

Глава 4

МУЛЬТИПОЛИ. МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕД. ДИЭЛЕКТРИКИ

В этой главе основное внимание уделяется рассмотрению потенциала, обусловленного ограниченным распределением заряда, и дается его представление в виде разложения по мультиполям. В основном разложение проводится по сферическим гармоникам, но для нескольких первых мультиполей обсуждается их представление и в декартовых координатах. Затем вычисляется энергия мультиполя во внешнем электрическом поле. Путем рассмотрения поведения атомов в приложенном внешнем поле в сочетании с подходящей процедурой усреднения выводятся макроскопические уравнения электростатики. Затем описываются свойства диэлектриков, устанавливаются граничные условия для них и решаются некоторые типичные краевые задачи при наличии диэлектриков. На простых классических моделях иллюстрируются основные свойства диэлектриков: поляризуемость и диэлектрическая восприимчивость. В заключение рассматривается вопрос об электростатической энергии при наличии диэлектриков.

§ 1. Разложение по мультиполям

Ограниченнное распределение заряда описывается плотностью заряда $q(x')$, отличной от нуля лишь внутри сферы радиусом R с центром в начале отсчета¹⁾.

Потенциал вне сферы можно представить в виде разложения по сферическим гармоникам:

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}, \quad (4.1)$$

¹⁾ Введение сферы радиусом R —произвольная вспомогательная операция, позволяющая разделить пространство на две области: с зарядами и без них.

где вид постоянных коэффициентов выбран из соображения удобства при дальнейшем рассмотрении. Выражение (4.1) называют обычно разложением по мультиполям; член, соответствующий $l = 0$, называется монополем, член с $l = 1$ — дипольным моментом и т. д. Смысл этих терминов станет ясным из дальнейшего. Задача состоит в том, чтобы выразить постоянные q_{lm} через функцию распределения плотности заряда $\varrho(\mathbf{x}')$. Искомое решение легко получается с помощью интегрального представления (1.17) для потенциала

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

и разложения (3.70) для $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Так как в данном случае нас интересует потенциал вне области, занятой распределением заряда, то следует положить $r_< = r'$ и $r_> = r$. При этом получаем

$$\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left[\int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \varrho(\mathbf{x}') d^3x' \right] \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}. \quad (4.2)$$

Таким образом, коэффициенты в (4.1) оказываются равными

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \varrho(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (4.3)$$

Эти коэффициенты называют *мультипольными моментами*. Для их физического истолкования выпишем в явном виде выражения нескольких первых моментов в декартовых координатах:

$$q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \int \varrho(\mathbf{x}') d^3x' = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} q, \quad (4.4)$$

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int (x' - iy') \varrho(\mathbf{x}') d^3x' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y), \quad (4.5)$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int z' \varrho(\mathbf{x}') d^3x' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z,$$

$$q_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int (x' - iy')^2 \varrho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}),$$

$$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int z' (x' - iy') \varrho(\mathbf{x}') d^3x' = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23}), \quad (4.6)$$

$$q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int (3z'^2 - r'^2) \varrho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}.$$

Здесь выписаны моменты лишь для $m \geq 0$, так как согласно (3.54) при действительной плотности заряда моменты с $m < 0$ можно найти из соотношений

$$q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^*. \quad (4.7)$$

В выражениях (4.4)–(4.6) скаляр q определяет полный заряд, или момент нулевого порядка (монополь), вектор \mathbf{p} есть электрический дипольный момент:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}' q(\mathbf{x}') d^3x', \quad (4.8)$$

а Q_{ij} — составляющие тензора квадрупольного момента:

$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) q(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (4.9)$$

Мы видим, что l -е мультипольные коэффициенты (число которых равно $2l + 1$) представляются линейной комбинацией декартовых составляющих соответствующих мультиполей. Предоставляем читателю в качестве упражнения провести вывод разложения для потенциала $\Phi(\mathbf{x})$ в декартовых координатах:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots, \quad (4.10)$$

которое можно получить непосредственно из разложения $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ в ряд Тейлора. Получение членов разложения (4.10) выше квадрупольного оказывается гораздо более сложной задачей.

Составляющие вектора напряженности электрического поля, обусловленного данным мультиполем, легче всего выразить в сферических координатах. Взятый со знаком минус градиент члена суммы (4.1), соответствующего фиксированным l и m , имеет следующие составляющие в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{4\pi(l+1)}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+2}}, \\ E_\theta &= -\frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ E_\varphi &= -\frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Функции $\partial Y_{lm}/\partial \theta$ и $Y_{lm}/\sin \theta$ можно представить как линейные комбинации других функций Y_{lm} , однако соответствующие выражения не обладают достаточной наглядностью, и поэтому мы их не будем приводить. Векторное мультипольное поле лучше всего представлять с помощью *векторных* сферических гармоник, как это рассмотрено в гл. 16.

Для диполя \mathbf{p} , ориентированного вдоль оси z , составляющие поля (4.11) принимают простой вид:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2p \cos \theta}{r^3}, \\ E_\theta &= \frac{p \sin \theta}{r^3}, \\ E_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Это поле можно записать в векторной форме, либо исходя из выражений (4.12), либо непосредственно вычисляя градиент от дипольного члена разложения в (4.10). Поле в точке \mathbf{x} , обусловленное диполем \mathbf{p} , расположенным в точке \mathbf{x}' , оказывается равным

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{p}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad (4.13)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный из точки \mathbf{x}' в точку \mathbf{x} .

§ 2. Разложение по мультиполям энергии распределения зарядов во внешнем поле

Если ограниченное распределение заряда с плотностью $\varrho(\mathbf{x})$ находится во *внешнем* поле с потенциалом $\Phi(\mathbf{x})$, то электростатическая энергия системы равна

$$W = \int \varrho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3x. \quad (4.14)$$

При медленном изменении потенциала Φ в области, где плотность $\varrho(\mathbf{x})$ отлична от нуля, его можно представить в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности некоторого соответствующим образом выбранного начала отсчета:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) + \mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} \Phi(0) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \dots . \quad (4.15)$$

Воспользовавшись определением напряженности электрического поля $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$, два последних члена можно переписать в иной форме. При этом (4.15) примет вид

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots .$$

Так как $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ для внешнего поля, то можно вычесть из последнего слагаемого величину

$$\frac{1}{6} r^2 \operatorname{div} \mathbf{E}(0),$$

в результате чего получим разложение

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots . \quad (4.16)$$

Подставляя полученное разложение в (4.14) и используя определения полного заряда, дипольного момента (4.8) и квадрупольного момента (4.9), можно представить выражение для энергии в виде

$$W = q\Phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots . \quad (4.17)$$

Из этого разложения ясен характер взаимодействия различных мультиполей с внешним полем: энергия заряда определяется потенциалом, диполя — электрическим полем, квадруполя — градиентом поля и т. д.

В ядерной физике особый интерес представляет квадрупольное взаимодействие. Атомные ядра могут обладать электрическим квадрупольным моментом, причем величина и знак момента связаны с силами взаимодействия нейтронов и протонов и формой самого ядра. Энергетические уровни, или состояния, ядер описываются квантовыми числами полного момента количества движения J , его составляющей M вдоль оси z и другими величинами, которые мы обозначим общим индексом α . Данному состоянию ядра соответствует квантовомеханическая плотность заряда ¹⁾ $Q_{JM\alpha}(\mathbf{x})$, зависящая от квантовых чисел (J, M, α) и обладающая цилиндрической симметрией относительно оси z . Таким образом, единственным отличным от нуля квадрупольным моментом является q_{20} в (4.6) или Q_{33} в (4.9) ²⁾. Квадрупольный момент ядерного состояния определяется величиной ($1/e$) Q_{33} (e — заряд протона), вычисленной для плотности заряда $Q_{JM\alpha}(\mathbf{x})$:

$$Q_{JM\alpha} = \frac{1}{e} \int (3z^2 - r^2) Q_{JM\alpha}(\mathbf{x}) d^3x. \quad (4.18)$$

Величина $Q_{JM\alpha}$ имеет, следовательно, размерность квадрата длины.

Если не рассматривать каких-либо особых исключительных случаев (например, ядра в атомах с полностью заполненными электронными оболочками), то ядра оказываются подверженными действию внутренних полей, градиент которых в окрестности ядра отличен от нуля. Следовательно, согласно (4.17), квадрупольное взаимодействие дает вклад в энергию ядра. Состояния, характеризуемые различными значениями M при одинаковом J , имеют разные квадрупольные моменты $Q_{JM\alpha}$, и, следовательно, вырождение по M , если оно имело место, снимается из-за квадрупольной связи с «внешним» электрическим полем (молекулярным или полем кристаллической решетки). Обнаружение этих малых различий в уровнях энергии, проводимое радиотехническими методами, позволяет определить квадрупольные моменты ядер ³⁾.

Энергию взаимодействия двух диполей \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 можно определить непосредственно из (4.17), используя выражение для поля

¹⁾ Элементарное рассмотрение квантовых аспектов проблемы можно найти в книге Блатта и Вайскопфа [13].

²⁾ В действительности моменты Q_{11} и Q_{22} отличны от нуля, но зависят от Q_{33} и определяются соотношениями $Q_{11} = Q_{22} = -1/2Q_{33}$.

³⁾ «Квадрупольным моментом ядра», обозначаемым Q , принято называть величину $Q_{JM\alpha}$ в состоянии $M = J$; см. Блатт и Вайскопф [13].

диполя (4.13). Взаимная потенциальная энергия оказывается равной

$$W_{12} = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}, \quad (4.19)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении ($\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$). В зависимости от взаимной ориентации диполей они могут притягиваться или отталкиваться.

