

Глава 5

МАГНИТОСТАТИКА

§ 1. Введение и основные определения

В предыдущих главах были рассмотрены основные вопросы электростатики (поля и взаимодействия стационарных зарядов и соответствующие граничные условия). Обратимся теперь к исследованию стационарных магнитных явлений. С исторической точки зрения магнитные явления были известны и изучались по крайней мере так же давно, как и электрические явления. Еще в древние времена был известен магнитный железняк; морской компас — очень старое изобретение; исследования Гильберта, в которых Земля рассматривается как гигантский магнит, появились еще до 1600 г. Основные законы магнитного поля в отличие от законов электростатики не выведены непосредственно из первоначального опыта обращения людей с магнитными материалами. Это объясняется рядом причин, но все они обусловлены коренным различием между магнитостатикой и электростатикой: *свободных магнитных зарядов не существует*. Поэтому магнитные явления существенно отличаются от электрических явлений, и связь между ними в течение долгого времени не была установлена. В магнитных исследованиях основным реально существующим объектом является, как мы его теперь называем, магнитный диполь. В присутствии магнитных материалов диполь стремится ориентироваться в определенном направлении. Это направление по определению считают направлением вектора плотности магнитного потока, обозначаемого **B** (при условии, что диполь достаточно мал и настолько слаб, что он не искажает существующее поле). Величина плотности магнитного потока может быть определена по механическому врачающему моменту **N**, действующему на магнитный диполь:

$$\mathbf{N} = \mu \times \mathbf{B}, \quad (5.1)$$

где μ — магнитный момент диполя, выраженный в выбранных единицах измерения¹⁾.

Уже определение вектора плотности магнитного потока \mathbf{B} (часто называемого *магнитной индукцией*) существенно более сложно, чем определение характеристик электрического поля. Дальнейшее количественное исследование магнитных явлений началось лишь после установления связи между токами и магнитными полями. Ток представляет собой движение свободных зарядов и характеризуется вектором плотности тока \mathbf{J} , измеряемым количеством единиц положительного заряда, пересекающего единичную площадку в единицу времени; направление движения зарядов определяет направление вектора \mathbf{J} . В системе СГС плотность тока измеряется количеством электричества, проходящим через 1 см² в 1 сек; в системе МКСА — в кулонах на 1 м² в 1 сек, или в амперах на 1 м². Если ток течет по проводникам малого поперечного сечения, мы обычно интересуемся лишь интегралом от плотности тока по площади сечения и говорим о токе, текущем вдоль проводника и выражаемом в статамперах или амперах.

Условие сохранения заряда связывает плотность заряда в любой точке пространства с плотностью тока в ее окрестности так называемым уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (5.2)$$

Это уравнение выражает тот физический факт, что уменьшение заряда внутри малого объема обязательно должно сопровождаться потоком заряда из объема через его поверхность, так как полное число зарядов должно оставаться неизменным. Стационарные магнитные явления характеризуются постоянством плотности заряда во всех точках пространства. Поэтому в магнитостатике справедливо уравнение

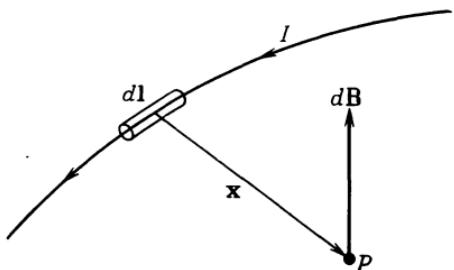
$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (5.3)$$

Теперь мы перейдем к рассмотрению экспериментально обнаруженной связи между электрическим током и плотностью магнитного потока и формулировке основных законов магнитостатики.

¹⁾ По аналогии с приведенным в гл. 1 определением единицы заряда в электростатике как заряда, образующегося при проведении равно 100 раз кошачьим мехом по янтарному стержню, можно было бы определить единичный дипольный момент как дипольный магнитный момент полудюймового стержня, по которому медленно провели 100 раз некоторым «стандартным» постоянным магнитом, ориентированным определенным стандартным образом. Подумав немного, можно было бы изобрести и более надежный и воспроизводимый стандарт!

§ 2. Закон Био и Савара

В 1819 г. Эрстед обнаружил, что провод, по которому течет электрический ток, вызывает отклонение постоянного магнитного диполя, помещенного вблизи него. Таким образом, токи являются источниками магнитной индукции. Впервые Био и Савар (1820 г.), а затем в гораздо более тщательных и совершенных опытах Ампер (1820—1825 гг.) установили основные экспериментальные законы, связывающие магнитную индукцию \mathbf{B} с токами, и нашли закон,



Фиг. 5.1. Магнитная индукция $d\mathbf{B}$, обусловленная элементарным током dI .

