$

Коэффициенты A_l и B_l определяются из граничных условий. Допустим, что задано значение потенциала $V(\theta)$ на поверхности сферы радиусом a и требуется найти значение потенциала внутри сферы. Если в начале координат нет заряда, то потенциал должен быть конечен в этой точке, так что $B_l = 0$ для всех l . Коэффициенты A_l можно найти, вычисляя значения ряда (3.33) на поверхности сферы:

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta). \quad (3.34)$$

Соотношение (3.34) представляет собой разложение по полиномам Лежандра типа (3.23), так что коэффициенты A_l определяются следующим образом:

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (3.35)$$

Рассмотрим опять пример, обсуждавшийся в гл. 2, § 8, т. е. две полусферы, имеющие потенциал V и $-V$:

$$V(\theta) = \begin{cases} V & \text{при } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \\ -V & \text{при } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi; \end{cases} \quad (3.36)$$

в этом случае коэффициенты будут пропорциональны коэффициентам ряда (3.27). Таким образом, для потенциала внутри сферы

получается выражение

$$\Phi(r, \theta) = V \left[\frac{3}{2} \frac{r}{a} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{r}{a} \right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{r}{a} \right)^5 P_5(\cos \theta) - \dots \right]. \quad (3.37)$$

Чтобы найти потенциал вне сферы, достаточно просто заменить $(r/a)^l$ на $(a/r)^{l+1}$. Легко видеть, что получающееся при этом решение совпадает с выражением (2.33), найденным другим методом.

Потенциал может быть единственным образом представлен в виде ряда (3.33), коэффициенты которого определяются граничными условиями. Эта однозначность позволяет иногда найти значение потенциала во всей области по его значению в какой-либо ее части, например на оси симметрии. На оси симметрии соотношение (3.33) принимает вид (при положительных $z = r$)

$$\Phi(z=r) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]. \quad (3.38)$$

Для отрицательных z каждый член следует умножить на коэффициент $(-1)^l$. Допустим, что мы каким-либо способом можем найти потенциал $\Phi(z)$ для некоторой произвольной точки z на оси симметрии z . Если эта функция может быть разложена в ряд по z вида (3.38) с известными коэффициентами, то решение для произвольной точки пространства находится умножением каждого члена вида r^l или $r^{-(l+1)}$ на $P_l(\cos \theta)$.

Рискуя надоест читателю, вернемся еще раз к задаче о двух полусферах, находящихся под потенциалами, равными по величине и противоположными по знаку. Мы уже получили решение этой задачи двумя способами [см. (2.33) и (3.37)]. Изложенный выше метод дает третий способ решения этой же задачи. Для точек на оси симметрии ранее было получено выражение (2.28) для потенциала

$$\Phi(z=r) = V \left[1 - \frac{r^2 - a^2}{r \sqrt{r^2 + a^2}} \right].$$

Разлагая по степеням a^2/r^2 , получаем

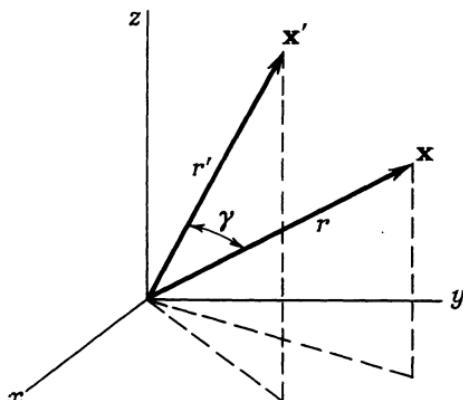
$$\Phi(z=r) = \frac{V}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(2j-1/2) \Gamma(j-1/2)}{j!} \left(\frac{a}{r} \right)^{2j}. \quad (3.39)$$

Сопоставляя это разложение с (3.38), мы видим, что в нем содержатся лишь нечетные значения l ($l = 2j - 1$). Решение, справед-

ливое для всех точек вне сферы, имеет, очевидно, следующий вид:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{V}{V\pi} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(2j-1/2)\Gamma(j-1/2)}{j!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2j} P_{2j-1}(\cos \theta). \quad (3.40)$$

Это выражение, конечно, совпадает с ранее полученными разложениями (2.33) и (3.37).



Ф и г. 3.3.

Важную роль играет разложение потенциала в точке \mathbf{x} , создаваемого единичным точечным зарядом в точке \mathbf{x}' :

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma). \quad (3.41)$$

Здесь $r_{<}$ и $r_{>}$ — соответственно меньшая и большая из величин $|\mathbf{x}|$ и $|\mathbf{x}'|$, а γ — угол между \mathbf{x} и \mathbf{x}' (фиг. 3.3). Чтобы доказать соотношение (3.41), повернем оси координат так, чтобы вектор \mathbf{x}' был расположен вдоль оси z . Тогда потенциал, удовлетворяя уравнению Лапласа, будет обладать азимутальной симметрией, т. е. его всюду, кроме точки $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, можно представить в виде (3.33):

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \gamma). \quad (3.42)$$

Для точек \mathbf{x} на оси z правая часть принимает вид (3.38), тогда как левая часть равна

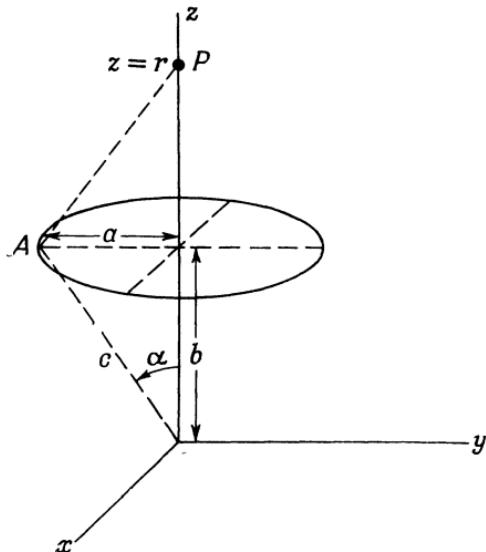
$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \equiv \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{1/2}} \rightarrow \frac{1}{|r-r'|}. \quad (3.43)$$

Разлагая последнее выражение в ряд, получаем

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^l. \quad (3.44)$$

Для точек вне оси достаточно, согласно (3.33) и (3.38), умножить каждое слагаемое в (3.44) на $P_l(\cos \gamma)$. В результате получим требуемое соотношение (3.41).

В качестве второго примера рассмотрим потенциал кругового кольца радиусом a с равномерно распределенным по нему зарядом q .



Фиг. 3.4. Заряженное кольцо радиусом a с полным зарядом q .

Ось кольца совпадает с осью z , а его центр находится в точке $z=b$.

Пусть ось кольца совпадает с осью z , а его центр находится в точке $z = b$ (фиг. 3.4). Потенциал в точке P , находящейся на оси симметрии и имеющей координату $z = r$, равен просто заряду q , деленному на расстояние AP :

$$\Phi(z=r) = \frac{q}{(r^2 + c^2 - 2cr \cos \alpha)^{1/2}}, \quad (3.45)$$

где $c^2 = a^2 + b^2$, а $\alpha = \arctg(a/b)$. Правая часть может быть разложена согласно (3.41). Так, при $r > c$

$$\Phi(z=r) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \alpha), \quad (3.46)$$

а при $r < c$

$$\Phi(z=r) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{c^{l+1}} P_l(\cos \alpha). \quad (3.47)$$

Потенциал в любой точке пространства получается умножением каждого члена этого ряда на $P_l(\cos \theta)$:

$$\Phi(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \alpha). \quad (3.48)$$

Здесь $r_<$ и $r_>$ — соответственно большая и меньшая из величин r и s .

§ 4. Присоединенные функции Лежандра и сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

До сих пор мы рассматривали задачи с азимутальной симметрией, так что решение имело вид (3.33) и содержало лишь обычные полиномы Лежандра. Однако в общем случае может, конечно, иметь место зависимость потенциала от азимута, так что в (3.5) и (3.9) $m \neq 0$. В этом случае нам необходимо получить решение уравнения (3.9) при произвольных l и m , являющееся обобщением функции $P_l(\cos \theta)$. Точно так же, как и для обычных функций Лежандра, можно показать, что, для того чтобы решение было конечным на интервале $-1 \leq x \leq 1$, параметр l должен быть *нулем или положительным целым числом* и что *целое число m может принимать лишь значения $-l, -(l-1), \dots, 0, \dots, l-1, l$* . Обладающее этими свойствами решение называется *присоединенной функцией Лежандра* и обозначается $P_l^m(x)$. Для положительных m справедлива формула¹⁾

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (3.49)$$

Если $P_l(x)$ представить с помощью формулы Родрига, то можно прийти к соотношению

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l, \quad (3.50)$$

справедливому как при положительных, так и при отрицательных m . Функции $P_l^{-m}(x)$ и $P_l^m(x)$ пропорциональны друг другу, поскольку дифференциальное уравнение содержит лишь m^2 , а m — целое число. Можно показать, что

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (3.51)$$

1) Фазу $P_l^m(x)$ мы выбираем так же, как Кондон и Шортли [29]. Явные выражения для $P_l^m(x)$ и рекуррентные формулы см. в книге Магнуса и Оберхеттингера [70].

При фиксированном m функции $P_l^m(x)$ образуют ортогональную систему по индексу l на интервале $-1 \leq x \leq 1$. Условие ортогональности может быть получено тем же методом, что и для полиномов Лежандра, и имеет вид

$$\int_{-1}^1 P_{l'}^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2l+1}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l}. \quad (3.52)$$

Решение уравнения Лапласа представляется как произведение трех множителей, зависящих соответственно от r , θ и ϕ . Удобно объединить вместе угловые множители и построить систему ортонормированных функций на сфере. Мы будем называть эти функции *сферическими гармониками*, хотя так иногда называют общее решение обобщенного уравнения Лежандра (3.9). В более старых руководствах сферические гармоники называют иногда тессеральными функциями. Функции $Q_m(\phi) = e^{im\phi}$ образуют полную систему ортогональных функций по индексу m на интервале $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Точно так же функции $P_l^m(\cos \theta)$ образуют полную ортогональную систему по индексу l для каждого m на интервале $-1 \leq \cos \theta \leq 1$. Поэтому их произведение $P_l^m Q_m$ образует полную ортогональную систему на поверхности единичной сферы по двум индексам l и m . Из условия нормировки (3.52) видно, что нормированные функции, которые мы обозначим через $Y_{lm}(\theta, \phi)$, имеют вид

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (3.53)$$

Из (3.51) следует, что

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi). \quad (3.54)$$

Условие нормировки и ортогональности имеет вид

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (3.55)$$

Условие полноты, эквивалентное (2.41), записывается следующим образом:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (3.56)$$

Ниже приводятся сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \phi)$ для нескольких первых значений l и для $m \geq 0$. Для отрицательных значений m можно воспользоваться соотношением (3.54).

Сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$l=0 \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} ;$$

$$l=1 \quad \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \end{cases}$$

$$l=2 \quad \begin{cases} Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}, \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}, \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right); \end{cases}$$

$$l=3 \quad \begin{cases} Y_{33} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3 \theta e^{3i\varphi}, \\ Y_{32} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{4\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{2i\varphi}, \\ Y_{31} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{21}{4\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{i\varphi}, \\ Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right). \end{cases}$$

Следует отметить, что при $m = 0$

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta). \quad (3.57)$$

Произвольную функцию $g(\theta, \varphi)$ можно разложить в ряд по сферическим гармоникам:

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.58)$$

Коэффициенты ряда равны

$$A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi). \quad (3.58')$$

В § 5 нам понадобится разложение для $\theta = 0$. В соответствии с (3.57) имеем, очевидно:

$$[g(\theta, \varphi)]_{\theta=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} A_{l0}, \quad (3.59)$$

где

$$A_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega P_l(\cos \theta) g(\theta, \varphi). \quad (3.60)$$

Все члены ряда с $m \neq 0$ обращаются в нуль при $\theta = 0$.

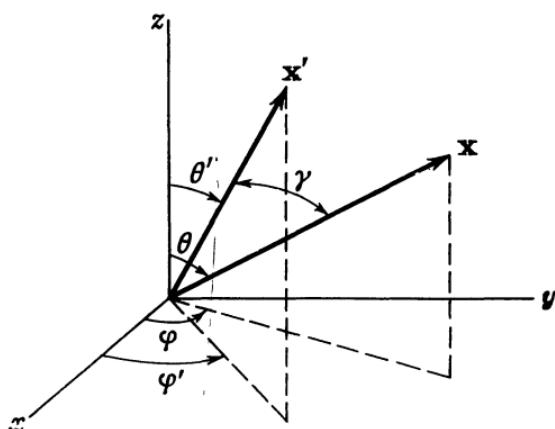
Общее решение граничной задачи в сферических координатах имеет вид суммы произведений сферических гармоник на соответствующие степени r :

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.61)$$

Это выражение является обобщением соотношения (3.33). Если значение потенциала задано на некоторой сферической поверхности, то коэффициенты разложения можно найти, вычисляя значение потенциала (3.61) на поверхности [см. (3.58)].

§ 5. Теорема сложения для сферических гармоник

Весьма интересное и часто используемое математическое свойство сферических гармоник характеризуется так называемой *теоремой*



Ф и г. 3.5.

сложения. Пусть даны две точки x и x' со сферическими координатами соответственно (r, θ, φ) и (r', θ', φ') и пусть γ — угол между радиусами-векторами этих точек (фиг. 3.5). Теорема сложения выражает полином Лежандра l -го порядка, зависящий от угла γ , через

произведения сферических гармоник, зависящих от θ , φ и θ' , φ' :

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.62)$$

Здесь $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi')$. Для доказательства этого соотношения будем считать вектор x' фиксированным в пространстве. Тогда полином $P_l(\cos \gamma)$ будет функцией углов θ , φ , в которую углы θ' , φ' входят как параметры. Следовательно, $P_l(\cos \gamma)$ можно разложить в ряд типа (3.58):

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^{l'} A_{l'm}(\theta', \varphi') Y_{l'm}(\theta, \varphi). \quad (3.63)$$

Сопоставляя это выражение с (3.62), мы видим, что в (3.63) должны входить лишь члены с $l' = l$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если выбрать оси координат так, чтобы вектор x' был направлен вдоль оси z , то угол γ станет обычным полярным углом и $P_l(\cos \gamma)$ будет удовлетворять уравнению

$$\nabla'^2 P_l(\cos \gamma) + \frac{l(l+1)}{r^2} P_l(\cos \gamma) = 0, \quad (3.64)$$

где ∇'^2 — оператор Лапласа в новых осях. Если теперь повернуть оси назад в положение, указанное на фиг. 3.5, то оператор Лапласа не изменится¹⁾, $\nabla'^2 = \nabla^2$, и r тоже останется неизменным. Таким образом, $P_l(\cos \gamma)$ по-прежнему удовлетворяет уравнению типа (3.64), т. е. является сферической гармоникой порядка l . Иными словами, это значит, что $P_l(\cos \gamma)$ представляет собой линейную комбинацию функций Y_{lm} порядка l :

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l A_m(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.65)$$

Коэффициенты $A_m(\theta', \varphi')$ определяются соотношением

$$A_m(\theta', \varphi') = \int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) P_l(\cos \gamma) d\Omega. \quad (3.66)$$

Чтобы определить коэффициент $A_m(\theta', \varphi')$, заметим, что его можно рассматривать, согласно (3.60), как соответствующий $m' = 0$ коэффициент разложения функции $\sqrt{4\pi/(2l+1)} Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$ в ряд по $Y_{lm'}(\gamma, \beta)$, где γ , β — угловые координаты в штрихованной

¹⁾ Инвариантность оператора Лапласа при преобразовании вращения проще всего доказать, исходя из того, что $\nabla^2 \psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi$ представляет собой операторное скалярное произведение, а скалярное произведение инвариантно при преобразовании вращения.

системе, в которой получено уравнение (3.64). Тогда, согласно (3.59), учитывая, что l принимает лишь одно значение, получаем

$$A_m(\theta', \varphi') = \frac{4\pi}{2l+1} \{Y_{lm}^*(\theta(\gamma, \beta), \varphi(\gamma, \beta))\}_{\gamma=0}. \quad (3.67)$$

В пределе $\gamma \rightarrow 0$ углы (θ, φ) , являющиеся функциями (γ, β) , переходят в (θ', φ') , что и доказывает теорему сложения (3.62). Иногда эту теорему записывают не в функциях Y_{lm} , а в функциях $P_l^m(\cos \theta)$. В этом случае она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_l(\cos \gamma) = & P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') + \\ & + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos [m(\varphi - \varphi')]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

В пределе $\gamma \rightarrow 0$ (3.62) дает «правило суммирования» квадратов функций Y_{lm} :

$$\sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}. \quad (3.69)$$

С помощью теоремы сложения можно записать разложение (3.41) потенциала в точке x , обусловленного единичным зарядом в точке x' , в более общем виде. Подставляя в (3.41) выражение (3.62) для $P_l(\cos \gamma)$, получаем

$$\frac{1}{|x-x'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'_<^l}{r'^{l+1}_>} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.70)$$

Соотношение (3.70) представляет потенциал в виде суммы произведений в координатах x и x' . Такое представление удобно, когда приходится, например, интегрировать по плотности зарядов и т. п., т. е. когда одна из переменных является переменной интегрирования, а вторая — координатой точки наблюдения. Правда, это удобство достигается ценой замены простой суммы на двойную.

§ 6. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. Функции Бесселя

В цилиндрических координатах (ρ, φ, z) , показанных на фиг. 3.6, уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.71)$$

Для разделения переменных произведем подстановку

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho) Q(\varphi) Z(z). \quad (3.72)$$

Путем обычных преобразований получаем три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2 Z = 0, \quad (3.73)$$

$$\frac{d^2Q}{d\varphi^2} + \nu^2 Q = 0, \quad (3.74)$$

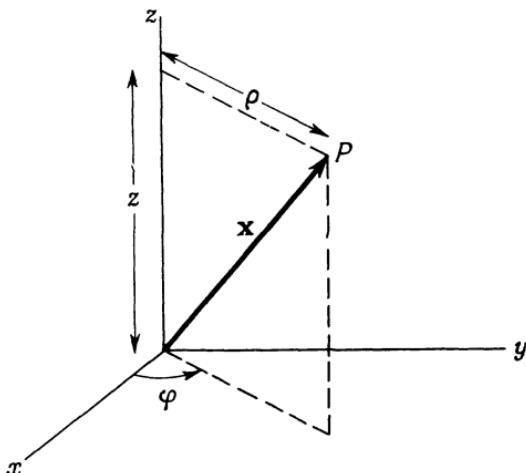
$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (3.75)$$

Первые два уравнения решаются элементарно:

$$Z(z) = e^{\pm kz},$$

$$Q(\varphi) = e^{\pm i\nu\varphi}. \quad (3.76)$$

Для того чтобы потенциал был однозначным, параметр разделения ν должен быть целым. Параметр k , пока не наложены граничные



Ф и г. 3.6.

условия в направлении z , остается произвольным. Мы будем сначала предполагать k действительным.

Радиальное уравнение приводится к стандартной форме заменой переменных $x = k\rho$. Оно принимает при этом вид

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0. \quad (3.77)$$

Это уравнение называется уравнением Бесселя, а его решения — функциями Бесселя порядка ν . Представляя решение в виде сте-

пенного ряда типа

$$R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \quad (3.78)$$

находим, что

$$\alpha = \pm v \quad (3.79)$$

и

$$a_{2j} = -\frac{1}{4j(j+\alpha)} a_{2j-2} \quad (3.80)$$

при $j = 0, 1, 2, \dots$. Коэффициенты при всех нечетных степенях x^j равны нулю. Итерация рекуррентной формулы дает

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha+1)}{2^{2j} j! \Gamma(j+\alpha+1)} a_0. \quad (3.81)$$

Постоянную a_0 обычно принимают равной $a_0 = [2^\alpha \Gamma(\alpha+1)]^{-1}$. При этом два решения уравнения записываются в виде

$$J_v(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}, \quad (3.82)$$

$$J_{-v}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-v} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \quad (3.83)$$

Эти решения называются функциями Бесселя первого рода порядка v и $-v$. Если v не целое число, то функции $J_v(x)$ и $J_{-v}(x)$ образуют пару линейно независимых решений дифференциального уравнения Бесселя второго порядка. Однако при целых v эти решения, как известно, линейно зависимы. Действительно, при $v = m$, как видно из представления функций Бесселя в виде ряда, имеет место соотношение

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x). \quad (3.84)$$

Поэтому при целых v нужно знать еще другое решение, линейно независимое от $J_v(x)$. Даже при нецелых v принято вместо пары функций $J_v(x)$ и $J_{-v}(x)$ рассматривать другую пару, а именно $J_v(x)$ и $N_v(x)$, где $N_v(x)$ — так называемая функция Неймана (функция Бесселя второго рода), определяемая соотношением

$$N_v(x) = \frac{J_v(x) \cos v\pi - J_{-v}(x)}{\sin v\pi}. \quad (3.85)$$

Для нецелых v , очевидно, функция $N_v(x)$ линейно независима от $J_v(x)$. Можно показать, что в пределе, когда v стремится к целому значению, функция $N_v(x)$ остается линейно независимой от

$J_v(x)$. Представления функций $N_v(x)$ в виде ряда можно найти в математических справочниках.