При заданных ориентации диполей и расстояниях между ними величина энергии взаимодействия, усредненная по всем относительным положениям диполей, равна нулю. Если моменты параллельны друг другу и ориентированы примерно параллельно линии, соединяющей их центры, то диполи притягиваются, если же они ориентированы приблизительно перпендикулярно соединяющей их линии, то диполи отталкиваются. Для антипараллельных моментов имеет место обратное соотношение. По абсолютной величине экстремальные значения потенциальной энергии равны между собой.

§ 3. Макроскопическая электростатика. Эффекты совокупного действия атомов

Все многообразие электростатических явлений можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{e} &= 4\pi Q', \\ \operatorname{rot} \mathbf{e} &= 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где «микроскопическое» электростатическое поле \mathbf{e} обусловлено полной «микроскопической» плотностью заряда Q' . При небольшом числе идеализированных точечных зарядов, расположенных вблизи математически определенных граничных поверхностей, вполне достаточно уравнений (4.20). Однако в очень многих физических задачах полностью невозможно задать распределения отдельных индивидуальных зарядов. Любая задача о полях в присутствии материальной среды относится к указанному классу. В макроскопических объемах вещества содержится порядка $10^{23 \pm 3}$ зарядов, причем каждый из них в большей или меньшей степени подвижен вследствие теплового возбуждения или нулевых колебаний.

Не касаясь пока вопроса о правомерности применения электростатики для описания явлений, в которых заряды находятся в непрерывном движении, обратимся к задаче исследования макроскопических проблем, когда число атомов или молекул велико. Очевидно, интегральное представление электрического поля в виде

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} Q'(\mathbf{x}') d^3x' \quad (4.21)$$

мало пригодно, так как: а) оно содержит плотность распределения зарядов $q'(x')$, для определения которой нужно знать точное положение огромного числа зарядов, и б) это выражение весьма сильно флюктуирует при перемещении точки наблюдения даже на очень малые расстояния (порядка размеров атома). Но, к счастью, в макроскопической электростатике нам не нужна такая подробная информация, которая содержится в (4.21). Вполне достаточно знать среднюю напряженность электрического поля по областям с размерами порядка 10^{-6} см^3 (т. е. с линейными размерами порядка 10^{-2} см) или даже больше. Так как объем атома по порядку величины равен 10^{-24} см^3 , то в указанном макроскопическом объеме содержится порядка 10^{18} или более атомов. Это означает, что микроскопические флюктуации полностью усредняются. Таким образом, следует иметь дело со средними значениями $\epsilon(x)$ и $q'(x)$. Усреднение проводится по макроскопически малому объему ΔV , содержащему, однако, очень много атомов или молекул:

$$\begin{aligned}\langle \epsilon(x) \rangle &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \epsilon(x + \xi) d^3 \xi, \\ \langle q'(x) \rangle &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} q'(x + \xi) d^3 \xi.\end{aligned}\quad (4.22)$$

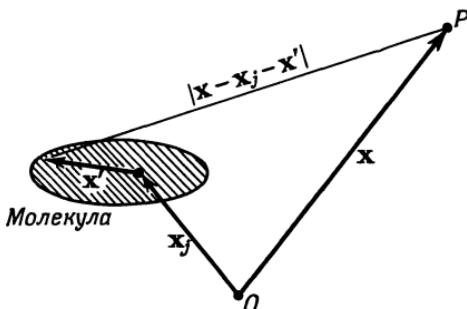
Усреднение мы обозначаем ломанными скобками; переменная ξ изменяется в пределах объема ΔV .

Применение усреднения позволяет ответить на вопрос о законности рассмотрения статического решения при наличии теплового движения в материальной среде. В любой момент времени в объеме ΔV находится очень большое число зарядов во всех возможных состояниях движения. Усреднение по этим состояниям в рассматриваемый момент даст такой же результат, как и усреднение в какой-либо более поздний момент времени. Следовательно, по отношению к усредненным величинам вполне законно говорить о статических полях и зарядах¹⁾. Более того, при усреднении можно считать распределение атомных зарядов фиксированным в пространстве (т. е. не меняющимся во времени) и совпадающим с реальным распределением в какой-то произвольный момент времени. Поэтому при вычислениях можно рассматривать задачу как электростатическую даже на микроскопическом уровне.

В макроскопической электростатике удобно разбить усредненную плотность заряда $\langle q'(x) \rangle$ на две части, одна из которых — средний заряд атомных или молекулярных ионов, т. е. избыток

¹⁾ Такое рассмотрение не учитывает весьма малые (при комнатной температуре) поля индукции и поля излучения, обусловленные ускорением зарядов при их тепловом движении.

свободных зарядов, расположенных внутри или на поверхности макроскопического тела, а вторая — наведенный, или связанный заряд. В отсутствие внешних полей электрические моменты атомов или молекул могут быть как равными, так и не равными нулю, но даже если моменты отличны от нуля, они ориентированы совершенно хаотически. При наличии поля атомы поляризуются (или их постоянные моменты стремятся ориентироваться по полю)



Фиг. 4.1. К расчету потенциала, создаваемого в точке наблюдения P с радиусом-вектором x молекулой с центром масс в точке x_j .

Локальная координата x' отсчитывается от центра масс.

и появляется средний дипольный момент. Эти дипольные моменты могут вносить вклад в усредненную плотность заряда $\langle q'(x) \rangle$. Поскольку наводимые дипольные моменты обычно пропорциональны приложенному полю, то, как мы увидим ниже, макроскопический аналог уравнений (4.20) должен содержать лишь одну постоянную, характеризующую среднюю поляризуемость исследуемой среды.

Чтобы понять, как появляется зависимость от наведенных дипольных моментов, рассмотрим сначала микроскопическое поле в точке наблюдения x , создаваемое одной молекулой с центром масс в точке x_j (фиг. 4.1). Пусть плотность заряда молекулы равна $q'_j(x')$, где x' отсчитывается от центра масс молекулы. Следует заметить, что q'_j в общем случае зависит от положения молекулы x_j , так как искажение распределения заряда в молекуле определяется локальным полем. Микроскопическое электрическое поле молекулы с номером j имеет вид

$$\mathbf{e}_j(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \int_{\text{мол}} q'_j(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j - \mathbf{x}'|} d^3 x'. \quad (4.23)$$

Для точек наблюдения, лежащих вне молекулы, можно использовать разложение по мультиполям в окрестности центра масс

молекулы. При этом, согласно (4.10), получим

$$\mathbf{e}_j(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \left[\frac{e_j}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} + \mathbf{p}_j \cdot \operatorname{grad}_j \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} \right) + \dots \right], \quad (4.24)$$

где

$$\begin{aligned} e_j &= \int_{\text{мол}} \rho'_j(\mathbf{x}') d^3x', \\ \mathbf{p}_j &= \int_{\text{мол}} \mathbf{x}' \rho'_j(\mathbf{x}') d^3x' \end{aligned} \quad (4.25)$$

— соответственно полный заряд и дипольный момент молекулы. В разложении (4.10) можно было бы удержать и квадрупольный момент, но так как макроскопические изменения поля происходят на расстояниях, больших по сравнению с молекулярными размерами, относительный вклад этого момента в среднее поле пренебрежимо мал по сравнению с дипольным членом. Величины e_j и \mathbf{p}_j являются функциями положения молекулы.

Микроскопическое поле всех молекул определяется суммированием по j :

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \sum_j \left[\frac{e_j}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} + \mathbf{p}_j \cdot \operatorname{grad}_j \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} \right) \right]. \quad (4.26)$$

Для получения макроскопического поля следует произвести усреднение согласно (4.22). Чтобы облегчить процедуру усреднения, заменим дискретную сумму по молекулам интегралом, введя распределение плотности заряда и поляризации:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{мол}}(\mathbf{x}) &= \sum_j e_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \\ \pi_{\text{мол}}(\mathbf{x}) &= \sum_j \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Выражение (4.26) при этом можно формально переписать в виде

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \int d^3x'' \left[\frac{\rho_{\text{мол}}(\mathbf{x}'')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|} + \pi_{\text{мол}}(\mathbf{x}'') \cdot \operatorname{grad}'' \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|} \right) \right]. \quad (4.28)$$

Проиллюстрируем процесс усреднения на первом слагаемом в (4.28). Усредненное значение, согласно (4.22), равно

$$\langle \mathbf{e}_1(\mathbf{x}) \rangle = -\operatorname{grad} \left[\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \int d^3x'' \frac{\rho_{\text{мол}}(\mathbf{x}'')}{|\mathbf{x}+\xi-\mathbf{x}''|} \right], \quad (4.29)$$

где учтено, что порядок операций дифференцирования и усреднения может быть изменен. Заменим переменную интегрирования

\mathbf{x}'' на $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' + \xi$:

$$\langle \mathbf{e}_1(\mathbf{x}) \rangle = -\operatorname{grad} \left[\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \int d^3x' \frac{Q_{\text{мол}}(\mathbf{x}' + \xi)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]. \quad (4.30)$$

Сопоставление выражений (4.29) и (4.30) показывает очевидную эквивалентность усреднения путем перемещения точки наблюдения в объеме ΔV с центром в точке \mathbf{x} и усреднения путем перемещения точки интегрирования в объеме ΔV с центром в \mathbf{x}' . Как ясно из определения (4.27), интеграл от $Q_{\text{мол}}$ по объему ΔV в окрестности \mathbf{x}' сводится к сумме зарядов e_j всех молекул в объеме ΔV :

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi Q_{\text{мол}}(\mathbf{x}' + \xi) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} e_j.$$

Пусть макроскопическая плотность распределения молекул (число молекул в единице объема) в точке \mathbf{x}' равна $N(\mathbf{x}')$, а $\langle e_{\text{мол}}(\mathbf{x}') \rangle$ — средний заряд молекулы в объеме ΔV в точке \mathbf{x}' ; тогда

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi Q_{\text{мол}}(\mathbf{x}' + \xi) = N(\mathbf{x}') \langle e_{\text{мол}}(\mathbf{x}') \rangle. \quad (4.31)$$

В результате выражение (4.30) принимает вид

$$\langle \mathbf{e}_1(\mathbf{x}) \rangle = -\operatorname{grad} \int \frac{N(\mathbf{x}') \langle e_{\text{мол}}(\mathbf{x}') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'.$$

Совершенно аналогично можно исследовать второе слагаемое в (4.28). Пользуясь тем же определением усреднения, получаем

$$\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3\xi \pi_{\text{мол}}(\mathbf{x}' + \xi) = N(\mathbf{x}') \langle p_{\text{мол}}(\mathbf{x}') \rangle. \quad (4.32)$$

Усредненное поле (4.28) определяется, таким образом, формулой

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}(\mathbf{x}) \rangle &= -\operatorname{grad} \int N(\mathbf{x}') \left\{ \frac{\langle e_{\text{мол}}(\mathbf{x}') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \right. \\ &\quad \left. + \langle p_{\text{мол}}(\mathbf{x}') \rangle \cdot \operatorname{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right\} d^3x'. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Для получения макроскопического эквивалента первого из уравнений (4.20) вычислим дивергенцию от обеих частей выражения (4.33).