определяющий силу взаимодействия между токами. Основное соотношение, хотя и не совсем в том виде, в котором оно было выведено Ампером, можно сформулировать следующим образом. Пусть dI — элемент длины (ориентированный вдоль тока) бесконечно тонкого провода, несущего ток I , а x — радиус-вектор, проведенный от этого элемента длины в точку наблюдения P , как показано на фиг. 5.1; тогда величина и направление магнитной индукции $d\mathbf{B}$, создаваемой элементом dI в точке P , определяется соотношением

$$d\mathbf{B} = kI \frac{dI \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (5.4)$$

Следует заметить, что, так же как и закон Кулона в электростатике, соотношение (5.4) характеризуется обратной пропорциональностью силы квадрату расстояния. Однако векторный характер законов совершенно различен.

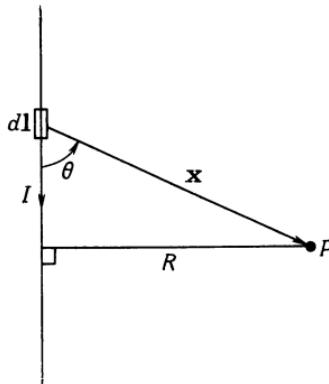
Если поле создается не током, а одиночным зарядом q , движущимся со скоростью v , то магнитная индукция будет равна¹⁾

$$\mathbf{B} = kq \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = k\mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad (5.5)$$

где \mathbf{E} — электростатическое поле заряда q . В этом случае магнитная индукция оказывается зависящей от времени. В настоящей главе мы далее ограничимся рассмотрением лишь стационарных токов.

¹⁾ Это соотношение справедливо лишь для частиц, движущихся со скоростями, много меньшими скорости света.

Постоянная k в формулах (5.4) и (5.5) зависит от выбора системы единиц; этот вопрос подробно рассмотрен в приложении. При измерении тока в электростатических единицах, а магнитной индукции в электромагнитных единицах постоянная оказывается равной $k = 1/c$, где c , как было экспериментально установлено, совпадает со скоростью света в вакууме ($c = 2,998 \cdot 10^{10}$ см/сек). Такая система единиц называется гауссовой. Введение скорости света в уравнения



Ф и г. 5.2.

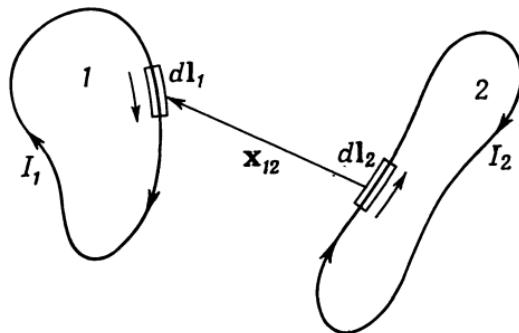
на данной стадии рассмотрения представляется довольно искусственным, однако имеет то преимущество, что единицы заряда и тока согласованы, благодаря чему уравнение непрерывности (5.2) записывается в простом виде, без коэффициента c . Далее мы будем пользоваться исключительно гауссовой системой единиц.

Предполагая, что справедлив принцип линейной суперпозиции полей, можно записать основной закон (5.4) в интегральном виде и найти магнитную индукцию для различных конфигураций токонесущих проводов. Например, вектор магнитной индукции \mathbf{B} длинного прямого провода (фиг. 5.2), по которому течет ток I , как легко видеть, направлен нормально плоскости, содержащей провод и точку наблюдения. Таким образом, силовые линии магнитной индукции представляют собой концентрические окружности, описанные вокруг провода. Величина вектора \mathbf{B} определяется формулой

$$|\mathbf{B}| = \frac{IR}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{2I}{cR}, \quad (5.6)$$

где R — расстояние от точки наблюдения до провода. Этот результат, впервые экспериментально найденный Био и Саваром, известен как закон Био и Савара. Заметим, что зависимость величины магнитной индукции \mathbf{B} от R имеет тот же вид, как и зависимость

напряженности электрического поля протяженного линейного заряда с однородной линейной плотностью. Эта аналогия показывает, что в некоторых отношениях можно установить соответствие между электростатическими и магнитостатическими задачами, несмотря на различный векторный характер полей. В последующих параграфах мы еще больше убедимся в этом. Эксперименты Ампера не ставили целью непосредственное установление связи между токами и магнитной индукцией, а касались скорее исследования



Фиг. 5.3. К взаимодействию двух витков тока.

силы, действующей на токонесущий провод в присутствии другого тока. Но поскольку мы уже ввели понятие поля магнитной индукции, создаваемого элементом тока, закон сил можно выразить, определив силу, действующую на элемент тока $I_1 d\mathbf{l}_1$ в поле магнитной индукции \mathbf{B} . Элементарная сила оказывается равной

$$d\mathbf{F} = \frac{I_1}{c} (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}), \quad (5.7)$$

где I_1 — ток в элементе $d\mathbf{l}_1$ (измеряемый в электростатических единицах), \mathbf{B} — магнитная индукция (в электромагнитных единицах), а c — скорость света. Если внешнее поле \mathbf{B} создается замкнутым контуром тока (витком) 2 с током I_2 , то полная сила, испытываемая витком 1 с током I_1 , согласно (5.4) и (5.7), выражается формулой