Функциями Бесселя третьего рода, или *функциями Ханкеля*, называются следующие линейные комбинации функций $J_v(x)$ и $N_v(x)$:

$$\begin{aligned} H_v^{(1)}(x) &= J_v(x) + iN_v(x), \\ H_v^{(2)}(x) &= J_v(x) - iN_v(x). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Так же как и пара функций $J_v(x)$ и $N_v(x)$, пара функций Ханкеля образует фундаментальную систему решений уравнения Бесселя.

Все эти функции ($J_v, N_v, H_v^{(1)}, H_v^{(2)}$) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\Omega_{v-1}(x) + \Omega_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} \Omega_v(x), \quad (3.87)$$

$$\Omega_{v-1}(x) - \Omega_{v+1}(x) = 2 \frac{d\Omega_v(x)}{dx}, \quad (3.88)$$

где $\Omega_v(x)$ — любая из цилиндрических функций порядка v . В справедливости этих соотношений легко убедиться, исходя из представления решений в виде ряда (3.82).

Для удобства мы приведем здесь предельные представления бесселевых функций различного рода для малых и больших значений аргумента. Для простоты выпишем лишь первые члены разложения:

При $x \ll 1$

$$J_v(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^v, \quad (3.89)$$

$$N_v(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + 0,5772\dots \right) & \text{при } v=0, \\ -\frac{\Gamma(v)}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^v & \text{при } v \neq 0. \end{cases} \quad (3.90)$$

Здесь v считается действительным и неотрицательным.

При $x \gg 1, v$

$$J_v(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.91)$$

$$N_v(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Переход от области «малых» значений x , описываемых выражениями (3.89) и (3.90), к области больших значений, где справедливы асимптотические формулы, имеет место при $x \sim v$.

Из асимптотического разложения (3.91) видно, что каждая функция Бесселя имеет бесконечное количество корней¹⁾. Нас будут главным образом интересовать корни функции Бесселя $J_v(x)$:

$$J_v(x_{vn}) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (3.92)$$

здесь через x_{vn} обозначен n -й корень функции $J_v(x)$. Ниже приводятся первые три корня для трех значений v :

$$v = 0 \quad x_{0n} = 2,405; \quad 5,520; \quad 8,654\dots;$$

$$v = 1 \quad x_{1n} = 3,832; \quad 7,016; \quad 10,173\dots;$$

$$v = 2 \quad x_{2n} = 5,136; \quad 8,417; \quad 11,620\dots.$$

Для больших n значения корней (по крайней мере до трех значащих цифр) можно находить по довольно точной асимптотической формуле

$$x_{vn} \approx n\pi + \left(v - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}.$$

Значения корней приведены, например, в таблицах Янке и Эмде [54].

После того как мы нашли решение радиального уравнения, выразив его через функции Бесселя, естественно, возникает вопрос о том, в каком смысле можно считать функции Бесселя ортогональной полной системой. Будем рассматривать лишь функции Бесселя первого рода и покажем, что система функций $\sqrt{q} J_v(x_{vn} q/a)$ с фиксированным $v \geq 0$ и $n = 1, 2, \dots$ представляет собой ортогональную систему на интервале $0 < q < a$. Для доказательства рассмотрим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $J_v(x_{vn} q/a)$:

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dq} \left[q \frac{dJ_v(x_{vn} q/a)}{dq} \right] + \left(\frac{x_{vn}^2}{a^2} - \frac{v^2}{q^2} \right) J_v \left(x_{vn} \frac{q}{a} \right) = 0. \quad (3.93)$$

Умножив его на $q J_v(x_{vn} q/a)$ и проинтегрировав от 0 до a , получим

$$\int_0^a J_v \left(x_{vn} \frac{q}{a} \right) \frac{d}{dq} \left[q \frac{dJ_v(x_{vn} q/a)}{dq} \right] dq + \\ + \int_0^a \left(\frac{x_{vn}^2}{a^2} - \frac{v^2}{q^2} \right) q J_v \left(x_{vn} \frac{q}{a} \right) J_v \left(x_{vn} \frac{q}{a} \right) dq = 0.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что произведение $q J_v J'_v$ равно

¹⁾ Имеются в виду функции Бесселя первого и второго родов. Функции Ханкеля корней не имеют, так как их вещественная и мнимая части не обращаются в нуль одновременно.— Прим. ред.

нулю (для $v \geq 0$) при $\varrho = 0$ и $\varrho = a$, получаем

$$-\int_0^a \varrho \frac{dJ_v(x_{vn}\varrho/a)}{d\varrho} \frac{dJ_v(x_{vn}\varrho/a)}{d\varrho} d\varrho + \\ + \int_0^a \left(\frac{x_{vn}^2}{a^2} - \frac{v^2}{\varrho^2} \right) \varrho J_v \left(x_{vn} \frac{\varrho}{a} \right) J_v \left(x_{vn} \frac{\varrho}{a} \right) d\varrho = 0.$$

Написав такое же выражение с заменой n на n' и вычтя его из предыдущего, придем к соотношению ортогональности

$$(x_{vn}^2 - x_{vn'}^2) \int_0^a \varrho J_v \left(x_{vn} \frac{\varrho}{a} \right) J_v \left(x_{vn'} \frac{\varrho}{a} \right) d\varrho = 0. \quad (3.94)$$

С помощью рекуррентных соотношений (3.87) и (3.88) и дифференциального уравнения для функции Бесселя можно показать, что

$$\int_0^a \varrho J_v \left(x_{vn} \frac{\varrho}{a} \right) J_v \left(x_{vn'} \frac{\varrho}{a} \right) d\varrho = \frac{a^2}{2} [J_{v+1}(x_{vn})]^2 \delta_{n'n}. \quad (3.95)$$

Предполагая, что система функций Бесселя является полной, мы можем разложить произвольную функцию от ϱ на интервале $0 \leq \varrho \leq a$ в ряд Фурье — Бесселя

$$f(\varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{vn} J_v \left(x_{vn} \frac{\varrho}{a} \right), \quad (3.96)$$

где

$$A_{vn} = \frac{2}{a^2 J_{v+1}^2(x_{vn})} \int_0^a \varrho f(\varrho) J_v \left(\frac{x_{vn}\varrho}{a} \right) d\varrho. \quad (3.97)$$

При выводе соотношения (3.96) мы предполагали, что $v \geq 0$. Можно, однако, показать, что (3.96) справедливо для всех $v \geq -1$.

Разложение (3.96) и (3.97) — обычное разложение в ряд Фурье — Бесселя, особенно удобное для функций, обращающихся в нуль при $\varrho = a$, т. е. удовлетворяющих однородным условиям Дирихле на цилиндре (см. § 7). Следует, однако, заметить, что возможно также представление в виде ряда иного типа, а именно ряда по функциям $\sqrt{\varrho} J_v(y_{vn}\varrho/a)$, где y_{vn} представляет собой n -й корень уравнения $dJ_v(x)/dx = 0$. Это связано с тем, что при доказательстве ортогональности системы функций требуется, собственно говоря, лишь обращение в нуль величины $\varrho J_v(\lambda\varrho) (d/d\varrho) J_v(\lambda'\varrho)$ в конечных точках $\varrho = 0$ и $\varrho = a$. Это условие удовлетворяется как при

$\lambda = x_{vn}/a$, так и при $\lambda = y_{vn}/a$, где $J_v(x_{vn}) = 0$ и $J'_v(y_{vn}) = 0$. Разложение по функциям $\sqrt{q} J_v(y_{vn} q/a)$ особенно удобно для функций, имеющих нулевую производную при $q = a$ (см. задачу 3.8).

Ряд Фурье — Бесселя — лишь один из типов возможных разложений по функциям Бесселя. В качестве других примеров упомянем ряды Неймана $\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{v+n}(z)$, Каптейна $\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{v+n}[(v+n)z]$ и Шлёмильха $\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_v(nx)$. Детальное описание свойств этих рядов можно найти в книге Ватсона [114] (гл. 16—19). Ряды Каптейна встречаются при исследовании кеплеровского движения планет и излучения быстро движущихся зарядов (см. задачи 14.7 и 14.8).

В заключение рассмотрения свойств функций Бесселя следует заметить, что если бы при разделении переменных в уравнении Лапласа мы положили постоянную разделения в (3.73) равной $-k^2$, то функция $Z(z)$ имела бы вид $\sin kz$ или $\cos kz$, а для $R(q)$ мы получили бы уравнение

$$\frac{d^2R}{dq^2} + \frac{1}{q} \frac{dR}{dq} - \left(k^2 + \frac{v^2}{q^2} \right) R = 0. \quad (3.98)$$

Подстановка $kq = x$ дает

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{v^2}{x^2} \right) R = 0. \quad (3.99)$$

Решения этого уравнения называются *модифицированными функциями Бесселя*. Они, очевидно, представляют собой просто функции Бесселя от чисто мнимого аргумента. Обычно в качестве двух линейно независимых решений выбирают функции $I_v(x)$ и $K_v(x)$, определяемые следующим образом:

$$I_v(x) = i^{-v} J_v(ix), \quad (3.100)$$

$$K_v(x) = \frac{\pi}{2} i^{v+1} H_v^{(1)}(ix). \quad (3.101)$$

Эти функции действительны при действительных значениях аргументов. В пределе для малых и больших значений аргумента справедливы следующие представления (при действительном $v \geq 0$):

При $x \ll 1$

$$I_v(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^v, \quad (3.102)$$

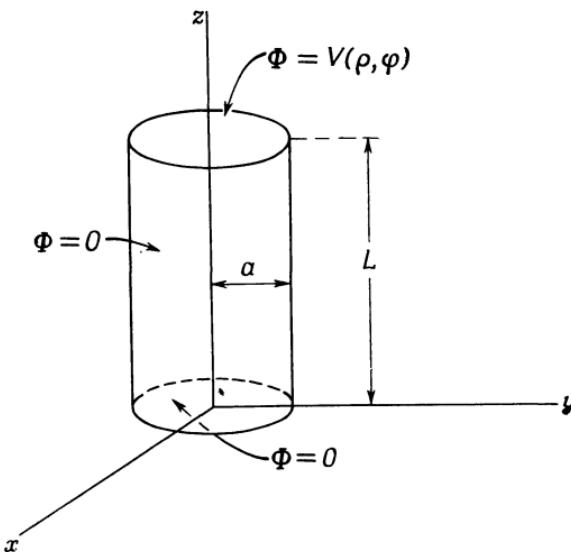
$$K_v(x) \rightarrow \begin{cases} - \left(\ln \frac{x}{2} + 0,5772 \dots \right) & \text{при } v = 0, \\ \frac{|\Gamma(v)|}{2} \left(\frac{2}{x} \right)^v & \text{при } v \neq 0. \end{cases} \quad (3.103)$$

При $x \gg 1$, v

$$\begin{aligned} I_v(x) &\rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right], \\ K_v(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.104)$$

§ 7. Границные задачи в цилиндрических координатах

Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид: $\Phi = R(\rho) Q(\varphi) Z(z)$, где каждый множитель определен в предыдущем параграфе. Перейдем теперь к конкретной граничной



Ф и г. 3.7.