Учитывая равенство

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

находим

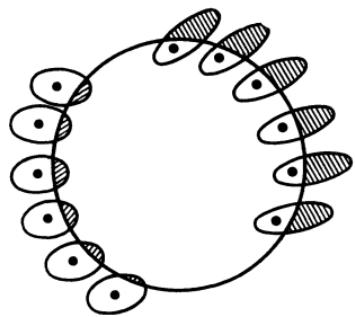
$$\begin{aligned} \operatorname{div} \langle \mathbf{e}(\mathbf{x}) \rangle &= 4\pi \int N(\mathbf{x}') \{ \langle e_{\text{мол}}(\mathbf{x}') \rangle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \\ &\quad + \langle p_{\text{мол}}(\mathbf{x}') \rangle \cdot \operatorname{grad}' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} d^3x'. \end{aligned}$$

Используя свойства δ -функции (см. гл. 1, § 2), получаем

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{e}(\mathbf{x}) \rangle = 4\pi N(\mathbf{x}) \langle e_{\text{мол}}(\mathbf{x}) \rangle - 4\pi \operatorname{div} [N(\mathbf{x}) \langle \mathbf{p}_{\text{мол}}(\mathbf{x}) \rangle]. \quad (4.34)$$

Такой вид принимает первое из уравнений (4.20). Плотность заряда q' , входящая в (4.20), заменена здесь двумя слагаемыми: первое — средний заряд молекул в единице объема, второе — связанный заряд в единице объема. Появление дивергенции плотности поляризации представляется весьма естественным, если вспомнить, как возникает эта часть плотности заряда.

Рассмотрим малый объем в среде. Часть полного заряда внутри объема обусловлена свободными зарядами молекул. Кроме этого,



Фиг. 4.2. К объяснению возникновения связанного заряда.

Из-за пространственного изменения поляризации может оказаться, что молекулярный заряд, вышедший из данного малого объема, больше заряда, вошедшего в объем.

определенный вклад в полный заряд может быть обусловлен поляризацией молекулы во внешнем поле. Так, например, для молекул, у которых область, занятая зарядом, раньше находилась полностью внутри объема, часть заряда может выйти за пределы рассматриваемого объема. Если поляризация однородна в пределах нашего малого объема, то за счет поляризации в рассматриваемый объем через его поверхность вводится такой же заряд, как и выводится из него, и суммарное изменение заряда за счет поляризации равно нулю. Если же поляризация объема неоднородна, то может произойти увеличение или уменьшение заряда в объеме, как схематически показано на фиг. 4.2. Такова физическая причина возникновения связанного заряда.

В уравнении (4.34) можно объединить члены с дивергенцией и переписать его в виде

$$\operatorname{div} [\langle \mathbf{e} \rangle + 4\pi N \langle \mathbf{p}_{\text{мол}} \rangle] = 4\pi N \langle e_{\text{мол}} \rangle. \quad (4.35)$$

Обычно принято вводить следующие макроскопические величины: напряженность электрического поля \mathbf{E} , поляризацию \mathbf{P} (электри-

ческий дипольный момент единицы объема), плотность заряда ϱ и электрическую индукцию \mathbf{D} , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \langle \mathbf{e} \rangle, \\ \mathbf{P} &= N \langle \mathbf{p}_{\text{мол}} \rangle, \\ \varrho &= N \langle e_{\text{мол}} \rangle, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}.\end{aligned}\tag{4.36}$$

Если в среде имеется несколько различных видов атомов или молекул и, кроме того, могут быть избыточные свободные заряды, то приведенные определения можно очевидным образом обобщить:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \sum_i N_i \langle \mathbf{p}_i \rangle, \\ \varrho &= \sum_i N_i \langle e_i \rangle + \varrho_{\text{св}},\end{aligned}\tag{4.37}$$

где N_i — число молекул i -го типа в единице объема, $\langle e_i \rangle$ — их средний заряд, $\langle \mathbf{p}_i \rangle$ — их средний дипольный момент, $\varrho_{\text{св}}$ — плотность избыточного (свободного) заряда. Обычно молекулы электронейтральны и полная плотность заряда совпадает с плотностью свободного заряда.

Используя определения (4.36) и (4.37), макроскопическое уравнение для дивергенции поля можно записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\varrho.\tag{4.38}$$

Макроскопический эквивалент второго уравнения из (4.20) можно получить, взяв ротор от обеих частей равенства (4.33). Это, очевидно, дает

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.\tag{4.39}$$

Таким образом, в макроскопической электростатике диэлектрических сред микроскопические уравнения (4.20) заменяются уравнениями (4.38) и (4.39).

Выражение (4.33) для напряженности электрического поля записывается в макроскопических переменных следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad} \int d^3x' \left[\frac{\varrho(x')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \operatorname{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) \right].\tag{4.40}$$

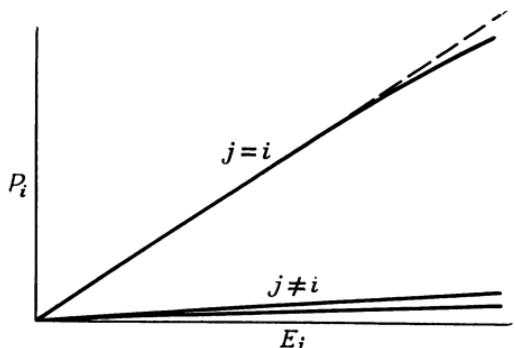
Второе слагаемое, описывающее поле диполя, уже было исследовано в гл. 1, § 6.

§ 4. Изотропные диэлектрики и граничные условия

Как уже упоминалось выше, поляризация молекул зависит от локального электрического поля вблизи молекулы. При отсутствии внешнего поля средняя поляризация равна нулю¹⁾. Поэтому вектор поляризации \mathbf{P} , являющийся в общем случае некоторой функцией от \mathbf{E} , может быть представлен в виде ряда по степеням поля, по крайней мере в случае малых полей. Любая составляющая \mathbf{P} будет при этом представляться разложением вида

$$P_i = \sum_j a_{ij} E_j + \sum_{j, k} b_{ijk} E_j E_k + \dots$$

Заранее не ясно, насколько практически существенны высшие члены разложения. Но эксперименты показали, что зависимость поляризации от приложенного поля имеет вид, изображенный



Фиг. 4.3. Зависимость составляющих вектора поляризации от приложенного электрического поля.

на фиг. 4.3. При нормальных температурах для полей, достижимых в лабораторных условиях, *линейного приближения* *совершенно достаточно*. Это и не удивительно, если вспомнить, что внутриатомные электрические поля по порядку величины равны 10^9 в/см. По сравнению с ними любое внешнее поле, обусловливающее поляризацию, является лишь малым возмущением.

В общем случае анизотропные среды (например, кристаллы кальцита или кварца) характеризуются шестью независимыми коэффициентами a_{ij} . Однако для простых веществ, называемых изотропными, вектор \mathbf{P} параллелен \mathbf{E} и линейно связан с полем, причем коэффициент пропорциональности χ_e не зависит от направления \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}. \quad (4.41)$$

Постоянная χ_e называется диэлектрической восприимчивостью среды. В этом случае электрическая индукция пропорциональна \mathbf{E} :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (4.42)$$

¹⁾ Это утверждение не относится к электретам, обладающим постоянной электрической поляризацией.

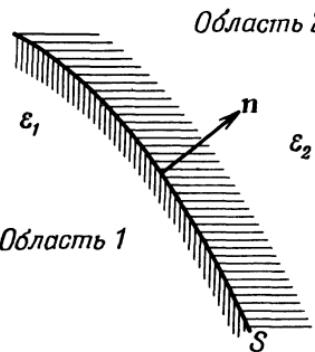
где диэлектрическая проницаемость ϵ (называемая также диэлектрической постоянной) равна

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e. \quad (4.43)$$

Если диэлектрик не только изотропен, но и однороден, то ϵ не зависит от координат. В этом случае уравнение (4.38) можно записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (4.44)$$

Все задачи для таких сред, очевидно, сводятся к уже рассмотренным в предыдущих главах с тем отличием, что электрические поля, возбуждаемые зарядами, уменьшены в ϵ раз. Это уменьшение поля



Ф и г. 4.4.

можно физически объяснить поляризацией атомов, приводящей к появлению поля, направленного противоположно полю заданных внешних зарядов. Прямым следствием указанного факта является увеличение в ϵ раз емкости конденсатора при заполнении зазора между его пластинами диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ (это справедливо лишь в случае, когда можно пре-небречь полями рассеяния).