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3}. \quad (5.8)$$

Линейные интегралы берутся здесь вдоль контуров токов; \mathbf{x}_{12} — радиус-вектор, проведенный от элемента длины $d\mathbf{l}_2$ к $d\mathbf{l}_1$, как показано на фиг. 5.3. Приведенное соотношение является математической формулировкой результатов опытов Ампера по исследованию сил взаимодействия замкнутых витков тока. Преобразуя в (5.8) подынтегральное выражение, можно привести интеграл к виду, симметричному относительно $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$, откуда явно следует

выполнение третьего закона Ньютона:

$$\frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3} = - (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \frac{\mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} + d\mathbf{l}_2 \left(\frac{d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \right). \quad (5.9)$$

Второе слагаемое содержит полный дифференциал в интеграле по $d\mathbf{l}_1$. Следовательно, оно не дает вклада в интеграл (5.8), если путь интегрирования замкнут или уходит на бесконечность. В результате формула Ампера для силы взаимодействия между витками тока принимает вид

$$\mathbf{F}_{12} = - \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3}. \quad (5.10)$$

Здесь очевидна симметрия относительно переменных интегрирования, а также требуемая векторная зависимость от радиус-вектора \mathbf{x}_{12} ¹⁾.

На единицу длины каждого из двух находящихся на расстоянии d длинных параллельных прямых проводников с токами I_1 и I_2 действует сила, направленная по нормали ко второму проводу и равная по величине

$$F = \frac{2I_1 I_2}{c^2 d}. \quad (5.11)$$

Это — сила притяжения, если токи текут в одинаковых направлениях, и сила отталкивания при противоположных направлениях токов. Исходя из силы взаимодействия проводников с током, можно определить величину магнитной индукции, не используя представления о постоянных магнитных диполях²⁾. Ниже мы увидим, что выражения для вращающего момента (5.1) и для силы (5.7) тесно связаны между собой.

Если ток с плотностью $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ находится во внешнем магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, то полная сила, действующая на ток, в соответствии с выражением (5.7) для элементарной силы оказывается равной

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x. \quad (5.12)$$

Совершенно аналогично для полного вращающего момента имеем

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3x. \quad (5.13)$$

В § 6 эти общие результаты будут применены к ограниченным распределениям тока.

¹⁾ Имеется в виду, что в этой формулировке сила взаимодействия элементов тока направлена по прямой, соединяющей эти элементы. — Прим. ред.

²⁾ Фактически выражение (5.11) и служит основой для принятого международного стандарта тока (см. приложение).

§ 3. Дифференциальные уравнения магнитостатики и закон Ампера

Основное соотношение (5.4) для вектора магнитной индукции можно переписать в общем виде для объемного распределения тока с плотностью $\mathbf{J}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'. \quad (5.14)$$

Это выражение для $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ является магнитным аналогом выражения для напряженности электрического поля через плотность заряда

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \varrho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'. \quad (5.15)$$

Приведенное выражение для \mathbf{E} в некоторых случаях менее удобно, чем дифференциальные уравнения; точно так же соотношение (5.14) не очень удобно, хотя в принципе оно и содержит описание всех явлений магнитостатики.

Для получения дифференциальных уравнений, эквивалентных (5.14), преобразуем это выражение к виду

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.16)$$

Из (5.16) сразу следует, что дивергенция \mathbf{B} равна нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5.17)$$

Это соотношение является первым уравнением магнитостатики и соответствует уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ электростатики. По аналогии с электростатикой вычислим ротор \mathbf{B} :

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.18)$$

С помощью векторного тождества $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$, справедливого для произвольного векторного поля \mathbf{A} , можно преобразовать выражение (5.18) к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} = & \frac{1}{c} \operatorname{grad} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' - \\ & - \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Используя соотношения

$$\operatorname{grad} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -\operatorname{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

и

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

можно переписать интегралы в (5.19) следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \operatorname{grad} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \operatorname{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (5.20)$$

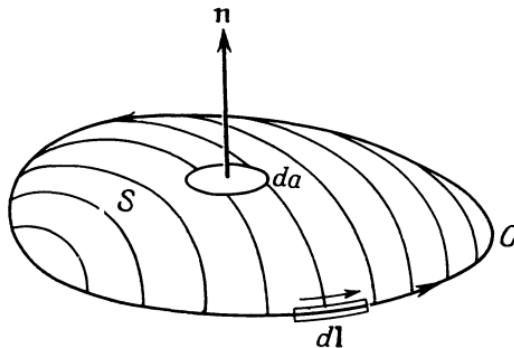
Интегрирование по частям дает

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div}' \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.21)$$

Для стационарных магнитных явлений $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$; таким образом, окончательно получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (5.22)$$

Это — второе уравнение магнитостатики, соответствующее уравнению $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\varrho$ в электростатике.



Ф и г. 5.4.