задаче. Пусть рассматриваемая область имеет вид цилиндра радиусом a и высотой L (фиг. 3.7); нижняя и верхняя поверхности цилиндра задаются уравнениями $z = 0$ и $z = L$. Пусть потенциал на боковой и нижней поверхностях цилиндра равен нулю, а на верхней поверхности $\Phi = V(\rho, \varphi)$. Нас интересует потенциал в произвольной точке внутри цилиндра. Из условия однозначности потенциала Φ и его обращения в нуль при $z = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} Q(\varphi) &= A \sin m\varphi + B \cos m\varphi, \\ Z(z) &= \operatorname{sh} kz, \end{aligned} \quad (3.105)$$

где $v = m$ — целое, а k — постоянная, подлежащая определению.

Радиальный множитель имеет вид

$$R(\varrho) = CJ_m(k\varrho) + DN_m(k\varrho). \quad (3.106)$$

Чтобы потенциал был конечным при $\varrho = 0$, коэффициент D должен быть равен нулю. Из условия обращения потенциала в нуль при $\varrho = a$ следует, что k может принимать лишь значения

$$k_{mn} = \frac{x_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.107)$$

где x_{mn} — корни уравнения $J_m(x_{mn}) = 0$.

Учитывая все эти ограничения, мы получаем общее решение в виде

$$\Phi(\varrho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\varrho) \operatorname{sh}(k_{mn}z) [A_{mn} \sin m\varphi + B_{mn} \cos m\varphi] \quad (3.108)$$

При $z = L$ оно должно принимать заданное значение $V(\varrho, \varphi)$, так что

$$V(\varrho, \varphi) = \sum_{m, n} \operatorname{sh}(k_{mn}L) J_m(k_{mn}\varrho) [A_{mn} \sin m\varphi + B_{mn} \cos m\varphi].$$

Мы получили ряд Фурье по φ и ряд Фурье — Бесселя по ϱ . Согласно (2.43) и (3.97), коэффициенты ряда равны

$$A_{mn} = \frac{2 \operatorname{csch}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\varrho \varrho V(\varrho, \varphi) J_m(k_{mn}\varrho) \sin m\varphi, \\ B_{mn} = \frac{2 \operatorname{csch}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\varrho \varrho V(\varrho, \varphi) J_m(k_{mn}\varrho) \cos m\varphi \quad (3.109)$$

с той оговоркой, что для $m = 0$ в ряд входит ${}_2B_{0n}$.

Частный вид разложения (3.108) определяется тем условием, что потенциал обращается в нуль при $z = 0$ для всех ϱ и при $\varrho = a$ для всех z . При других граничных условиях форма ряда будет иной. В задаче 3.6 рассмотрен пример, когда потенциал равен нулю на торцевых поверхностях и принимает заданное значение $V(\varphi, z)$ на боковой поверхности.

Ряды Фурье — Бесселя типа (3.108) пригодны при рассмотрении конечных интервалов изменения ϱ ($0 \leq \varrho \leq a$). Если же $a \rightarrow \infty$, то ряд переходит в интеграл подобно тому, как тригонометрический ряд Фурье переходит в интеграл Фурье. Так, например, если потенциал в области, свободной от зарядов, конечен при $z \geq 0$ и стремит-

ся к нулю при $z \rightarrow \infty$, то общее решение для $z \geq 0$ имеет вид

$$\Phi(\varrho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{-kz} J_m(k\varrho) [A_m(k) \sin m\varphi + B_m(k) \cos m\varphi]. \quad (3.110)$$

Если потенциал должен быть равен $V(\varrho, \varphi)$ на всей плоскости $z = 0$, то коэффициенты определяются из соотношения

$$V(\varrho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk J_m(k\varrho) [A_m(k) \sin m\varphi + B_m(k) \cos m\varphi].$$

Зависимость от φ по-прежнему описывается рядом Фурье. Следовательно, коэффициенты $A_m(k)$ и $B_m(k)$ определяются интегральными соотношениями

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\varrho, \varphi) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} d\varphi = \int_0^{\infty} J_m(k'\varrho) \begin{Bmatrix} A_m(k') \\ B_m(k') \end{Bmatrix} dk'. \quad (3.111)$$

Эти радиальные интегральные уравнения первого рода легко решаются, поскольку они представляют собой *преобразования Ханкеля*. Для обращения уравнений (3.111) удобно использовать интегральное соотношение

$$\int_0^{\infty} x J_m(kx) J_m(k'x) dx = \frac{1}{k} \delta(k' - k). \quad (3.112)$$

Умножая обе части равенства (3.111) на $\varrho J_m(k\varrho)$, интегрируя по ϱ и учитывая (3.112), мы получаем интегральные выражения для коэффициентов на всей плоскости $z = 0$

$$\left. \begin{array}{l} A_m(k) \\ B_m(k) \end{array} \right\} = \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} d\varrho \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi V(\varrho, \varphi) J_m(k\varrho) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi, \\ \cos m\varphi. \end{Bmatrix} \quad (3.113)$$

Как обычно, для $m = 0$ в ряд (3.110) следует подставить ${}^1/{}_2 B_0(k)$.

§ 8. Разложение функций Грина в сферических координатах

Для нахождения потенциала при заданном распределении зарядов и при заданных граничных условиях (т. е. для решения уравнения Пуассона) нужно знать функцию Грина $G(x, x')$, удовлетворяющую соответствующим граничным условиям. Часто эти условия задаются на координатных поверхностях какой-либо системы координат, в которой переменные разделяются, например на сферической или цилиндрической границе. В этом случае удобно представить функцию Грина в виде разложения по функциям, соответст-

вующим рассматриваемой системе координат. Проиллюстрируем сначала характер применяемых разложений на примере сферических координат.

Для случая, когда граничных поверхностей нет (т. е. граница находится «в бесконечности»), мы уже получили раньше разложение функции Грина [см. (3.70)]:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Предположим, нам нужно найти аналогичное выражение для функции Грина, соответствующей «внешней» задаче для сферы радиусом a . Это выражение легко находится, если исходить из выражения (2.22) для функции Грина, получающегося методом изображений. Используя разложение (3.70) для обоих слагаемых в (2.22), получаем

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.114)$$

Чтобы более ясно представить себе структуру разложения (3.114) и убедиться в выполнении граничных условий, выпишем радиальные множители отдельно для $r < r'$ и $r > r'$:

$$\left[\frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] = \begin{cases} \frac{1}{r'^{l+1}} \left[r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right] & \text{при } r < r', \\ \left[r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right] \frac{1}{r'^{l+1}} & \text{при } r > r'. \end{cases} \quad (3.115)$$

Прежде всего мы видим, что при $r = a$ или $r' = a$ радиальный множитель обращается в нуль, как и должно быть. Далее при $r \rightarrow \infty$ или $r' \rightarrow \infty$ радиальный множитель тоже стремится к нулю. Он симметричен относительно r и r' . Как функция от r (при фиксированном r') радиальный множитель представляет собой линейную комбинацию решений r'^l и $r'^{-(l+1)}$ радиальной части (3.7) уравнения Лапласа. Правда, эти линейные комбинации различны при $r < r'$ и при $r > r'$. Причина этого станет нам ясна ниже; она связана с тем, что функция Грина является решением уравнения Пуассона с неоднородностью типа δ -функции.

Теперь, получив общее представление о разложении функции Грина в разделяющихся координатах, перейдем к систематическому нахождению таких разложений из общих соотношений. Функция Грина для задачи о потенциале удовлетворяет уравнению

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.116)$$

и граничным условиям $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ при \mathbf{x} или \mathbf{x}' , лежащих на граничной поверхности S . Для сферической граничной поверхности будем искать разложение типа (3.114). В соответствии с этим воспользуемся представлением δ -функции в виде¹⁾

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta').$$

Используя условие полноты (3.56) для представления угловой части δ -функции, найдем

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.117)$$

Рассматривая функцию Грина как функцию от \mathbf{x} , мы можем представить ее в виде разложения

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(\theta', \varphi') g_l(r, r') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.118)$$

Подставляя разложения (3.117) и (3.118) в уравнение (3.116), найдем

$$A_{lm}(\theta', \varphi') = Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \quad (3.119)$$

и

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r g_l(r, r')] - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r'). \quad (3.120)$$

Мы видим, что радиальные множители в функции Грина удовлетворяют при $r \neq r'$ однородному уравнению (3.7) для радиальных функций. Поэтому мы можем написать

$$g_l(r, r') = \begin{cases} Ar^l + Br^{-(l+1)} & \text{при } r < r', \\ A'r^l + B'r^{-(l+1)} & \text{при } r > r'. \end{cases}$$

Коэффициенты A, B, A', B' являются функциями от r' ; они определяются граничными условиями, требованием, налагаемым соотношением (3.120) с δ -функцией в правой части, и условием симметрии функции $g_l(r, r')$ по r и r' . Пусть граничные поверхности представляют собой концентрические сферы радиусами $r = a$ и $r = b$. Чтобы функция $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ обращалась в нуль для точек \mathbf{x} на этих сferах, функция $g_l(r, r')$ должна быть равна нулю при $r = a$

¹⁾ Чтобы выразить $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(x_1 - x'_1)\delta(x_2 - x'_2)\delta(x_3 - x'_3)$ через координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , связанные с (x_1, x_2, x_3) якобианом $J(x_i, \xi_i)$, заметим, что физический смысл имеет величина $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d^3x$. Отсюда следует, что

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{|J(x_i, \xi_i)|} \delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi_3 - \xi'_3).$$

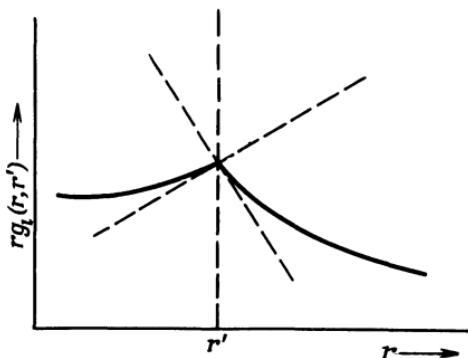
и $r = b$. Таким образом, $g_l(r, r')$ представляется в виде

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A\left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right) & \text{при } r < r', \\ B'\left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}}\right) & \text{при } r > r'. \end{cases} \quad (3.121)$$

Из условия симметрии по r и r' следует, что коэффициенты $A(r')$ и $B'(r')$ должны быть таковы, чтобы функцию $g_l(r, r')$ можно было записать следующим образом:

$$g_l(r, r') = C \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right), \quad (3.122)$$

где $r_{<}$ и $r_{>}$ — соответственно меньшая и большая из величин r и r' . Чтобы найти значение постоянной C , мы должны учесть δ -функцию



Фиг. 3.8. График радиальной функции Грина.
В точке r' наклон кривой претерпевает скачок.