Весьма важны граничные условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} на поверхностях, где свойства диэлектрика изменяются скачком. Рассмотрим поверхность S , изображенную на фиг. 4.4. Единичный вектор n нормален к поверхности и направлен из области 1 с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 в область 2 с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Совершенно так же, как описано в гл. 1, § 6, рассмотрим маленький параллелепипед, грани которого в областях 1 и 2 параллельны граничной поверхности S ; при этом находим

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma, \quad (4.45)$$

где σ — плотность поверхностных зарядов (без учета связанных зарядов). Аналогично, применяя теорему Стокса к уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, находим

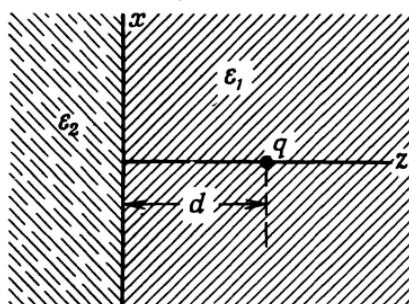
$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0. \quad (4.46)$$

Полученные граничные условия для нормальной составляющей \mathbf{D} и тангенциальной составляющей \mathbf{E} заменяют микроскопические условия (1.22) и последующие, приведенные в гл. 1, § 6. Макроскопические граничные условия можно написать и в виде, эквивалентном (1.22), если включить в правую часть (4.45) плотность связанных зарядов.

§ 5. Граничные задачи при наличии диэлектриков

Методы решения граничных задач электростатики, развитые в предыдущих главах, легко можно обобщить и на случай диэлектрических тел. В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров различных методов решения задач в применении к диэлектрическим средам.

Для иллюстрации метода изображений для диэлектриков рассмотрим точечный заряд q , расположенный в полубесконечной



Фиг. 4.5.

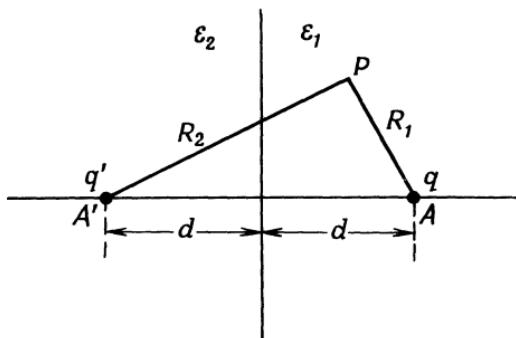
среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 на расстоянии d от плоской границы, отделяющей эту среду от другого полубесконечного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Примем граничную поверхность за плоскость $z = 0$, как показано на фиг. 4.5. Нас интересует решение уравнений

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi q && \text{при } z > 0, \\ \epsilon_2 \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 && \text{при } z < 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 && \text{везде,} \end{aligned} \quad (4.47)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям при $z = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_1 E_z \\ E_x \\ E_y \end{array} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_2 E_z \\ E_x \\ E_y \end{array} \right\}. \quad (4.48)$$

Так как $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ во всем пространстве, то поле \mathbf{E} , как обычно, выражается через потенциал Φ . При использовании метода изображений естественно поместить заряд-изображение q' в точке A' ,



Ф и г. 4.6.

симметричной A (фиг. 4.6). Тогда для $z > 0$ потенциал в точке P , характеризуемой цилиндрическими координатами (ρ, ϕ, z) , определяется выражением

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right), \quad z > 0, \quad (4.49)$$

где $R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}$, $R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}$. До сих пор ход решения задачи был совершенно таким же, как и в том случае, когда в области $z < 0$ вместо диэлектрика находилась проводящая среда. Теперь нужно определить потенциал при $z < 0$. Так как в области $z < 0$ заряды отсутствуют, решение уравнения Лапласа в этой области не должно иметь особенностей. Естественно предположить, что потенциал в области $z < 0$ эквивалентен потенциальному некоторого фиктивного заряда q'' , расположенного в точке A , где находится истинный заряд q :

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{q''}{R_1} \text{ при } z < 0. \quad (4.50)$$

При учете соотношений

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = - \frac{\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

из граничных условий (4.48) получаем требования

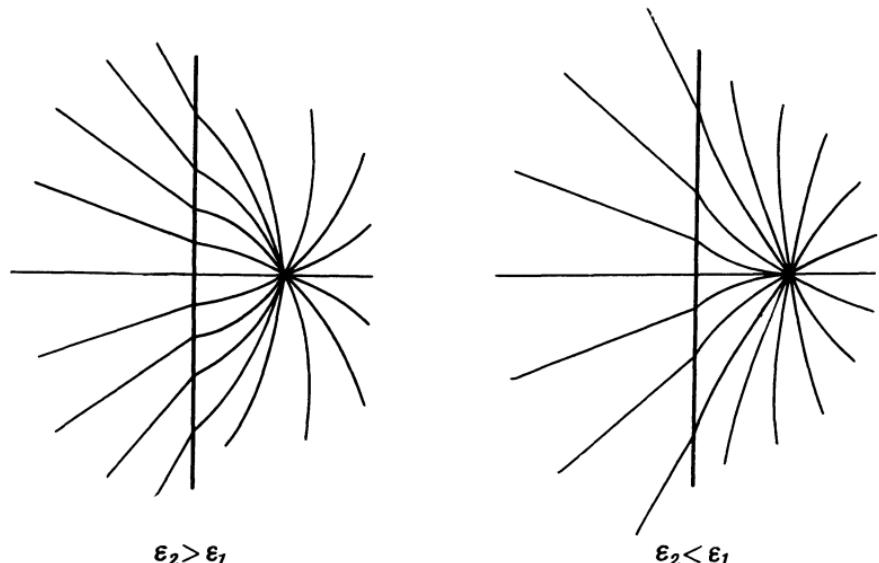
$$q - q' = q'',$$

$$\frac{1}{\epsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\epsilon_2} q''.$$

Решая эти уравнения, находим величины зарядов-изображений q' и q'' :

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q, \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Характер силовых линий в случаях $\epsilon_2 > \epsilon_1$ и $\epsilon_2 < \epsilon_1$ качественно показан на фиг. 4.7.



Фиг. 4.7. Силовые линии поля точечного заряда, находящегося в диэлектрике с проницаемостью ϵ_1 вблизи плоской границы с полупространством, заполненным средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 .

Плотность связанных зарядов равна $-\operatorname{div} \mathbf{P}$. Во внутренних точках обеих диэлектрических сред $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$, так что $-\operatorname{div} \mathbf{P} = -\chi_e \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ везде, кроме точки нахождения заряда q . Но на граничной поверхности $z = 0$ величина χ_e претерпевает скачок $\Delta \chi_e = (1/4\pi)(\epsilon_1 - \epsilon_2)$. Поэтому на плоскости $z = 0$ существует поверхностный связанный заряд с плотностью

$$\sigma_{\text{пол}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}, \quad (4.52)$$

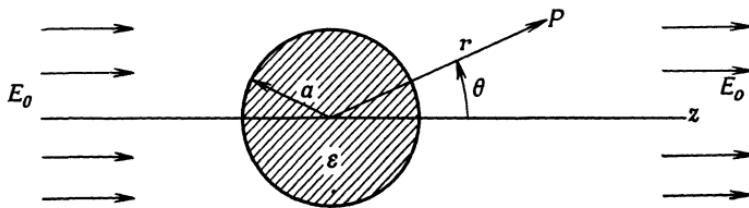
где \mathbf{n} — единичная нормаль, направленная из области 1 в область 2, а \mathbf{P}_i — поляризация i -го диэлектрика вблизи границы $z = 0$. Поскольку

$$\mathbf{P}_i = \left(\frac{\epsilon_i - 1}{4\pi} \right) \mathbf{E} = -\left(\frac{\epsilon_i - 1}{4\pi} \right) \operatorname{grad} \Phi,$$

то, как легко убедиться, плотность связанных зарядов равна

$$\sigma_{\text{пол}} = -\frac{q}{2\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1(\epsilon_2 + \epsilon_1)} \frac{d}{(q^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (4.53)$$

В предельном случае, когда $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$, диэлектрик 2 ведет себя подобно проводнику: поле внутри него становится весьма слабым, а плотность поверхностных зарядов (4.53) стремится к значению плотности зарядов на проводящей поверхности.



Ф и г. 4.8.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о диэлектрической сфере радиусом a с диэлектрической проницаемостью ϵ , помещенной в первоначально однородное электрическое поле, которое на больших расстояниях от сферы направлено вдоль оси z и равно E_0 (фиг. 4.8). Как внутри, так и вне сферы свободных зарядов нет, поэтому следует решать уравнение Лапласа с соответствующими граничными условиями на поверхности $r = a$. Учитывая аксиальную симметрию задачи, можно искать решение в виде:

внутри сферы

$$\Phi_i = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l (\cos \theta), \quad (4.54)$$

вне сферы

$$\Phi_e = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l (\cos \theta). \quad (4.55)$$

Из условия на бесконечности ($\Phi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$) находим, что единственным отличным от нуля коэффициентом B_l является $B_1 = -E_0$. Остальные коэффициенты разложения определяются из граничных условий при $r = a$:

$$\begin{aligned} \text{тангенциальное } E: & \quad -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \Big|_{r=a}, \\ \text{нормальное } D: & \quad -\epsilon \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \Phi_e}{\partial r} \Big|_{r=a}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Первое граничное условие приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} A_1 &= -E_0 + \frac{C_1}{a^3}, \\ A_l &= \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad \text{при } l \neq 1; \end{aligned} \quad (4.57)$$

второе условие дает

$$\begin{aligned} \epsilon A_1 &= -E_0 - 2 \frac{C_1}{a^3}, \\ \epsilon l A_l &= -(l+1) \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad \text{при } l \neq 1. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Вторые уравнения в (4.57) и (4.58) могут удовлетворяться одновременно лишь в том случае, если положить $A_l = C_l = 0$ для всех $l \neq 1$. Оставшиеся коэффициенты выражаются через значения приложенного электрического поля E_0

$$\begin{aligned} A_1 &= -\left(\frac{3}{2+\epsilon}\right) E_0, \\ C_1 &= \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) a^3 E_0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