В электростатике интегральной формой уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\varrho$ является теорема Гаусса (1.11). Интегральный эквивалент уравнения (5.22) называют законом Ампера. Его можно получить, применив теорему Стокса к интегралу от нормальной составляющей (5.22) по поверхности S , ограниченной замкнутым контуром C (фиг. 5.4). При этом

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} da = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (5.23)$$

преобразуется к виду

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da. \quad (5.24)$$

Так как поверхностный интеграл от плотности тока равен полному току I , протекающему через поверхность, ограниченную замкнутым контуром C , закон Ампера может быть переписан в виде

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (5.25)$$

Теорема Гаусса позволяет вычислять электрические поля в задачах с высокой степенью симметрии; совершенно так же может быть использован в аналогичных магнитных задачах закон Ампера.

§ 4. Векторный потенциал

Основные законы магнитостатики в дифференциальной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Задача состоит в решении этих уравнений. Если плотность тока в исследуемой области равна нулю, то $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ и мы можем записать вектор магнитной индукции \mathbf{B} как градиент магнитного скалярного потенциала: $\mathbf{B} = -\text{grad } \Phi_M$. Уравнения (5.26) сводятся при этом к уравнению Лапласа для Φ_M , для решения которого могут быть использованы все методы, развитые при рассмотрении электростатических задач. Задач такого типа очень много, но мы пока отложим их рассмотрение до конца главы. Дело в том, что граничные условия в данном случае отличаются от принятых в электростатике, причем в магнитостатических задачах обычно приходится иметь дело с макроскопическими средами, магнитные свойства которых не совпадают с характеристиками свободного пространства с зарядами и токами.

В общем случае при решении системы (5.26) исходят из того, что, поскольку $\text{div } \mathbf{B} = 0$ во всех точках, индукция \mathbf{B} должна быть ротором некоторого вектора $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, называемого векторным потенциалом:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (5.27)$$

Фактически вектор \mathbf{B} уже представлен в такой форме в выражении (5.16). Как очевидно из (5.16), в общем виде вектор \mathbf{A} равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \text{grad } \Psi(\mathbf{x}). \quad (5.28)$$

Наличие второго слагаемого — градиента произвольной скалярной функции Ψ — означает, что при заданной магнитной индук-

ции \mathbf{B} векторный потенциал можно всегда преобразовывать согласно соотношению

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Psi. \quad (5.29)$$

Указанное преобразование называют обычно *калибровочным*. Такое преобразование вектора \mathbf{A} допустимо, потому что (5.27) определяет лишь ротор \mathbf{A} . Для полного же определения векторного поля необходимо знать как его ротор, так и дивергенцию. Возможность калибровочного преобразования позволяет произвольным образом задать $\operatorname{div} \mathbf{A}$.

Подставляя (5.27) в первое из уравнений (5.26), получаем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \text{или} \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Воспользовавшись теперь свободой, допускаемой соотношением (5.29), удобно принять $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ¹⁾. При этом каждая декартова составляющая векторного потенциала будет удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (5.31)$$

Учитывая полученные в электростатике результаты, легко видеть, что в неограниченном пространстве \mathbf{A} представляется соотношением (5.28) с $\Psi = 0$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.32)$$

Условие $\Psi = 0$ может быть объяснено следующим образом. Из принятого соотношения $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ следует, что $\nabla^2 \Psi = 0$, так как дивергенция от первого слагаемого в (5.28) равна нулю в силу уравнения $\operatorname{div}' \mathbf{J} = 0$. Но если $\nabla^2 \Psi = 0$ во всем пространстве, то функция Ψ тождественно равна нулю.

§ 5. Векторный потенциал и магнитная индукция кругового витка тока

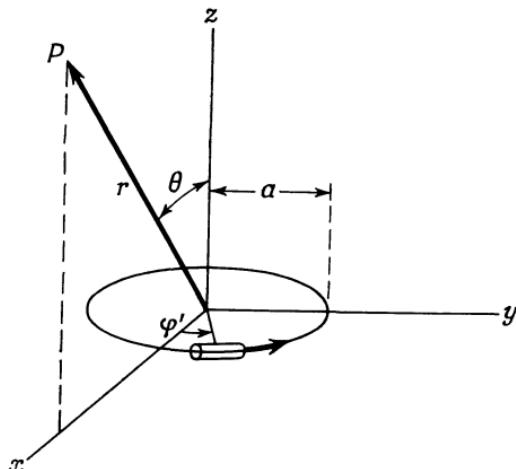
В качестве примера расчета магнитного поля данного распределения токов рассмотрим задачу о расположенному в плоскости xy круговом витке тока радиусом a с центром в начале координат, по которому течет полный ток I (фиг. 5.5). При этом вектор плот-

¹⁾ Указанный выбор называют обычно *кулоновской калибровкой* по причине, которая выяснится в гл. 6, § 5.

ности тока \mathbf{J} имеет единственную отличную от нуля составляющую

$$J_\varphi = I\delta(\cos \theta') \frac{\delta(r' - a)}{a}. \quad (5.33)$$

Наличие δ -функций соответствует распределению тока лишь вдоль окружности радиусом a . Если \mathbf{J} имеет лишь φ -составляющую,



Ф и г. 5.5.