в (3.120). Если обе части (3.120) умножить на r и проинтегрировать по интервалу от $r = r' - \varepsilon$ до $r = r' + \varepsilon$, где ε очень мало, то получим

$$\left\{ \frac{d}{dr} [rg_l(r, r')] \right\}_{r'+\varepsilon} - \left\{ \frac{d}{dr} [rg_l(r, r')] \right\}_{r'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'}. \quad (3.123)$$

Таким образом, наклон кривой $rg_l(r, r')$ претерпевает скачок в точке $r = r'$ (фиг. 3.8).

Если $r = r' + \varepsilon$, то $r_{>} = r$, а $r_{<} = r'$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d}{dr} [rg_l(r, r')] \right\}_{r'+\varepsilon} &= C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}} \right) \right]_{r=r'} = \\ &= -\frac{C}{r'} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично найдем

$$\left\{ \frac{d}{dr} [rg_l(r, r')] \right\}_{r'-\varepsilon} = \frac{C}{r'} \left[l + 1 + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right].$$

Подставляя эти производные в (3.123), получаем

$$C = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]}. \quad (3.124)$$

Соотношения (3.124), (3.122), (3.119) и (3.118) позволяют записать функцию Грина для сферического слоя, ограниченного поверхностями $r = a$ и $r = b$:

$$G(x, x') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \times \\ \times \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right). \quad (3.125)$$

В двух частных случаях, когда $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$ и когда $b \rightarrow \infty$, мы опять приходим к (3.70) или (3.114). Чтобы найти функцию Грина для «внутренней» задачи для сферы радиусом b , достаточно положить $a = 0$ в (3.125). Для простой сферы разложение функции Грина проще всего получить, исходя из решения, полученного методом изображений. Однако общую формулу (3.125) для сферического слоя довольно трудно получить методом изображений, так как в этом случае требуется бесконечная совокупность зарядов-изображений.

§ 9. Нахождение потенциала с помощью разложений для сферических функций Грина

Общее решение уравнения Пуассона при заданных значениях потенциала на границе области (см. гл. 1, § 10) представляется в виде

$$\Phi(x) = \int_V \varrho(x') G(x, x') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(x') \frac{\partial G}{\partial n'} da'. \quad (3.126)$$

Рассмотрим для примера потенциал *внутри* сферы радиусом b . Прежде всего мы установим эквивалентность поверхностного интеграла в (3.126) с выражением, полученным приведенным ранее методом в § 4 [см. (3.61) и (3.58)]. Положив $a = 0$ в (3.125), найдем нормальную производную при $r' = b$

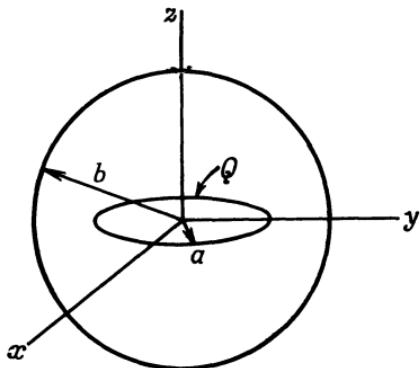
$$\frac{\partial G}{\partial n'} = \frac{\partial G}{\partial r'} \Big|_{r'=b} = -\frac{4\pi}{b^2} \sum_{l,m} \left(\frac{r}{b} \right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.127)$$

Отсюда следует, что решение уравнения Лапласа внутри сферы радиусом $r = b$, на поверхности которой потенциал $\Phi = V(\theta', \varphi')$, представляется, согласно (3.126), в виде

$$\Phi(x) = \sum_{l, m} \left[\int V(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d\Omega' \right] \left(\frac{r}{b} \right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.128)$$

Это решение фактически представляет собой разложение (3.61) с учетом (3.58') для рассматриваемого случая.

Существует еще *третья* форма представления решения для сферы, так называемый интеграл Пуассона (2.25). Эквивалентность



Фиг. 3.9. Заряженное кольцо радиусом a с зарядом Q внутри заземленной проводящей сферы радиусом b .

этого решения и решения, получаемого при использовании разложения функции Грина, следует из того, что оба эти решения вытекают из общего соотношения (3.126) с функцией Грина, найденной методом изображений. Прямое доказательство эквивалентности решений (2.25) и (3.61) предоставляется читателю.

Обратимся теперь к задаче о потенциале заряда, распределенного по объему, т. е. к рассмотрению объемного интеграла в (3.126). Достаточно рассмотреть случай нулевого потенциала на граничной поверхности. Общий случай может быть получен линейной суперпозицией решения уравнения Лапласа с этим частным решением. В качестве первого примера рассмотрим поле заряженного кольца радиусом a с полным зарядом Q , окруженного концентричной ему полой заземленной сферой радиусом b . Пусть заряженное кольцо расположено в плоскости xy , как показано на фиг. 3.9. Плотность заряда кольца можно записать с помощью δ -функций от угла и радиуса:

$$\rho(x') = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r' - a) \delta(\cos \theta'). \quad (3.129)$$

Вследствие азимутальной симметрии в объемном интеграле от функции Грина (3.125) останутся лишь члены с $m = 0$. Полагая

$a = 0$ в (3.125) и учитывая (3.57), найдем

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \int \varrho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' = \\ &= Q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) r_<^l \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos \theta),\end{aligned}\quad (3.130)$$

где $r_<$ и $r_>$ — соответственно меньшая и большая из величин r и a . Учитывая, что $P_{2n+1}(0) = 0$ и

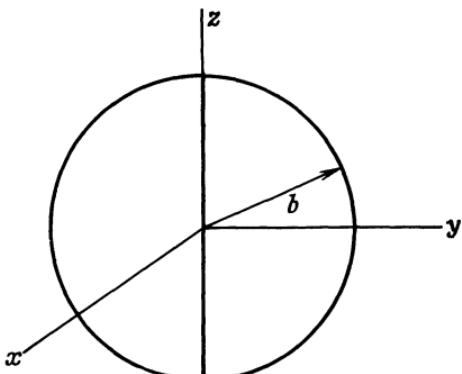
$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!},$$

придем к разложению

$$\Phi(\mathbf{x}) = Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} r_<^{2n} \left(\frac{1}{r_>^{2n+1}} - \frac{r_>^{2n}}{b^{4n+1}} \right) P_{2n}(\cos \theta). \quad (3.131)$$

Легко видеть, что при $b \rightarrow \infty$ выражение (3.130) или (3.131) переходит в потенциал (3.48) кольца в свободном пространстве. Эти выражения можно было бы получить из (3.48) с помощью метода изображений.

В качестве второго примера рассмотрим полую проводящую сферу, по диаметру которой равномерно распределен заряд Q



Фиг. 3.10. Однородно заряженная нить длиной $2b$ с полным зарядом Q внутри заземленной проводящей сферы радиусом b .

Заряженная нить расположена вдоль оси z . Плотность заряда равна $Q/2b$.

(фиг. 3.10). Пусть ось z совпадает с заряженной нитью. Распределение заряда запишется с помощью δ -функций следующим образом:

$$\varrho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{2b} \frac{1}{2\pi r^2} [\delta(\cos \theta' - 1) + \delta(\cos \theta' + 1)]. \quad (3.132)$$

Две δ -функции от $\cos \theta$ соответствуют двум половинам заряженной нити — верхней (над плоскостью xy) и нижней. Множитель $2\pi r^2$ в знаменателе обеспечивает постоянную линейную плотность $Q/2b$.

Подставляя это распределение плотности заряда в (3.126), получаем

$$\Phi(x) = \frac{Q}{2b} \sum_{l=0}^{\infty} [P_l(1) + P_l(-1)] P_l(\cos \theta) \int_0^b r^l \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) dr'. \quad (3.133)$$

Беря интеграл отдельно по интервалам $0 \leq r' < r$ и $r \leq r' \leq b$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^b &= \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) \int_0^r r'^l dr' + r^l \int_r^b \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) dr' = \\ &= \frac{2l+1}{l(l+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^l \right]. \end{aligned} \quad (3.134)$$

При $l = 0$ это выражение становится неопределенным. Раскрывая его по правилу Лопиталя, получаем для $l = 0$

$$\int_0^b = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{(d/dl)[1 - (r/b)^l]}{d(l)/dl} = \lim_{l \rightarrow 0} \left[-\frac{d}{dl} e^{l \ln(r/b)} \right] = \ln \frac{b}{r}. \quad (3.135)$$

В справедливости этого соотношения можно убедиться и непосредственным интегрированием соотношения (3.133) при $l = 0$. Учитывая, что $P_l(-1) = (-1)^l$, мы можем представить потенциал (3.133) в виде

$$\Phi(x) = \frac{Q}{b} \left\{ \ln \frac{b}{r} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4j+1}{2j(2j+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{2j} \right] P_{2j}(\cos \theta) \right\}. \quad (3.136)$$

Член $\ln(b/r)$ показывает, что при $l = 0$ потенциал обращается в бесконечность на оси z . Это видно и из того, что ряд (3.136) также расходится при $\cos \theta = \pm 1$, за исключением крайних точек $r = b$.