В результате решение для потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_i &= -\left(\frac{3}{\epsilon+2}\right) E_0 r \cos \theta, \\ \Phi_e &= -E_0 r \cos \theta + \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Потенциал внутри диэлектрической сферы соответствует однородному электрическому полю, направленному параллельно приложенному и имеющему величину

$$E_i = \frac{3}{\epsilon+2} E_0 < E_0. \quad (4.61)$$

Вне сферы поле равно сумме приложенного поля E_0 и поля расположенного в начале координат электрического диполя с моментом

$$p = \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) a^3 E_0, \quad (4.62)$$

ориентированным в направлении приложенного внешнего поля. Дипольный момент равен интегралу от поляризации \mathbf{P} по объему сферы. Вектор поляризации равен

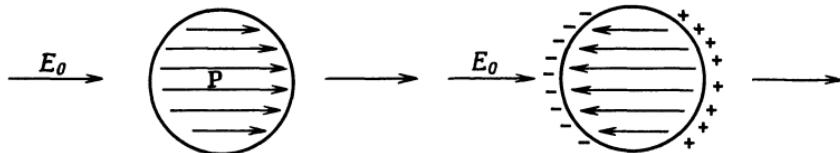
$$\mathbf{P} = \left(\frac{\epsilon-1}{4\pi}\right) \mathbf{E} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) \mathbf{E}_0. \quad (4.63)$$

Он постоянен внутри сферы; интеграл от него по объему дает (4.62). Плотность связанного поверхностного заряда, согласно (4.52),

равна $\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r$, т. е.

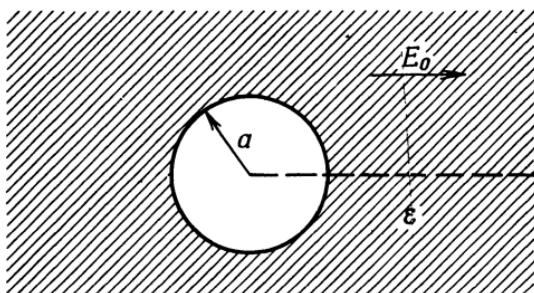
$$\sigma_{\text{пол}} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) E_0 \cos \theta. \quad (4.64)$$

Можно считать, что поверхностные заряды создают внутреннее поле, противоположное внешнему и уменьшающее значение полного поля внутри сферы до величины (4.61), как схематически показано на фиг. 4.9.



Фиг. 4.9. Диэлектрическая сфера в однородном электрическом поле E_0 . Слева показано распределение вектора поляризации, справа — наведенный заряд и соответствующее ему электрическое поле, противоположное внешнему.

Задача о сферической полости радиусом a в диэлектрической среде с проницаемостью ϵ при внешнем электрическом поле E_0 , параллельном оси z (фиг. 4.10), решается совершенно аналогично



Фиг. 4.10. Сферическая полость в диэлектрике в однородном внешнем поле.

предыдущей. Фактически, как показывает анализ граничных условий (4.56), чтобы получить решение для полости, достаточно в решении для сферы заменить ϵ на $(1/\epsilon)$. Так, в частности, поле в полости оказывается однородным, параллельным E_0 и равным

$$E_i = \frac{3\epsilon}{2\epsilon + 1} E_0 > E_0. \quad (4.65)$$

Аналогично поле вне полости равно сумме приложенного поля и поля диполя, расположенного в центре полости, ориентированного противоположно внешнему полю и имеющего дипольный момент

$$p = \left(\frac{\epsilon - 1}{2\epsilon + 1} \right) a^3 E_0. \quad (4.66)$$

§ 6. Поляризуемость молекул и диэлектрическая восприимчивость

В этом и следующем параграфах мы рассмотрим связь между молекулярными свойствами и макроскопическим параметром — диэлектрической восприимчивостью χ_e . При анализе мы будем пользоваться простыми классическими моделями, описывающими свойства молекул, хотя, конечно, при строгом подходе к проблеме необходимо квантовомеханическое рассмотрение. К счастью, простейшие свойства диэлектриков поддаются классической интерпретации.

Прежде чем перейти к детальному обсуждению вопроса о связи свойств молекул с диэлектрической восприимчивостью, следует установить различие между внешним полем и полем, действующим на молекулу в среде.

Диэлектрическая восприимчивость определяется соотношением $P = \chi_e E$, где E — макроскопическое электрическое поле. В разреженных средах, где расстояния между молекулами велики, макроскопическое поле мало отличается от поля, действующего на любую молекулу или группу молекул. В плотных же средах с «тесной упаковкой молекул» поляризация соседних молекул приводит к появлению дополнительного внутреннего поля E_i , действующего на каждую молекулу наряду с усредненным макроскопическим полем E ; результирующее полное поле, действующее на молекулу, равно, таким образом, сумме $E + E_i$. Внутреннее поле можно представить в виде

$$E_i = \left(\frac{4\pi}{3} + s \right) P, \quad (4.67)$$

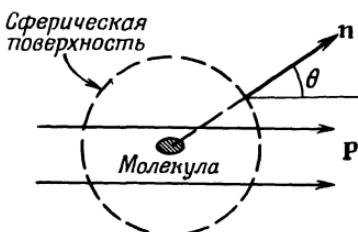
где sP — вклад молекул, расположенных вблизи рассматриваемой, а $(4\pi/3)P$ — вклад более удаленных молекул. Обычно рассматривают оба слагаемых в отдельности, окружая исследуемую молекулу воображаемой сферой, размеры которой можно считать микроскопически большими, но макроскопически малыми (фиг. 4.11). Поле в центре сферы, обусловленное поляризацией молекул вне сферы, можно найти по плотности зарядов, наведенных на поверхности сферы. Она равна $-P \cdot n$, где n — внешняя нормаль к сферической поверхности. Результирующее поле в центре, очевидно, параллельно P , а его величина равна

$$E_i^{(1)} = \int_{\text{сфера}} r^2 d\Omega \frac{(-P \cos \theta)(-\cos \theta)}{r^2} = \frac{4\pi}{3} P, \quad (4.68)$$

что совпадает с первым слагаемым в (4.67).

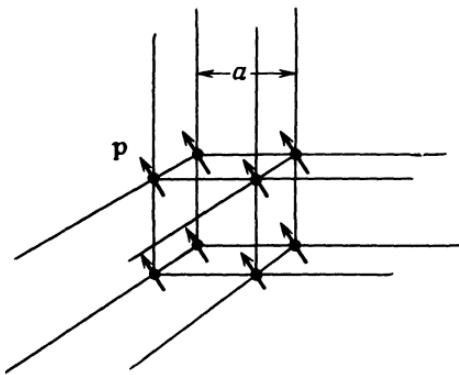
Поле sP , обусловленное близкими молекулами, определить труднее. Как показал Лоренц [69], для атомов в простой кубиче-

ской решетке $s = 0$ в любой точке ячейки. Это вытекает из симметрии задачи, в чем можно убедиться из следующего рассуждения. Пусть внутри сферы расположена кубическая решетка диполей



Фиг. 4.11. К вычислению влияния дальних молекул на внутреннее поле.

(фиг. 4.12) с равными по величине и одинаково ориентированными моментами (напомним, что сфера считается макроскопически малой). Положения диполей определяются радиусами-векторами \mathbf{x}_{ijk} с составляющими (ia, ja, ka) вдоль координатных осей, где a —



Фиг. 4.12. К вычислению влияния близких молекул в простой кубической решетке на внутреннее поле.

постоянная решетки, а индексы i, j, k принимают положительные и отрицательные целые значения. Поле в начале координат, порождаемое всеми диполями, согласно (4.13), равно

$$\mathbf{E} = \sum_{ijk} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_{ijk}) \mathbf{x}_{ijk} - x_{ijk}^2 \mathbf{p}}{x_{ijk}^5}. \quad (4.69)$$

Составляющую поля вдоль оси x можно представить в виде

$$E_1 = \sum_{ijk} \frac{3(i^2 p_1 + ij p_2 + ik p_3) - (i^2 + j^2 + k^2) p_1}{a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}}. \quad (4.70)$$

Так как индексы пробегают и положительные, и отрицательные значения, то сумма перекрестных членов $(ij p_2 + ik p_3)$ обращается

в нуль. Из симметрии решетки следует равенство сумм

$$\sum_{ijk} \frac{i^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{j^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{k^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} .$$

В результате получаем

$$E_1 = \sum_{ijk} \frac{[3i^2 - (i^2 + j^2 + k^2)] p_1}{a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = 0. \quad (4.71)$$

Совершенно аналогично можно показать, что составляющие поля вдоль осей y и z также равны нулю. Следовательно, $s = 0$ для простой кубической решетки.

Поскольку $s = 0$ для системы с высокой степенью симметрии, представляется правдоподобным, что и для полностью хаотического расположения молекул также $s = 0$. Поэтому можно ожидать, что в аморфных веществах, подобных стеклу, внутреннее поле, обусловленное близлежащими молекулами, также не возникает. Хотя точный ответ может быть получен лишь при учете детального строения вещества, предположение, что $s \approx 0$, можно принять почти для всех материалов.