то и векторный потенциал \mathbf{A} имеет лишь составляющую в направлении φ . Однако эту составляющую A_φ нельзя вычислить непосредственно, подставляя J_φ в (5.32). Соотношение (5.32) справедливо лишь для декартовых составляющих \mathbf{A} ^{1, 2)}.

Составляющие \mathbf{J} в прямоугольных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} J_x &= -J_\varphi \sin \varphi', \\ J_y &= J_\varphi \cos \varphi'. \end{aligned} \quad (5.34)$$

В силу цилиндрической симметрии задачи можно при вычислениях выбрать точку наблюдения в плоскости xz ($\varphi = 0$). При этом, очевидно, x -составляющая векторного потенциала равна нулю

¹⁾ Причина этого состоит в том, что векторное уравнение Пуассона (5.31) сводится к трем независимым скалярным уравнениям $\nabla^2 A_i = -(4\pi/c)J_i$ лишь для декартовых составляющих A_i, J_i . При разложении вектора \mathbf{A} на ортогональные составляющие с единичными векторами, зависящими от координат, дифференциальный оператор в (5.31) связывает все составляющие, так что получается система связанных уравнений; см. книгу Морса и Фешбаха [77].

²⁾ Здесь автор выражается неточно. Векторное уравнение (5.32) справедливо при разложении \mathbf{A} и \mathbf{J} по любым ортогональным единичным векторам, но в декартовой (и только в декартовой) системе координат составляющие A_i и J_i связаны уравнением того же типа.— Прим. ред.

и остается лишь y -составляющая, равная A_ϕ . Таким образом,

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{I}{ca} \int r'^2 dr' d\Omega' \frac{\cos \varphi' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (5.35)$$

где

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = [r^2 + r'^2 - 2rr' (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi')]^{1/2}.$$

Найдем сначала A_ϕ , непосредственно вычислив интеграл (5.35). Используя свойства δ -функции, мы приедем к следующему результату:

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{Ia}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{(a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi')^{1/2}}. \quad (5.36)$$

Полученный интеграл можно выразить через полные эллиптические интегралы K и E :

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{4Ia}{c \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta}} \left[\frac{(2 - k^2) K(k) - 2E(k)}{k^2} \right], \quad (5.37)$$

где аргумент эллиптических интегралов определяется выражением

$$k^2 = \frac{4ar \sin \theta}{a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta}.$$

Составляющие вектора магнитной индукции, равные

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi), \\ B_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi), \\ B_\phi &= 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

также могут быть выражены через эллиптические интегралы, однако получающиеся выражения не обладают достаточной наглядностью (хотя и полезны для вычислительных целей).

При малых k^2 , соответствующих $a \gg r$, $a \ll r$ или $\theta \ll 1$, выражение в квадратных скобках в (5.37) сводится к $\pi k^2 / 16$. Векторный потенциал оказывается при этом приближенно равным

$$A_\phi(r, \theta) \approx \frac{I\pi a^2}{c} \frac{r \sin \theta}{(a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta)^{3/2}}. \quad (5.39)$$

Соответствующие выражения для составляющих поля имеют вид

$$\begin{aligned} B_r &\approx \frac{I\pi a^2}{c} \cos \theta \frac{2a^2 + 2r^2 + ar \sin \theta}{(a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta)^{5/2}}, \\ B_\theta &\approx -\frac{I\pi a^2}{c} \sin \theta \frac{2a^2 - r^2 + ar \sin \theta}{(a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Эти выражения легко упростить для трех областей: вблизи оси ($\theta \ll 1$), вблизи центра витка ($r \ll a$) и вдали от витка ($r \gg a$). Особенный интерес представляет поле вдали от витка:

$$\begin{aligned} B_r &= 2 \frac{I\pi a^2}{c} \frac{\cos \theta}{r^3}, \\ B_\theta &= \frac{I\pi a^2}{c} \frac{\sin \theta}{r^3}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Сравнение с электростатическим полем диполя (4.12) показывает, что магнитное поле вдали от кругового витка тока имеет дипольный характер. По аналогии с электростатикой определим магнитный дипольный момент витка выражением

$$m = \frac{I\pi a^2}{c}. \quad (5.42)$$

В следующем параграфе будет показано, что полученнное соотношение является частным случаем общего результата: поле ограниченного распределения токов на больших расстояниях имеет дипольный характер; магнитный момент плоского замкнутого линейного тока равен произведению площади ограниченной током части плоскости на I/c .

Хотя мы нашли полное решение задачи, выразив поле через эллиптические интегралы, решим ту же задачу с помощью разложения по сферическим гармоникам, что позволит выявить сходство и различие магнитостатической и электростатической задач. Для этого обратимся снова к выражению (5.35) и подставим вместо величины $|x - x'|^{-1}$ ее разложение (3.70) по сферическим гармоникам

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{4\pi I}{ca} \operatorname{Re} \sum_{l,m} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{2l+1} \times \\ &\times \int r'^2 dr' d\Omega' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a) e^{i\varphi'} \frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi'). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Наличие множителя $e^{i\varphi'}$ в подынтегральном выражении означает, что отличны от нуля лишь слагаемые с $m = 1$. Следовательно,

$$A_\varphi = \frac{8\pi^2 I a}{c} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{Y_{l1}(\theta, \varphi)}{2l+1} \frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} \left[Y_{l+1}^*(\theta', \varphi') e^{i\varphi'} \right], \quad (5.44)$$

где $r'_<$ и $r'_>$ — соответственно меньшая и большая из величин a и r .