Поверхностную плотность заряда на заземленной сфере легко найти из (3.136) дифференцированием:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=b} = -\frac{Q}{4\pi b^2} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4j+1}{2j+1} P_{2j}(\cos \theta) \right]. \quad (3.137)$$

Первое слагаемое определяет полный заряд на сфере, равный $-Q$, поскольку интеграл от остальных слагаемых по поверхности сферы равен нулю.

§ 10. Разложение функций Грина в цилиндрических координатах

Другим полезным примером разложения функции Грина является представление потенциала единичного точечного заряда в цилиндрических координатах. Сначала рассуждения будут проводиться

в достаточно общем виде, чтобы можно было применить полученные соотношения для нахождения функций Грина в различных задачах с цилиндрической граничной поверхностью. Начнем с уравнения для функции Грина

$$\nabla_x^2 G(x, x') = -\frac{4\pi}{q} \delta(q - q') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z'). \quad (3.138)$$

Здесь δ -функция выражена в цилиндрической системе координат. Дельта-функции от φ и z можно выразить через систему ортонормированных функций:

$$\begin{aligned} \delta(z - z') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(z-z')} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z-z')], \\ \delta(\varphi - \varphi') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Разложим аналогичным образом и функцию Грина

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\varphi-\varphi')} \cos[k(z-z')] g_m(q, q'). \quad (3.140)$$

Подставляя эти разложения в (3.138), получаем уравнение для радиальной функции Грина $g_m(q, q')$:

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dq} \left(q \frac{dg_m}{dq} \right) - \left(k^2 + \frac{m^2}{q^2} \right) g_m = -\frac{4\pi}{q} \delta(q - q'). \quad (3.141)$$

При $q \neq q'$ это уравнение совпадает с уравнением (3.98) для модифицированных функций Бесселя $I_m(kq)$ и $K_m(kq)$. Пусть $\psi_1(kq)$ — некоторая линейная комбинация функций I_m и K_m , удовлетворяющая требуемым граничным условиям при $q < q'$, а $\psi_2(kq)$ — другая, линейно независимая комбинация, удовлетворяющая требуемым граничным условиям при $q > q'$. Из условия симметрии функции Грина относительно q и q' следует, что

$$g_m(q, q') = \psi_1(kq_{<}) \psi_2(kq_{>}). \quad (3.142)$$

Нормировка произведения $\psi_1 \psi_2$ определяется скачком производной в точке $q = q'$, обусловленным δ -функцией в (3.141):

$$\frac{dg_m}{dq} \Big|_+ - \frac{dg_m}{dq} \Big|_- = -\frac{4\pi}{q'} \cdot \quad (3.143)$$

Здесь индексы \pm соответствуют $q = q' \pm \varepsilon$. Из (3.142) следует, что

$$\left[\frac{dg_m}{dq} \Big|_+ - \frac{dg_m}{dq} \Big|_- \right] = k (\psi_1 \psi'_2 - \psi_2 \psi'_1) = kW[\psi_1, \psi_2], \quad (3.144)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по аргументу, а $W[\psi_1, \psi_2]$ — определитель Вронского (вронскиан) функций ψ_1 и ψ_2 . Уравнение (3.141) принадлежит к уравнениям Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + g(x) y = 0. \quad (3.145)$$

Как известно, вронскиан двух линейно независимых решений этого уравнения пропорционален $1/p(x)$. Таким образом, условие (3.143) выполняется для всех значений q' , если оно выполнено для какого-либо одного значения. Очевидно, мы должны нормировать функции ψ_1 и ψ_2 так, чтобы вронскиан был равен

$$W[\psi_1(x), \psi_2(x)] = -\frac{4\pi}{x}. \quad (3.146)$$

Если в задаче нет граничных поверхностей, то необходимо потребовать, чтобы функция $g_m(q, q')$ была конечна при $q = 0$ и стремилась к нулю при $q \rightarrow \infty$. Это значит, что $\psi_1(kq) = AI_m(kq)$, а $\psi_2(kq) = K_m(kq)$. Постоянная A должна определяться из условия (3.146) для вронскиана. Поскольку вронскиан пропорционален $1/x$ для всех x , не играет роли, при каком значении x мы будем вычислять. Пользуясь предельными выражениями (3.102) и (3.103) для малых x или же выражениями (3.104) для больших x , найдем, что

$$W[I_m(x), K_m(x)] = -\frac{1}{x}, \quad (3.147)$$

так что $A = 4\pi$. Таким образом, разложение для $1/|x - x'|$ имеет вид

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\varphi - \varphi')} \cos [k(z - z')] I_m(kq_<) K_m(kq_>), \quad (3.148)$$

или, пользуясь только действительными функциями,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x - x'|} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos [k(z - z')] \left\{ \frac{1}{2} I_0(kq_<) K_0(kq_>) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \cos [m(\varphi - \varphi')] I_m(kq_<) K_m(kq_>) \right\}. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Это разложение позволяет получить целый ряд полезных математических соотношений. Если положить $x' = 0$, то останется

лишь член с $m = 0$ и мы придем к интегральному соотношению

$$\frac{1}{(\varrho^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos kz K_0(k\varrho) dk. \quad (3.150)$$

Если в (3.150) заменить ϱ^2 на $R^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi')$, то слева будет стоять обратное расстояние $|x - x'|^{-1}$ для $z' = 0$; оно должно равняться правой части (3.149) при $z' = 0$. Приравнивая правые части соотношений (3.149) и (3.150) и учитывая, что равенство должно выполняться для *всех* значений z , получаем тождество

$$\begin{aligned} K_0[k\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi')}] &= \\ &= I_0(k\varrho_{<}) K_0(k\varrho_{>}) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\varphi - \varphi')] I_m(k\varrho_{<}) K_m(k\varrho_{>}). \end{aligned} \quad (3.151)$$

Из последнего соотношения можно, переходя к пределу $k \rightarrow 0$, получить разложение двумерной функции Грина в полярных координатах

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi')}} &= \\ &= \ln \frac{1}{\varrho_{>}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\varrho_{<}}{\varrho_{>}} \right)^m \cos[m(\varphi - \varphi')]. \end{aligned} \quad (3.152)$$

К этому представлению двумерной функции Грина можно прийти и непосредственно из уравнения Пуассона, применяя тот же метод, которым было получено уравнение (3.148).

§ 11. Разложение функций Грина по собственным функциям

Для функций Грина применяются также разложения другого типа — по собственным функциям соответствующей задачи. Такой подход тесно связан с методами, изложенными в § 8 и 10.

Чтобы определить, что мы понимаем под собственными функциями, рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение вида

$$\nabla^2 \psi(x) + [f(x) + \lambda] \psi(x) = 0. \quad (3.153)$$

Если потребовать, чтобы решение $\psi(x)$ удовлетворяло некоторым граничным условиям на поверхности S интересующего нас объема V , то уравнение (3.153) будет, вообще говоря, иметь регулярные (т. е. конечные и непрерывные) решения лишь при некоторых определенных значениях λ . Эти значения λ , обозначаемые через λ_n ,

называются *собственными*, или *характеристическими*, значениями задачи, а соответствующие им решения $\psi_n(\mathbf{x})$ называются *собственными функциями*¹⁾.

Дифференциальное уравнение для собственных функций имеет вид

$$\nabla^2 \psi_n(\mathbf{x}) + [f(\mathbf{x}) + \lambda_n] \psi_n(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.154)$$

Тем же методом, как и при доказательстве ортогональности функций Лежандра или Бесселя, можно показать, что собственные функции ортогональны:

$$\int_V \psi_m^*(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) d^3x = \delta_{mn} \quad (3.155)$$

(предполагается, что собственные функции нормированы). Спектр собственных значений λ_n может быть дискретным или непрерывным или же содержать как дискретную, так и непрерывную части. Мы будем предполагать, что совокупность всех собственных функций образует полную систему функций.

Найдем теперь функцию Грина для уравнения

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + [f(\mathbf{x}) + \lambda] G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.156)$$

где λ , вообще говоря, не совпадает с собственным значением λ_n уравнения (3.154). Предположим, что функция Грина должна удовлетворять тем же граничным условиям, что и собственные функции уравнения (3.154). Тогда функцию Грина можно представить в виде ряда по собственным функциям:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_n a_n(\mathbf{x}') \psi_n(\mathbf{x}). \quad (3.157)$$

Подстановка этого ряда в дифференциальное уравнение для функции Грина дает

$$\sum_m a_m(\mathbf{x}') (\lambda - \lambda_m) \psi_m(\mathbf{x}) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.158)$$

Если умножить обе части равенства на $\psi_n^*(\mathbf{x})$ и проинтегрировать по объему V , то благодаря условию ортогональности (3.155) левая часть сводится к одному члену и мы получим

$$a_n(\mathbf{x}') = 4\pi \frac{\psi_n^*(\mathbf{x}')}{\lambda_n - \lambda}. \quad (3.159)$$

¹⁾ Читатель, знакомый с квантовой механикой, несомненно, узнает в уравнении (3.153) уравнение Шредингера для частицы в потенциальном поле.

Таким образом, разложение функции Грина имеет вид

$$G(x, x') = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n^*(x') \psi_n(x)}{\lambda_n - \lambda}. \quad (3.160)$$

Для непрерывного спектра сумма заменяется интегралом.

Переходя теперь к частному случаю уравнения Пуассона, положим $f(x) = 0$ и $\lambda = 0$ в (3.156). В качестве первого, по существу тривиального, примера примем, что (3.154) представляет собой волновое уравнение в неограниченном пространстве:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi_k(x) = 0 \quad (3.161)$$

с непрерывным спектром собственных значений k^2 и с собственными функциями вида

$$\psi_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik \cdot x}. \quad (3.162)$$

Эти собственные функции нормированы к δ -функции

$$\int \psi_{k'}^*(x) \psi_k(x) d^3x = \delta(k - k'). \quad (3.163)$$

Согласно (3.160), функция Грина для бесконечного пространства представляется в виде

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \frac{e^{ik \cdot (x - x')}}{k^2}. \quad (3.164)$$

Мы получили просто представление функции $1/|x - x'|$ в виде трехмерного интеграла Фурье.