Согласно (4.36), вектор поляризации \mathbf{P} определяется равенством

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_{\text{мол}} \rangle,$$

где $\langle \mathbf{p}_{\text{мол}} \rangle$ — средний дипольный момент молекул. Дипольный момент приближенно пропорционален электрическому полю, действующему на молекулу. Чтобы отразить эту зависимость, определим *поляризуемость молекулы* $\gamma_{\text{мол}}$ как отношение среднего дипольного момента молекулы к действующему на нее полю. Учитывая наличие внутреннего поля (4.67), получаем

$$\langle \mathbf{p}_{\text{мол}} \rangle = \gamma_{\text{мол}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i). \quad (4.72)$$

Коэффициент $\gamma_{\text{мол}}$ зависит, строго говоря, от величины электрического поля, но для широкой области значений напряженности поля он является постоянной, характеризующей реакцию молекул на приложенное поле (см. § 4). Комбинируя соотношение (4.72) с (4.36) и (4.67), получаем

$$\mathbf{P} = N \gamma_{\text{мол}} \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right), \quad (4.73)$$

где принято, что $s = 0$. Выражая \mathbf{P} через \mathbf{E} и пользуясь равенством $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$, определяющим диэлектрическую восприимчивость вещества, находим

$$\chi_e = \frac{N \gamma_{\text{мол}}}{1 - (4\pi/3) N \gamma_{\text{мол}}} . \quad (4.74)$$

Это соотношение связывает восприимчивость (макроскопический параметр) и поляризуемость молекул (микроскопический параметр). Поскольку диэлектрическая проницаемость равна $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$, ее также можно выразить через $\gamma_{\text{мол}}$. Наоборот, поляризуемость молекул может быть выражена через диэлектрическую проницаемость вещества:

$$\gamma_{\text{мол}} = \frac{3}{4\pi N} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right). \quad (4.75)$$

Соотношение (4.75) называют *уравнением Клаузиуса — Моссотти*, так как Моссотти (в 1850 г.) и Клаузиус (в 1879 г.) независимо установили, что для данного вещества величина $(\epsilon - 1) / (\epsilon + 2)$ пропорциональна плотности вещества¹⁾. Это соотношение лучше всего выполняется для веществ с малой плотностью, например для газов. Для жидкостей и твердых тел формула (4.75) справедлива лишь приближенно, особенно если диэлектрическая проницаемость велика. Дальнейшие подробности читатель может найти в книгах Бётхера [18], Дебая [35] и Фрёлиха [43].

§ 7. Модели поляризуемости молекул

Существует два механизма возникновения поляризации системы атомов или молекул:

а) внешнее поле изменяет распределение заряда, индуцируя в каждой молекуле дипольный момент;

б) внешнее поле вызывает упорядочение первоначально хаотически ориентированных постоянных дипольных моментов молекул.

Для оценки индуцированных моментов рассмотрим простую модель упруго связанных зарядов (электронов). На каждый заряд e действует упругая удерживающая сила

$$\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{x}, \quad (4.76)$$

где m — масса заряда, а ω_0 — частота колебаний вблизи положения равновесия. Под действием электрического поля \mathbf{E} заряд смещается из положения равновесия, причем величина смещения \mathbf{x} определяется соотношением

$$m\omega_0^2 \mathbf{x} = e\mathbf{E}.$$

В результате наведенный дипольный момент оказывается равным

$$\mathbf{p}_{\text{мол}} = e\mathbf{x} = \frac{e^2}{m\omega_0^2} \mathbf{E}. \quad (4.77)$$

¹⁾ В области оптических частот $\epsilon = n^2$, где n — показатель преломления. Соотношение (4.75), в котором ϵ заменено на n^2 , называют иногда формулой Лорентц — Лоренца (1880 г.).

Отсюда для поляризуемости молекулы получаем $\gamma = e^2/m\omega_0^2$. Если молекула имеет Z электронов, причем для f_j -го электрона упругая сила равна $m\omega_j^2 x$ ($\sum_j f_j = Z$), то поляризуемость молекулы, обусловленная электронами, оказывается равной

$$\gamma_{\text{эл}} = \frac{e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2}. \quad (4.78)$$

Чтобы представить себе порядок величины $\gamma_{\text{эл}}$, проведем две различные оценки. Так как γ имеет размерность объема, ее величина должна быть порядка молекулярных размеров или меньше, т. е. $\gamma_{\text{эл}} \leq 10^{-23} \text{ см}^3$. С другой стороны, частоты связи для атомных электронов должны иметь порядок оптических частот. Приняв за типичную длину световой волны 3000 \AA , получаем $\omega \approx 6 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. В результате $\gamma_{\text{эл}} \approx (e^2/m\omega^2) \approx 6 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$, что согласуется с предыдущей оценкой, основанной на величине молекулярного объема.

Для газов, находящихся при нормальных температуре и давлении, число N молекул в 1 см^3 составляет $2,7 \cdot 10^{19}$, и, таким образом, диэлектрическая восприимчивость χ_e по порядку величины меньше или примерно равна 10^{-4} . Это значит, что диэлектрическая проницаемость отличается от единицы на несколько тысячных или еще меньше. В качестве типичных экспериментально найденных значений диэлектрической проницаемости можно привести значения ϵ для воздуха (1,00054), паров аммиака (1,0072), метилового спирта (1,0057), гелия (1,000068). Для твердых или жидких диэлектриков N составляет 10^{22} — 10^{23} молекул в 1 см^3 , так что диэлектрическая восприимчивость может быть порядка единицы (с точностью до множителя $\sim 10^{\pm 1}$), что и наблюдается на опыте¹⁾.

При выводе (4.78) мы не учитывали теплового движения молекул. Следует еще рассмотреть, не меняет ли учет теплового движения найденного значения наведенной дипольной поляризуемости. Согласно статистической механике, функция распределения частиц в фазовом пространстве (в пространстве p, q) пропорциональна множителю Больцмана

$$e^{-H/kT}, \quad (4.79)$$

где H — гамильтониан. Для гармонически связанного электрона при наличии поля, направленного по оси z , гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2 - eEz, \quad (4.80)$$

где p — импульс электрона. Усредненное значение дипольного

¹⁾ Таблицы диэлектрических проницаемостей различных веществ можно найти в [5] или [49].

момента определяется выражением

$$\langle p_{\text{мол}} \rangle = \frac{\int d^3p \int d^3x (ez) e^{-H/kT}}{\int d^3p \int d^3xe^{-H/kT}}. \quad (4.81)$$

Интегрирование по d^3p и $dxdy$ может быть проведено сразу и дает

$$\langle p_{\text{мол}} \rangle = \frac{e \int dz z \exp \left[-\frac{1}{kT} \left(\frac{m\omega_0^2}{2} z^2 - eEz \right) \right]}{\int dz \exp \left[-\frac{1}{kT} \left(\frac{m\omega_0^2}{2} z^2 - eEz \right) \right]}.$$

Интегрируя числитель по частям, окончательно получаем

$$\langle p_{\text{мол}} \rangle = \frac{e^2}{m\omega_0^2} E,$$

что совпадает с выражением (4.77), найденным ранее элементарным способом без учета теплового движения. Таким образом, выражение (4.78) для поляризуемости молекул справедливо и при наличии теплового движения.

Второй вид поляризуемости обусловлен частичной ориентацией постоянных дипольных моментов, первоначально ориентированных хаотически. Такая ориентационная поляризация, существенная для веществ с полярными молекулами типа HCl и H₂O, впервые была исследована Дебаем (1912 г.). Пусть все молекулы обладают постоянным дипольным моментом p_0 , который может быть ориентирован в любом направлении. Если внешнего поля нет, то вследствие теплового возбуждения молекулы ориентированы хаотически, так что результирующий дипольный момент равен нулю. Если же приложено электрическое поле, то диполи стремятся ориентироваться по полю, поскольку эта ориентация соответствует положению с наименьшей энергией. Поэтому средний дипольный момент становится отличным от нуля. Для его нахождения заметим, что гамильтониан молекулы определяется формулой

$$H = H_0 - \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}, \quad (4.82)$$

где H_0 — функция лишь «внутренних» координат молекулы.

Учитывая множитель Больцмана (4.79), можно найти средний дипольный момент:

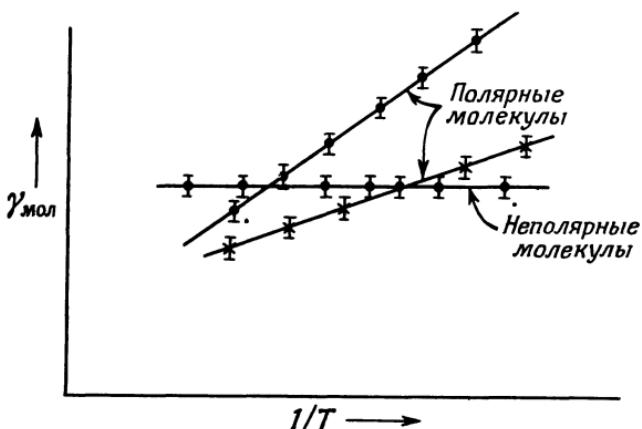
$$\langle p_{\text{мол}} \rangle = \frac{\int d\Omega p_0 \cos \theta \exp(p_0 E \cos \theta / kT)}{\int d\Omega \exp(p_0 E \cos \theta / kT)}, \quad (4.83)$$

где поле \mathbf{E} выбрано вдоль оси z . Здесь уже проведено интегрирование по всем несущественным переменным и учтено, что лишь составляющая \mathbf{p}_0 , параллельная направлению поля, отлична от нуля.

Величина $p_0 E / kT$ обычно весьма мала по сравнению с единицей, за исключением случая очень низких температур. Поэтому можно воспользоваться степенным разложением экспоненциальных функций, что приводит к соотношению

$$\langle p_{\text{мол}} \rangle \approx \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{kT} E. \quad (4.84)$$

Из (4.84) видно, что ориентационная поляризация обратно пропорциональна температуре; этого и следовало ожидать, поскольку приложенное поле преодолевает разупорядочивающее влияние теплового движения.



Фиг. 4.13. Температурная зависимость поляризуемости молекул $\gamma_{\text{мол}}$ для полярных и неполярных диэлектриков.

В общем случае существуют оба типа поляризации — индуцируемая (электронная) и ориентационная, так что общее выражение для поляризуемости молекул имеет вид

$$\gamma_{\text{мол}} \approx \gamma_{\text{ел}} + \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{kT}. \quad (4.85)$$

При этом зависимость от температуры имеет вид $(a + b/T)$, так что экспериментально оба типа поляризации легко разделить (фиг. 4.13). Для полярных молекул, например HCl и H_2O , измеренное значение постоянного дипольного момента равно по порядку величины произведению заряда электрона на 10^{-8} см , что согласуется с молекулярными размерами.