Величина в квадратных скобках — это число, зависящее от номера l :

$$\begin{aligned} [] &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} P_l(0) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{для четных } l, \\ \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} \left[\frac{(-1)^{n+1} \Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1) \Gamma(3/2)} \right] & \text{для } l = 2n+1. \end{cases} \quad (5.45) \end{aligned}$$

Таким образом, A_φ можно представить в виде

$$A_\varphi = -\frac{\pi I a}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (n+1)!} \frac{r^{2n+1}}{r^{2n+2}} P_{2n+1}^1(\cos \theta), \quad (5.46)$$

где $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1$, а коэффициент члена суммы с $n=0$, по определению, равен единице. Для вычисления радиальной составляющей вектора \mathbf{B} согласно (5.38) воспользуемся равенством

$$\frac{d}{dx} [V \sqrt{1-x^2} P_l(x)] = l(l+1) P_l(x). \quad (5.47)$$

В результате получим

$$B_r = \frac{2\pi I a}{cr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{2^n n!} \frac{r^{2n+1}}{r^{2n+2}} P_{2n+1}^1(\cos \theta). \quad (5.48)$$

Совершенно аналогично для составляющей B_θ найдем

$$\begin{aligned} B_\theta = -\frac{\pi I a^2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{2^n (n+1)!} \times \\ \times \left\{ -\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) \frac{1}{a^3} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \right. \\ \left. \frac{1}{r^3} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \right\} P_{2n+1}^1(\cos \theta), \quad (5.49) \end{aligned}$$

где верхнее выражение в фигурных скобках соответствует $r < a$, а нижнее $r > a$. При $r \gg a$ существен лишь член с $n=0$. При этом в силу равенства $P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta$ выражения (5.48) и (5.49) сводятся к (5.41). Для $r \ll a$ основной вклад в сумму также дает член с $n=0$. Магнитная индукция оказывается при этом равной $2\pi I / ac$ и направленной вдоль оси z ; этот результат можно было бы получить и элементарным расчетом.

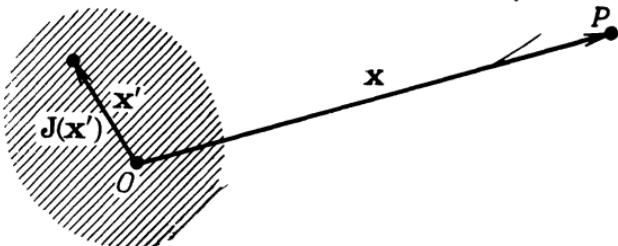
Укажем на характерное отличие рассмотренной проблемы от соответствующей электростатической задачи с цилиндрической симметрией. В проведенном анализе наряду с обычными полиномами Лежандра встречаются и присоединенные функции Лежандра. Это обусловлено векторным характером тока и векторного потен-

циала в противоположность скалярным свойствам заряда и электростатического потенциала.

Задачу о линейном круговом токе можно решать и с помощью разложения по цилиндрическим функциям. Тогда для $|x - x'|^{-1}$ вместо представления (3.70) следует использовать соответствующие разложения по цилиндрическим функциям (3.148) и (3.149). Применение этого метода к расчету поля кругового линейного тока мы отнесем к задачам. Применение цилиндрических функций вообще полезно при произвольном распределении тока, имеющего лишь ф-составляющую.

§ 6. Магнитное поле ограниченного распределения токов. Магнитный момент

Рассмотрим свойства произвольного распределения тока, локализованного в малой области пространства; при этом «малость»



Ф и г. 5.6. К расчету магнитного поля в точке P с координатой x , создаваемого ограниченным распределением тока $J(x')$.

определяется сравнением с некоторой характерной длиной, интересующей наблюдателя. Адекватный анализ этой задачи, аналогичный разложению электростатического поля по мультипольям, требует применения *векторных* сферических гармоник. Соответствующее рассмотрение будет проведено в гл. 16 в связи с исследованием мультипольного излучения. Здесь же мы ограничимся лишь получением приближения низшего порядка. Разложим множитель $1/|x - x'|$ в выражении (5.32) по степеням радиуса-вектора x' , отсчитываемого от начала координат, выбранного в области распределения токов (фиг. 5.6):

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{|x|} + \frac{x \cdot x'}{|x|^3} + \dots \quad (5.50)$$

В результате для декартовых составляющих векторного потенциала получаются разложения

$$A_i(x) = \frac{1}{c|x|} \int J_i(x') d^3x' + \frac{x}{c|x|^3} \cdot \int J_i(x') x' d^3x' + \dots \quad (5.51)$$

Для ограниченного стационарного распределения тока интеграл от \mathbf{J} по объему равен нулю, так как $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Следовательно, первый член разложения, соответствующий полному заряду в электростатике, обращается в нуль.