В качестве второго примера рассмотрим функцию Грина для внутренней задачи Дирихле для прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями $x = y = z = 0$, $x = a$, $y = b$, $z = c$. Разложение мы будем производить по собственным функциям волнового уравнения

$$(\nabla^2 + k_{lmn}^2) \psi_{lmn}(x, y, z) = 0. \quad (3.165)$$

Собственные функции, обращающиеся в нуль на всех границах области, имеют вид

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right), \quad (3.166)$$

а собственные значения равны

$$k_{lmn}^2 = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right). \quad (3.166a)$$

Согласно (3.160), функция Грина представляется разложением

$$G(x, x') = \frac{32}{\pi abc} \times \times \sum_{l, m, n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{l\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{l\pi x'}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \sin \left(\frac{m\pi y'}{b} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{c} \right) \sin \left(\frac{n\pi z'}{c} \right)}{l^2/a^2 + m^2/b^2 + n^2/c^2}. \quad (3.167)$$

Чтобы связать разложение (3.167) с полученными ранее в § 8 и 10, т. е. с разложением (3.125) для сферических координат и разложением (3.148) для цилиндрических координат, напишем аналогичное разложение для прямоугольного параллелепипеда. Если повторить рассуждения § 8 и 10, рассматривая координаты x и y подобно координатам (θ, ϕ) или (ϕ, z) и выделяя особо координату z , то придем к функции Грина:

$$G(x, x') = \frac{16\pi}{ab} \sum_{l, m=1}^{\infty} \sin \left(\frac{l\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{l\pi x'}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \sin \left(\frac{m\pi y'}{b} \right) \times \times \frac{\operatorname{sh}(K_{lm}z_<) \operatorname{sh}[K_{lm}(c-z_>)]}{K_{lm} \operatorname{sh}(K_{lm}c)}, \quad (3.168)$$

где

$$K_{lm} = \pi \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{1/2}.$$

Чтобы выражения (3.167) и (3.168) совпадали, сумма по n в (3.167) должна представлять собой разложение в ряд Фурье на интервале $(0, c)$ одномерной функции Грина от z , входящей в (3.168), т. е. должно выполняться соотношение

$$\frac{\operatorname{sh}(K_{lm}z_<) \operatorname{sh}[K_{lm}(c-z_>)]}{K_{lm} \operatorname{sh}(K_{lm}c)} = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{n\pi z'}{c} \right)}{K_{lm}^2 + (n\pi/c)^2} \sin \left(\frac{n\pi z}{c} \right). \quad (3.169)$$

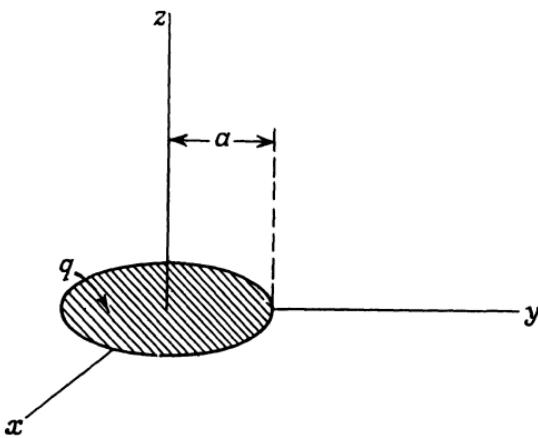
Представляем читателю в качестве упражнения провести доказательство справедливости этого фурье-разложения.

Дальнейшие примеры применения описанного метода приведены в задачах к настоящей главе.

§ 12. Смешанные граничные условия. Заряженный проводящий диск

Рассмотренные до сих пор задачи принадлежали к обычному виду: на всей граничной поверхности выполняются однотипные граничные условия (обычно условие Дирихле). Однако при дока-

зательстве теоремы единственности решения уравнений Лапласа и Пуассона (см. гл. 1, § 9) было показано, что и при *смешанных граничных условиях*, когда на одной части поверхности задан потенциал, а на другой — его нормальная производная, решение также является вполне определенным и единственным. Обычно в учебниках по электростатике, упомянув о возможности смешанных граничных задач при доказательстве теоремы единственности, больше к ним не возвращаются. Это объясняется тем, что,



Ф и г. 3.11.

как мы увидим ниже, задачи со смешанными граничными условиями значительно труднее задач с граничными условиями обычного типа.

Чтобы продемонстрировать трудности решения задач со смешанными граничными условиями, рассмотрим простую на первый взгляд задачу об изолированном бесконечно тонком плоском круглом проводящем диске радиусом a с полным зарядом q на нем (фиг. 3.11). Заряд распределяется по диску так, чтобы его поверхность стала эквипотенциальной. Необходимо найти потенциал во всем пространстве и распределение заряда на диске.

Из геометрии задачи следует, что потенциал должен быть симметричен относительно оси диска и относительно плоскости, в которой расположен диск. Выберем цилиндрическую систему координат с осью z по оси диска и с началом координат в центре диска. Тогда потенциал, согласно (3.110), представится в виде

$$\Phi(\varrho, z) = \int_0^{\infty} dk f(k) e^{-k|z|} J_0(k\varrho). \quad (3.170)$$

Неизвестная функция $f(k)$ должна быть определена из граничных условий при $z = 0$. Если бы потенциал был известен на всей пло-

скости $z = 0$, то функцию $f(k)$ можно было бы найти просто обратным преобразованием Ханкеля, как при переходе от (3.110) к (3.113). К сожалению, граничные условия при $z = 0$ носят более сложный характер. Известно, что при $0 < q \leq a$ потенциал Φ постоянен и равен неизвестной константе: $\Phi = V = q/C$, где C — емкость диска. Значение потенциала при $a < q < \infty$ неизвестно. Но из симметрии задачи ясно, что нормальная производная потенциала здесь равна нулю. Таким образом, граничные условия носят смешанный характер:

$$\begin{aligned} \Phi(q, 0) &= V \quad \text{при } 0 \leq q \leq a, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}(q, 0) &= 0 \quad \text{при } a < q < \infty. \end{aligned} \tag{3.171}$$

Потенциал диска V связан с полным зарядом q . Этую связь можно установить, рассматривая поведение потенциала на больших расстояниях (q или $z \gg a$), где значения потенциала должны быть близки к $q/(q^2 + z^2)^{1/2}$. Из сопоставления представления (3.170) и тождества, приведенного в задаче 3.12, п. «в», следует, что это сводится к требованию

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = q. \tag{3.172}$$

Применяя граничные условия (3.171) к решению, записанному в виде (3.170), получаем два интегральных уравнения первого рода

$$\int_0^\infty dk f(k) J_0(kq) = V \quad \text{при } 0 \leq q \leq a, \tag{3.173}$$

$$\int_0^\infty dk k f(k) J_0(kq) = 0 \quad \text{при } a < q < \infty.$$

Такая система двух интегральных уравнений, одно из которых справедливо на одной части области изменения независимой переменной, а второе — на другой, называется системой *парных интегральных уравнений*. Общая теория парных интегральных уравнений весьма сложна и недостаточно еще развита. Но задача о заряженном диске в различных вариантах уже давно привлекает к себе внимание. Впервые решил эту задачу Вебер в 1873 г. с помощью некоторых разрывных интегралов, содержащих функции Бесселя. Титчмарш [110] для решения несколько более общей системы парных интегральных уравнений применяет преобразование Меллина. Копсон [30] свел задачу о заряженном диске к интегральному

уравнению абелевского типа для распределения поверхностной плотности заряда. Трантер [112] рассматривает несколько более общие уравнения, чем (3.173). Он вводит систематический метод определения наиболее общей формы решения одного из уравнений пары (однородного) и наложения на него дополнительных условий подстановкой во второе уравнение. Можно также пользоваться методикой Винера — Хопфа.

Для наших целей достаточно заметить, что система парных уравнений

$$\int_0^{\infty} dy g(y) J_n(yx) = x^n \quad \text{при } 0 \leq x < 1, \quad (3.174)$$

$$\int_0^{\infty} dy yg(y) J_n(yx) = 0 \quad \text{при } 1 < x < \infty$$

имеет решение

$$g(y) = \frac{2\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)} j_n(y) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} \left(\frac{2}{y}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(y). \quad (3.175)$$

Здесь $j_n(y)$ — сферическая функция Бесселя порядка n (см. гл. 16, § 1). Для системы уравнений (3.173) следует положить $x = \varrho/a$, $y = ka$ и $n = 0$. Таким образом, мы приходим к решению

$$f(k) = \frac{2}{\pi} V a j_0(ka) = \frac{2}{\pi} V a \frac{\sin ka}{ka}. \quad (3.176)$$

Учитывая соотношение (3.172), устанавливающее связь потенциала V с зарядом q , получаем

$$V = \frac{\pi}{2} \frac{q}{a}.$$

Отсюда следует, что емкость диска радиусом a равна

$$C = \frac{2}{\pi} a.$$

Это значение емкости было экспериментально с большой степенью точности установлено Кэвендишем (около 1780 г.) путем сравнения заряда на диске и на сфере при одинаковом потенциале.

Потенциал в произвольной точке пространства находится по (3.170) и (3.176):

$$\Phi(\varrho, z) = q \int_0^{\infty} dk \frac{\sin ka}{ka} e^{-k|z|} J_0(k\varrho). \quad (3.177)$$

Легко вычислить значения потенциала на оси диска и в плоскости диска, положив соответственно $q = 0$ и $z = 0$ в (3.177):

$$\Phi(0, z) = \frac{q}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{z},$$

$$\Phi(q, 0) = \begin{cases} \frac{q}{a} \arcsin \frac{a}{q} & \text{при } q \geq a, \\ \frac{\pi}{2} \frac{q}{a} & \text{при } 0 \leq q \leq a. \end{cases}$$

Для произвольных q и z интеграл может быть преобразован к виду

$$\Phi(q, z) = q \arcsin \left[\frac{2a}{\sqrt{(q-a)^2 + z^2} + \sqrt{(q+a)^2 + z^2}} \right] \quad (3.178)$$

(веберовская форма решения).

Поверхностная плотность распределения заряда на диске определяется соотношением

$$\sigma(q) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(q, 0) = \frac{q}{2\pi a} \int_0^\infty dk \sin ka J_0(kq).$$

Это известный разрывный интеграл, тождественно равный нулю при $q > a$. При $q < a$ плотность заряда равна

$$\sigma(q) = \frac{q}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - q^2}}. \quad (3.179)$$

Интегрируемая особенность в $\sigma(q)$ при $q \rightarrow a$ обусловлена предположением о бесконечно малой толщине диска. Практически заряды вследствие взаимного расталкивания около периферии диска действительно распределяются примерно в соответствии с (3.179), но у самого края диска устанавливается конечное, хотя и большое, значение плотности, зависящее от конкретных особенностей данного диска.