§ 8. Энергия электрического поля в диэлектрике

В гл. 1, § 11, была исследована энергия системы зарядов в свободном пространстве. Полученное выражение для энергии системы

с распределением плотности заряда $q(x)$ и потенциалом $\Phi(x)$

$$W = \frac{1}{2} \int q(x) \Phi(x) d^3x \quad (4.86)$$

не может быть, вообще говоря, принято без изменения при макроскопическом описании диэлектрических сред. Причина этого станет более ясной, если напомнить, как было получено выражение (4.86).

Данное распределение заряда мы представляли себе как результат постепенного накопления элементарных зарядов, которые вносятся из бесконечно удаленной точки, причем преодолевается противодействие электрического поля уже существующего заряда. При этом полная работа, совершенная при накоплении заряда, описывается соотношением (4.86). При наличии диэлектрической среды совершаемая работа тратится не только на перенос свободного (макроскопического) заряда в его окончательное положение, но и на увеличение поляризации диэлектрика. Поэтому если понимать под q и Φ в (4.86) макроскопические величины, то заранее не очевидно, что выражение (4.86) определяет полную затраченную работу, включающую и работу на поляризацию диэлектрика.

Для общности рассмотрения мы вначале не будем делать каких-либо допущений о линейности, однородности и тому подобных свойствах реакции диэлектрика на приложенное поле. Рассмотрим малое изменение энергии δW , обусловленное некоторым изменением δq распределения плотности заряда q , существующего во всем пространстве.

Работа, требуемая для совершения этого изменения, равна

$$\delta W = \int \delta q(x) \Phi(x) d^3x, \quad (4.87)$$

где $\Phi(x)$ — потенциал, создаваемый уже существующим распределением заряда $q(x)$. Так как $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi q$, то δq можно связать с изменением электрической индукции $\delta \mathbf{D}$

$$\delta q = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} (\delta \mathbf{D}). \quad (4.88)$$

В результате изменение энергии δW может быть представлено в виде

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} d^3x, \quad (4.89)$$

где мы воспользовались соотношением $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ и приняли, что $q(x)$ описывает ограниченное распределение заряда. Полную электростатическую энергию можно найти, по крайней мере формально, рассмотрев изменение \mathbf{D} от начального значения $\mathbf{D} = 0$

до некоторой конечной величины \mathbf{D} :

$$W = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \int_0^D \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}. \quad (4.90)$$

Для линейной среды

$$\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (4.91)$$

и полная электростатическая энергия оказывается равной

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3x. \quad (4.92)$$

Последний результат можно преобразовать к виду (4.86), воспользовавшись соотношениями $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ и $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi q$ или же возвращаясь к (4.87) и принимая линейную связь между q и Φ . Таким образом, мы видим, что выражение (4.86) выполняется для макроскопических характеристик лишь в случае линейных сред. В противном случае энергия окончательной конфигурации зарядов должна вычисляться согласно (4.90) и может зависеть от предыстории системы (гистерезис).

Представляет интерес задача об изменении энергии при внесении диэлектрических тел в электрическое поле фиксированных источников. Пусть первоначально электрическое поле \mathbf{E}_0 создается некоторым распределением зарядов $Q_0(x)$ в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 , которая может зависеть от координат. При этом начальная электростатическая энергия равна

$$W_0 = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 d^3x,$$

где $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$. Пусть теперь при фиксированном положении источников в поле вносится диэлектрическое тело объемом V_1 , что приводит к изменению поля от \mathbf{E}_0 до \mathbf{E} . При наличии тела диэлектрическая проницаемость $\epsilon(x)$ равна ϵ_1 в объеме V_1 и ϵ_0 вне V_1 . Чтобы обойти математические трудности, будем считать функцию $\epsilon(x)$ достаточно плавной функцией координат, спадающей от ϵ_1 до ϵ_0 вблизи границы объема V_1 быстро, но непрерывно. При наличии тела величина энергии будет равна

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3x,$$

где $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Разность энергий можно записать в виде

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0) d^3x = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) d^3x + \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0) \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d^3x. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Можно показать, что второй интеграл равен нулю. Действительно, так как $\operatorname{rot}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_0) = 0$, то

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_0 = -\operatorname{grad} \Phi,$$

так что второй интеграл может быть представлен в виде

$$I = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{grad} \Phi \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d^3x.$$

Интегрирование по частям дает

$$I = \frac{1}{8\pi} \int \Phi \operatorname{div} (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d^3x = 0,$$

так как $\operatorname{div}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) = 0$ в силу предположения о том, что распределение плотности заряда $q_0(x)$ не изменилось при внесении диэлектрического тела. Таким образом, изменение энергии определяется выражением

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) d^3x. \quad (4.94)$$

Интегрирование, которое, казалось бы, надо распространять на все пространство, в действительности следует проводить лишь по объему V_1 , занятому телом, так как вне этого объема $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$. Таким образом,

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\epsilon_1 - \epsilon_0) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 d^3x. \quad (4.95)$$

Если диэлектрическое тело расположено в свободном пространстве, то $\epsilon_0 = 1$. Учитывая определение вектора поляризации \mathbf{P} , можно записать (4.95) в виде

$$W = -\frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 d^3x, \quad (4.96)$$

где \mathbf{P} — поляризация диэлектрика. Отсюда следует, что плотность энергии в диэлектрике, расположенному в поле \mathbf{E}_0 , источники которого фиксированы, описывается формулой

$$w = -\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0. \quad (4.97)$$

Это выражение аналогично дипольному члену в разложении (4.17) для энергии распределения зарядов во внешнем поле. Наличие коэффициента $1/2$ связано с тем, что (4.97) представляет плотность энергии для поляризуемого диэлектрика во внешнем поле, а не для постоянного диполя. Этот коэффициент имеет то же происхождение, что и в формуле (4.91).

Из выражений (4.95) и (4.96) следует, что при $\epsilon_1 > \epsilon_0$ диэлектрическое тело стремится переместиться в область с большим значением поля E_0 . Для вычисления действующей на тело силы рассмотрим малое обобщенное смещение тела $\delta\xi$. Оно приведет к изменению энергии δW . Так как распределение зарядов фиксировано, то внешние источники энергии отсутствуют и изменение энергии поля должно компенсироваться изменением механической энергии тела. Это значит, что действующая на тело сила определяется выражением

$$F_\xi = -\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_Q, \quad (4.98)$$

где индекс Q у частной производной показывает, что источники поля остаются неизменными.

В практических задачах с перемещением диэлектриков электрическое поле часто создается заданной конфигурацией электродов, на которых с помощью внешнего источника, например батареи, поддерживается *постоянный потенциал*. При перемещении диэлектрика заряд будет течь к батарее или от нее так, чтобы потенциал оставался постоянным. Это означает, что внешний источник в данном случае затрачивает некоторую энергию. Интересно сравнить эту энергию с найденным выше изменением энергии для *фиксированных источников поля*. Будем рассматривать лишь линейные среды, для которых справедливо выражение (4.86). При этом достаточно рассмотреть лишь малые изменения первоначально существовавшей конфигурации. Как видно из (4.86), изменение энергии, соответствующее изменению плотности заряда $\delta q(x)$ и изменению потенциала $\delta\Phi(x)$, равно

$$\delta W = \frac{1}{2} \int [\delta q \delta\Phi + \Phi \delta q] d^3x. \quad (4.99)$$

Сопоставление с выражением (4.87) показывает, что при неизменных свойствах диэлектрика оба слагаемых в (4.99) равны. Если, однако, свойства диэлектрика меняются:

$$\epsilon(x) \rightarrow \epsilon(x) + \delta\epsilon(x), \quad (4.100)$$

то слагаемые (4.99) могут быть не равными.

Действительно, мы сейчас нашли изменение энергии, обусловленное введением диэлектрического тела в электрическое поле, создаваемое фиксированными источниками ($\delta q = 0$). Это изменение энергии объясняется появлением наведенных зарядов. Изменение свойств диэлектрика в соответствии с (4.100) вызывает изменение плотности связанного заряда. Поэтому если интерпретировать соотношение (4.99) как интеграл от плотности и свободного, и связанного зарядов (т. е. как микроскопическое уравнение), то оба

слагаемых оказываются всегда равными. Однако часто удобно иметь дело с макроскопическими величинами. При этом указанное равенство обоих слагаемых имеет место лишь при неизменных свойствах диэлектрика.

Можно считать, что любой процесс изменения свойств диэлектрика (перемещением диэлектрических тел, изменением их восприимчивостей и т. д.) при заданных потенциалах на электродах совершается в два этапа. На первом этапе электроды отсоединены от батарей и заряд на них поддерживается постоянным ($\delta q = 0$). Изменение энергии при изменении свойств диэлектрика (4.100) выражается формулой

$$\delta W_1 = \frac{1}{2} \int \varrho \delta \Phi_1 d^3x, \quad (4.101)$$

где $\delta \Phi_1$ — изменение потенциала. Можно показать, что это соотношение приводится к (4.95). На втором этапе батареи подключаются к электродам и на электродах вновь восстанавливается первоначальный потенциал. Изменение потенциала¹⁾ $\delta \Phi_2 = -\delta \Phi_1$ сопровождается потоком заряда δq_2 от батареи. Изменение энергии на втором этапе равно

$$\delta W_2 = \frac{1}{2} \int (\varrho \delta \Phi_2 + \Phi \delta q_2) d^3x = -2\delta W_1, \quad (4.102)$$

так как оба слагаемых равны друг другу. Мы видим, что изменение энергии, обусловленное внешними источниками на втором этапе, вдвое больше, чем на первом, и имеет противоположный знак. В результате полное изменение энергии

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int \varrho \delta \Phi_1 d^3x. \quad (4.103)$$

Символически можно записать

$$\delta W_V = -\delta W_Q, \quad (4.104)$$

где индекс соответствует фиксированному параметру.