Подынтегральное выражение во втором слагаемом можно, используя формулу для тройного векторного произведения, представить в более удобной форме:

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}' - \mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}). \quad (5.52)$$

Можно показать, что интеграл по объему от первого слагаемого в правой части (5.52) равен взятому с обратным знаком интегралу от левой части. Действительно, рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int J_j x'_i d^3 x' &= \int \operatorname{div}' (x'_j \mathbf{J}) x'_i d^3 x' = \\ &= - \int x'_j (\mathbf{J} \cdot \operatorname{grad}') x'_i d^3 x' = - \int x'_j J_i d^3 x'. \end{aligned} \quad (5.53)$$

При переходе от первого интеграла ко второму учтено равенство $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$; последующие выражения получены интегрированием по частям. Таким образом, учитывая (5.53), можно представить интеграл от (5.52) в виде

$$\int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} (\mathbf{x}') d^3 x' = -\frac{1}{2} \mathbf{x} \times \int [\mathbf{x}' \times \mathbf{J} (\mathbf{x}')] d^3 x'. \quad (5.54)$$

Определим магнитный момент распределения тока \mathbf{J} выражением

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J} (\mathbf{x}') d^3 x'. \quad (5.55)$$

Иногда удобно интерпретировать подынтегральное выражение в (5.55) как плотность магнитного момента, или намагниченность. Обозначим намагниченность, обусловленную распределением тока \mathbf{J} , через

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c} (\mathbf{x} \times \mathbf{J}). \quad (5.56)$$

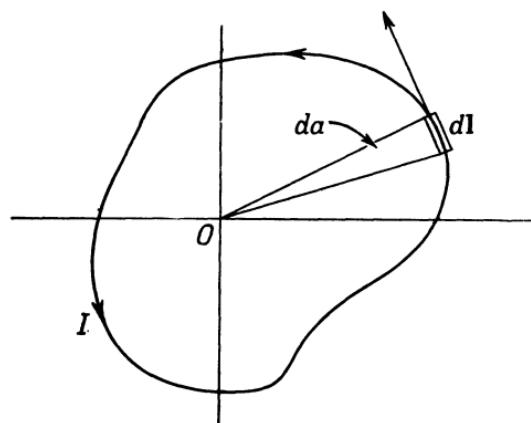
Векторный потенциал (5.51) может быть выражен через магнитный момент \mathbf{m} :

$$\mathbf{A} (\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (5.57)$$

Это — наимизший отличный от нуля член разложения векторного потенциала \mathbf{A} для ограниченного стационарного распределения тока. Вектор магнитной индукции \mathbf{B} может быть найден непосредственно вычислением ротора от (5.57):

$$\mathbf{B} (\mathbf{x}) = \frac{3n(n \cdot m) - m}{|\mathbf{x}|^3} + 4\pi m \delta (\mathbf{x}), \quad (5.58)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{x} . Поскольку формулы (5.57) и (5.58) справедливы лишь вне распределения токов, член с δ -функцией можно опустить. Выражение для магнитной индукции (5.58) в точности совпадает с формулой (4.13) для поля электрического диполя. Полученное выражение является обобщением найденного в предыдущем параграфе выражения для поля кругового витка тока. Вдали от любого ограниченного распределения тока вектор магнитной индукции совпадает с магнитной индукцией диполя с магнитным моментом (5.55).



Ф и г. 5.7.

Если ток течет по плоскому витку произвольной формы, то магнитный момент можно представить в весьма простом виде. Для тока I , текущего по замкнутому контуру с элементом длины $d\mathbf{l}$, выражение (5.55) принимает вид

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \oint \mathbf{x} \times d\mathbf{l}. \quad (5.59)$$

Для плоского витка (фиг. 5.7) магнитный момент нормален плоскости контура. Поскольку $(\mathbf{x} \times d\mathbf{l}) = da$, где da — площадь элементарного треугольника, образованного радиусами-векторами, проведенными из начала отсчета к обоим концам элемента длины $d\mathbf{l}$, то интеграл (5.59) вдоль контура равен полной площади, ограниченной контуром. В результате величина магнитного момента оказывается равной

$$|\mathbf{m}| = \frac{I}{c} \cdot (\text{Площадь}) \quad (5.60)$$

независимо от формы контура.

Если ток обусловлен движением системы заряженных частиц с зарядами q_i и массами M_i со скоростями \mathbf{v}_i , то магнитный момент

может быть выражен через момент количества движения частиц. Плотность тока равна

$$\mathbf{J} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (5.61)$$

где \mathbf{x}_i — радиус-вектор i -й частицы. Магнитный момент (5.55) оказывается в этом случае равным

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i). \quad (5.62)$$

Векторное произведение $(\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i)$ пропорционально моменту количества движения i -й частицы $\mathbf{L}_i = M_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i)$. Таким образом, выражение (5.62) принимает вид

$$\mathbf{m} = \sum_i \frac{q_i}{2M_i c} \mathbf{L}_i. \quad (5.63)$$

Если отношение заряда частицы к ее массе одинаково для всех движущихся частиц ($q_i/M_i = e/M$), то магнитный момент системы может быть выражен через *полный* момент количества движения \mathbf{L} :