Мы рассмотрели задачу о распределении заряда на диске в цилиндрических координатах, чтобы проиллюстрировать сложность задач со смешанными граничными условиями. В данном частном случае можно избежать смешанных граничных условий, производя разделение переменных в уравнении Лапласа в эллиптических координатах. Диск можно при этом рассматривать как предельную форму сплюснутого эллипсоида вращения (см., например, книги Смайта [100] или Джинса [55]).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Математические методы и специальные функции, применяемые при нахождении потенциала в сферической, цилиндрической, сфероидальной и других системах координат, рассмотрены в книге Морса и Фешбаха [77],

гл. 10. Более элементарное рассмотрение с хорошо подобранными примерами и задачами можно найти в книге Хильдебранда [51], гл. 4, 5 и 8. Несколько старомодным руководством по теории и применению полиномов Лежандра и сферических гармоник является монография Байерли [25], изобилующая примерами и задачами.

Чисто математическое описание свойств сферических функций читатель найдет в весьма полезном однотомном справочнике Магнуса и Оберхеттингера [70]. Более детальное описание математических свойств этих функций дано в книге Ватсона [114] (функции Бесселя), а также в книге [9] (различные специальные функции).

Решение электростатических задач в цилиндрической, сферической и других системах координат подробно описано в книгах Дюрана [37], гл. 11, Джинса [55], гл. 8, Смайта [100], гл. 5, и Стрэттона [106], гл. 3.

Дополнение редактора. Описание свойств цилиндрических и сферических функций можно найти также в монографиях Лебедева [129], Грея и Мэтьюза [126], Гобсона [125] и Гринберга [127] и в общих руководствах по методам математической физики [128, 131]. Применение аппарата специальных функций и метода разделения переменных имеется в книге Гринберга [127] и в работах [128, 131].

ЗАДАЧИ

3.1. Поверхность полой проводящей сферы с внутренним радиусом a разделена на четное число равных сегментов совокупностью плоскостей, проходящих через ось z и равноотстоящих по углу φ . (Сегменты подобны кожуре на дольках яблока или земной поверхности между двумя меридианами.) Любые два соседних сегмента имеют равный по величине, но противоположный по знаку потенциал $\pm V$.

а) Найти представление потенциала внутри сферы в виде ряда в общем случае $2n$ сегментов; определить, какие из коэффициентов ряда отличны от нуля. Для отличных от нуля членов выразить коэффициенты через интегралы по переменной $\cos \theta$.

б) Для частного случая $n = 1$ (две полусферы) найти потенциал вплоть до членов с $l = 3$ (включительно). Преобразованием координат убедиться, что полученное выражение сводится к (3.37) (см. § 3).

3.2. Две концентрические сферы, имеющие радиусы a и b ($b > a$), разделены на полусферах одной и той же горизонтальной плоскостью. Верхняя внутренняя и нижняя наружная полусфера находятся под потенциалом V . Две другие полусфера находятся под нулевым потенциалом.

Выразить потенциал в области $a \leq r \leq b$ в виде ряда по полиномам Лежандра, учитывая члены до $l = 4$. Проверить правильность решения, переходя к предельным случаям $b \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow 0$.

3.3. Заряд равномерно распределен с плотностью $Q/4\pi a^2$ по всей поверхности сферы радиусом a , за исключением сегмента у полюса, ограниченного конусом $\theta = \alpha$.

а) Показать, что потенциал внутри сферической поверхности может быть представлен в виде

$$\Phi = \frac{Q}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta),$$

где $P_{l-1}(\cos \alpha) = -1$ при $l = 0$. Каков потенциал снаружи?

б) Найти величину и направление электрического поля в центре сферы.

в) Рассмотреть предельные значения потенциала и электрического поля в центре сферы в случаях, когда незаряженный и заряженный участки очень малы.

3.4. Тонкий плоский проводящий круглый диск радиусом R расположен в плоскости xy так, что его центр совпадает с началом координат, и находится под потенциалом V . Зная, что плотность заряда на диске с фиксированным потенциалом пропорциональна $(R^2 - Q^2)^{-1/2}$, где Q — расстояние от центра диска,

а) показать, что при $r > R$ потенциал равен

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{2V}{\pi} \frac{R}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r} \right)^{2l} P_{2l}(\cos \theta),$$

б) найти потенциал для $r < R$.

3.5. На внутренней поверхности полой сферы радиусом a задано распределение потенциала $\Phi = V(\theta, \varphi)$. Доказать эквивалентность следующих двух представлений для потенциала внутри сферы:

$$\Phi(x) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \varphi')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega',$$

где $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$, и

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{a} \right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где $A_{lm} = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') V(\theta', \varphi')$.

3.6. Ось полого прямого кругового цилиндра радиусом b совпадает с осью z , а его торцы — с плоскостями $z = 0$ и $z = L$. На торцевых поверхностях потенциал равен нулю, а на цилиндрической поверхности равен $V(\varphi, z)$. С помощью метода разделения переменных найти (в виде ряда) потенциал в произвольной точке внутри цилиндра.

3.7. Пусть в цилиндре, рассмотренном в задаче 3.6, цилиндрическая поверхность состоит из двух равных полуцилиндров, находящихся под потенциалами V и $-V$, так что

$$V(\varphi, z) = \begin{cases} V & \text{при } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ -V & \text{при } \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

а) Найти потенциал внутри цилиндра.

б) Предполагая $L \gg b$, рассмотреть потенциал в плоскости $z = L/2$ как функцию Q и φ . Сравнить его с решением двумерной задачи 2.8.

3.8. Показать, что произвольная функция $f(x)$ может быть представлена на интервале $0 \leq x \leq a$ модифицированным рядом Фурье — Бесселя

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_v \left(y_{vn} \frac{x}{a} \right),$$

где y_{vn} есть n -й корень уравнения $dJ_v(x)/dx = 0$, а коэффициенты A_n равны

$$A_n = \frac{2}{a^2 (1 - v^2/y_{vn}^2) J_v^2(y_{vn})} \int_0^a f(x) x J_v \left(y_{vn} \frac{x}{a} \right) dx.$$

3.9. В бесконечном тонком плоском проводящем листе имеется отверстие радиусом a . Тонкий плоский проводящий диск чуть меньшего радиуса расположен в этой же плоскости, почти закрывая отверстие; он отделен от остальной плоскости очень тонким изолирующим кольцом. Диск находится под потенциалом V , а бесконечный лист — под нулевым потенциалом.

а) Применяя соответствующую систему координат, найти интегральное представление через функции Бесселя для потенциала в произвольной точке над плоскостью.

б) Показать, что потенциал на оси диска на расстоянии z от него равен

$$\Phi_0(z) = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

в) Показать, что потенциал на расстоянии z от плоскости диска над его краем равен

$$\Phi_a(z) = \frac{V}{\pi} [E(k) - (1 - k^2) K(k)],$$

где $k = 2a/(z^2 + 4a^2)^{1/2}$, а $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго родов.

3.10. Решить задачу 3.2 с помощью надлежащей функции Грина, приведенной в тексте, и показать, что полученное решение совпадает с найденным путем непосредственного решения дифференциального уравнения.

3.11. На отрезке прямой, имеющем длину $2d$, распределен заряд Q , причем линейная плотность пропорциональна $d^2 - z^2$, где z — расстояние от середины отрезка. Этот отрезок окружен сферической оболочкой с внутренним радиусом b ($b > d$) с центром в середине отрезка.

а) Найти потенциал всюду внутри сферы в виде разложения по полиномам Лежандра.

б) Рассчитать поверхностную плотность заряда, индуцированного на сфере.

в) Рассмотреть потенциал и поверхностную плотность в предельном случае $d \ll b$.

3.12. а) Показать справедливость соотношения

$$\frac{1}{q} \delta(q - q') = \int_0^\infty k J_m(kq) J_m(kq') dk.$$

б) Доказать, что

$$\frac{1}{|x - x'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dk e^{im(\varphi - \varphi')} J_m(kq) J_m(kq') e^{-k(z_> - z_<)},$$

в) С помощью надлежащего предельного перехода доказать справедливость следующих разложений:

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} = \int_0^\infty e^{-k|\mathbf{z}|} J_0(kQ) dk,$$

$$J_0(k\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos\varphi}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} J_m(kQ) J_m(k\varrho'),$$

$$e^{ik\rho \cos\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\varphi} J_m(kQ).$$

г) Из последних формул вывести интегральное представление для функции Бесселя:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos\varphi - im\varphi} d\varphi.$$

Сравнить его с обычным интегральным представлением.

3.13. Единичный точечный заряд расположен в точке (ϱ', φ', z') внутри заземленного полого цилиндра, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = L$, $\varrho = a$. Показать, что потенциал внутри цилиндра можно представить любым из следующих выражений:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{im(\varphi-\varphi')}}{x_{mn} J_{m+1}^2(x_{mn}) \sinh(x_{mn}L/a)} \times \\ \times \operatorname{sh} \left[\frac{x_{mn}}{a} z_- \right] \operatorname{sh} \left[\frac{x_{mn}}{a} (L - z_+) \right],$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \sin \left(\frac{n\pi z}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi z'}{L} \right) \frac{I_m(n\pi Q_-/L)}{I_m(n\pi a/L)} \times \\ \times \left[I_m \left(\frac{n\pi a}{L} \right) K_m \left(\frac{n\pi Q_-}{L} \right) - K_m \left(\frac{n\pi a}{L} \right) I_m \left(\frac{n\pi Q_-}{L} \right) \right],$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{8}{La^2} \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{im(\varphi-\varphi')}}{[(x_{mn}/a)^2 + (k\pi/L)^2] J_{m+1}^2(x_{mn})} J_m \left(\frac{x_{mn}Q_-}{a} \right) J_m \left(\frac{x_{mn}Q_-}{a} \right).$$

Проанализировать связь последнего разложения (с тройной суммой) с первыми двумя.

3.14. Пусть все границы цилиндра, определенного в предыдущей задаче, находятся под нулевым потенциалом, за исключением находящегося под потенциалом V диска радиусом $q = b$ на верхнем торце.

а) С помощью различных представлений функции Грина, полученных в предыдущей задаче, найти три представления потенциала внутри цилиндра.

б) Для каждого ряда определить численно отношение потенциала в точке $q = 0, z = L/2$ к потенциальному диску, считая $b = L/4 = a/2$. Попытайтесь получить по крайней мере две верные значащие цифры. Однаково ли быстро сходятся все три ряда? Почему? (Таблицы функций $J_0, J_1, I_0, I_1, (2/\pi)K_0$ и $(2/\pi)K_1$ приведены в книге Янке и Эмде [54]. Различные таблицы цилиндрических функций имеются также в книге Ватсона [114].)