Если диэлектрик с $\epsilon > 1$ вносится в область с большей напряженностью поля, то в случае фиксированных потенциалов энергия возрастает, а не убывает. При этом действующая на тело механическая сила, соответствующая обобщенному смещению $d\xi$, равна

$$F_\xi = + \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_V. \quad (4.105)$$

¹⁾ Заметим, что необходимо знать лишь изменение потенциала $\delta \Phi_2 = -\delta \Phi_1$ на электродах, так как это единственное место, где присутствуют свободные заряды.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Выход макроскопических уравнений электростатики с помощью усреднения по совокупности атомов можно найти в книгах Розенфельда [86], гл. 2, Мэзона и Уивера [72], гл. 1, часть III, Ван Флека [113], гл. 1.

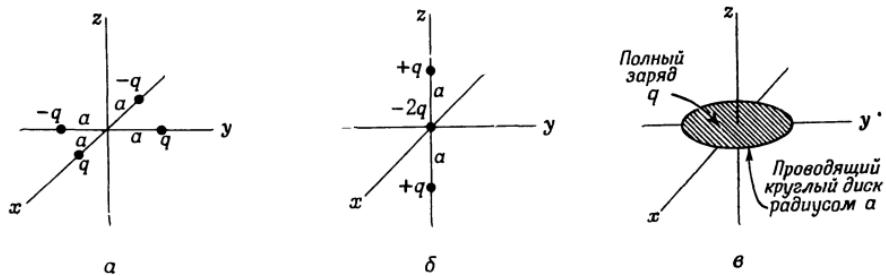
Розенфельд рассматривает также классическую электронную теорию диэлектриков. Книга Ван Флека посвящена исследованию диэлектрической и магнитной восприимчивости. Явлению поляризации диэлектриков специально посвящены работы Бётхера [18], Дебая [35], Фрёлиха [43].

Границные задачи при наличии диэлектриков рассматриваются во всех указанных в гл. 2 и 3 работах по электростатике.

Мы рассмотрели силы и энергии в диэлектрических средах весьма бегло. Более полное исследование этого круга вопросов, в том числе рассмотрение сил в жидких и твердых диэлектриках, исследование тензора электрических напряжений, электрострикции и термодинамических эффектов, можно найти в книгах Абрагама и Беккера [1], гл. 5, Дюрана [37], гл. 6 и 7, Ландау и Лифшица [64], Максвелла [73], т. 1, гл. 5, Пановского и Филипса [78], гл. 6, Стрэттона [106], гл. 2.

ЗАДАЧИ

4.1. а) Вычислить мультипольные моменты q_{lm} распределений заряда, изображенных на фиг. 4.14, *a* — *в*, попытаться получить значения отличных от нуля моментов, справедливые для всех l ; в каждом случае определить по крайней мере два первых отличных от нуля момента.



Фиг. 4.14.

б) Для распределения заряда, изображенного на фиг. 4.14, *б*, записать разложение потенциала по мультиполям. Удержав лишь низший член в разложении, начертить распределение потенциала в плоскости *xy* как функции расстояния от начала координат для расстояний, больших a .

в) Вычислить, исходя из закона Кулона, точное выражение для потенциала распределения, изображенного на фиг. 4.14, *б*, в плоскости *xy*. Построить кривые зависимости потенциала от расстояния и сравнить их с приближенным результатом, полученным в п. «б».

Чтобы более ясно представить себе характер решений, полученных в пп. «б» и «в», на больших расстояниях, определить асимптотику решений.

4.2. Ядро с квадрупольным моментом Q находится в цилиндрически симметричном электрическом поле, которое в точке расположения ядра имеет градиент $(\partial E_z / \partial z)_0$ вдоль оси z .

а) Показать, что энергия квадрупольного взаимодействия определяется выражением

$$W = -\frac{e}{4} Q \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_0 .$$

б) Пусть $Q = 2 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, а $W/h = 10 \text{ Мгц}$, где h — постоянная Планка; вычислить $(\partial E_z / \partial z)_0$ в единицах e/a_0^3 , где $a_0 = \hbar^2/me^2 = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ — боровский радиус атома водорода.

в) Распределение заряда в ядре может быть аппроксимировано постоянной плотностью заряда в объеме сфероида с главной полуосью a и второй полуосью b . Вычислить квадрупольный момент такого ядра, считая его полный заряд равным Ze . Приняв, что для Eu^{153} ($Z = 63$) квадрупольный момент равен $Q = 2,5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, а средний радиус

$$R = \frac{a+b}{2} = 7 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

определить относительную разность полуосей $(a - b)/R$.

4.3. Пусть плотность распределения заряда задается выражением

$$\rho(r) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2 \theta.$$

а) Провести разложение потенциала для данного распределения плотности по мультиполям и определить отличные от нуля мультипольные моменты. Записать потенциал на больших расстояниях в виде конечного разложения по полиномам Лежандра.

б) Найти явное выражение для потенциала в любой точке пространства и показать, что вблизи начала координат

$$\Phi(r) \approx \frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos \theta).$$

в) Пусть в начале координат расположено ядро с квадрупольным моментом $Q = 10^{-24} \text{ см}^2$. Найти величину энергии взаимодействия ядра с полем в предположении, что за единицу заряда в приведенном выше распределении $\rho(r)$ принят заряд электрона, а за единицу длины — боровский радиус атома водорода $a_0 = \hbar^2/me^2 = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Выразить результат в частотах, разделив его на постоянную Планка h .

Принятое в задаче распределение плотности заряда соответствует состояниям $2p$ -уровня для водорода с $m = \pm 1$, а квадрупольное взаимодействие по порядку величины совпадает с найденным для молекул водорода.

4.4. Очень длинный прямой круглый полый диэлектрический цилиндр из вещества с диэлектрической проницаемостью ϵ , имеющий внутренний радиус a и внешний радиус b , помещен в первоначально однородное электрическое поле E_0 , причем ось цилиндра перпендикулярна полю. Диэлектрическая проницаемость среды вне и внутри цилиндра равна единице.

а) Определить потенциал и электрическое поле во всех трех областях, пренебрегая краевыми эффектами.

б) Нарисовать распределение силовых линий для случая $b \approx 2a$.

в) Исследовать решения в предельных случаях, а именно для сплошного диэлектрического цилиндра в однородном поле и цилиндрической полости в однородном диэлектрике.

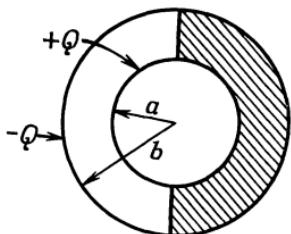
4.5. Точечный заряд q расположен в свободном пространстве на расстоянии d от центра диэлектрической сферы радиусом a ($a < d$) с диэлектрической проницаемостью ϵ .

а) Найти распределение потенциала во всем пространстве в виде разложения по сферическим гармоникам.

б) Вычислить декартовы составляющие электрического поля вблизи центра сферы.

в) Проверить, что в пределе $\epsilon \rightarrow \infty$ полученный результат совпадает с результатом для проводящей сферы.

4.6. Заряды на двух концентрических идеально проводящих сферических оболочках с внутренним и внешним радиусами a и b равны соответственно $\pm Q$. Пространство между сферами наполовину заполнено полу-сферическим слоем диэлектрика (с диэлектрической проницаемостью ϵ), как изображено на фиг. 4.15.



Ф и г. 4.15.

- Найти распределение электрического поля между сферами.
- Вычислить распределение поверхностного заряда на внутренней сфере.
- Вычислить плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрика $r = a$.

4.7. Ниже приводятся данные об изменении диэлектрической проницаемости в зависимости от давления, взятые из [99].

Воздух при 292° К

Давление, атм	ϵ
20	1,0108
40	1,0218
60	1,0333
80	1,0439
100	1,0548

Пентан (C_5H_{12}) при 303° К

Давление, атм	Плотность, g/cm^3	ϵ
1	0,613	1,82
10^3	0,701	1,96
$4 \cdot 10^3$	0,796	2,12
$8 \cdot 10^3$	0,865	2,24
$12 \cdot 10^3$	0,907	2,33

Проверить соотношение Клаузиуса — Моссotti между диэлектрической проницаемостью и плотностью для воздуха и пентана для приведенных в таблице значений переменных. Выполняется ли оно точно? Приближенно? Если соотношение выполняется лишь приближенно, рассмотреть относительное изменение плотности и ($\epsilon - 1$). Для пентана сравнить соотношение Клаузиуса — Моссotti с более грубым законом пропорциональности ($\epsilon - 1$) плотности. (Данные об относительной плотности воздуха как функции давления можно найти в справочниках; см., например, [5].)

4.8. Водяные пары являются полярным газом, диэлектрическая проницаемость которого заметно зависит от температуры. Ниже приводится таблица, содержащая данные экспериментального исследования этого эффекта.

Считая водяные пары идеальным газом, вычислить зависимость поляризуемости молекул от температуры T и начертить график этой зависимости, откладывая по оси абсцисс $1/T$. По наклону кривой определить величину постоянного дипольного момента молекулы H_2O (дипольный момент выражать в электростатических единицах).

T°, K	Давление, см рт.ст.	$(\epsilon - 1) \cdot 10^5$
393	56,49	400,2
423	60,93	371,7
453	65,34	348,8
483	69,75	328,7

4.9. Два длинных коаксиальных проводящих цилиндра с радиусами a и b опущены вертикально в жидкый диэлектрик. Пусть жидкость поднимается на высоту h между электродами при разности потенциалов между ними V . Показать, что диэлектрическая восприимчивость жидкости определяется формулой

$$\chi_e = \frac{(b^2 - a^2) \rho g h \ln(b/a)}{V^2},$$

где ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, а диэлектрическая восприимчивость воздуха не учитывается.