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2Mc} \sum_i \mathbf{L}_i = \frac{e}{2Mc} \mathbf{L}. \quad (5.64)$$

Мы получили известное классическое соотношение, связывающее момент количества движения и магнитный момент, справедливое для орбитального движения даже в атомных масштабах. Однако это классическое соотношение перестает выполняться для собственного момента электронов и других элементарных частиц. Для электронов собственный магнитный момент несколько превышает удвоенное значение величины, определяемой соотношением (5.64), с заменой \mathbf{L} на спиновый момент количества движения \mathbf{S} . Мы говорим, что для электрона g -фактор равен 2·1,00117. Отличие магнитного момента электрона от его классического значения обусловлено релятивистскими и квантовомеханическими эффектами, которые мы здесь рассматривать не можем.

§ 7. Сила и момент, действующие на ограниченное распределение тока во внешнем магнитном поле

Ограниченнное распределение тока, находящееся во внешнем магнитном поле с вектором индукции $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, испытывает действие сил и вращающих моментов, возникающих в соответствии с законами Ампера. Общие выражения для полной силы и момента даются соотношениями (5.12) и (5.13). Если в области, занятой токами,

внешнее магнитное поле медленно меняется от точки к точке, то основной вклад в силу и врачающий момент можно найти, используя разложение в ряд Тейлора. Составляющие \mathbf{B} могут быть представлены вблизи некоторого надлежащим образом выбранного начала отсчета в виде разложений

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_i(0) + \mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{B}_i(0) + \dots \quad (5.65)$$

Выражение для силы (5.12) принимает при этом вид

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{c} \mathbf{B}(0) \times \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times [(\mathbf{x}' \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B}(0)] d^3x' + \dots \quad (5.66)$$

Интеграл по объему от \mathbf{J} для стационарных токов равен нулю, поэтому наименьший порядок малости будет иметь член разложения с градиентом \mathbf{B} . Поскольку подынтегральное выражение, кроме $\operatorname{grad} \mathbf{B}$, содержит еще \mathbf{J} и \mathbf{x} , можно ожидать, что интеграл удастся выразить через магнитный момент (5.55). Воспользуемся для этого равенствами

$$\mathbf{J} \times [(\mathbf{x}' \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B}] = \mathbf{J} \times \operatorname{grad} (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}) = -\operatorname{rot} [\mathbf{J}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B})]. \quad (5.67)$$

Здесь учтено, что $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ для внешнего поля и что оператор градиента действует лишь на вектор \mathbf{B} . Таким образом, выражение силы можно переписать в виде

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}) d^3x' + \dots \quad (5.68)$$

Можно далее воспользоваться векторным тождеством (5.54), заменив в нем фиксированный вектор \mathbf{x} на \mathbf{B} . В результате получим

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{m}) = (\mathbf{m} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} = \operatorname{grad} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}), \quad (5.69)$$

где \mathbf{m} — магнитный момент, определяемый соотношением (5.55). Второе представление для силы в (5.69) получается при учете равенства $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, третье — при учете соотношения $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$.

Таким образом, на ограниченное распределение тока в неоднородном магнитном поле действует сила, пропорциональная магнитному моменту этого тока \mathbf{m} и определяемая выражением (5.69). В качестве простого приложения полученного результата можно определить среднее по времени значение силы, которая действует на заряженную частицу, движущуюся по спирали в неоднородном магнитном поле. Как известно, заряженная частица в однородном магнитном поле движется по окружности в плоскости, нормальной к полю, сохраняя постоянную скорость в направлении поля; траекторией движения частицы является, таким образом, спираль. В среднем по времени круговое движение эквивалентно линейному

круговому току с магнитным моментом, определяемым соотношением (5.60). Если же поле не однородно, а обладает малым градиентом (таким, что на одном витке спиральной траектории величина поля меняется незначительно), то можно считать, что движение частицы определяется силой, действующей на эквивалентный магнитный момент. Анализ знаков момента и силы показывает, что независимо от знака заряда заряженные частицы выталкиваются из области с более высокой плотностью магнитного потока. На этом эффекте основано действие так называемых магнитных зеркал, рассматриваемых с другой точки зрения в гл. 12, § 10.

Аналогичным образом, подставляя в (5.13) разложение (5.65), можно найти полный вращающий момент, действующий на ограниченное распределение тока. При этом уже нулевой член разложения оказывается отличным от нуля.

Удерживая лишь главный член разложения, получаем

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int \mathbf{x}' \times [\mathbf{J} \times \mathbf{B}(0)] d^3x'. \quad (5.70)$$

Раскрывая тройное векторное произведение, находим

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int [(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}) \mathbf{J} - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{B}] d^3x'. \quad (5.71)$$

Первый интеграл совпадает с рассмотренным ранее [см. (5.68)], так что его значение можно написать сразу. Второй интеграл для стационарного ограниченного распределения тока обращается в нуль, что следует из векторного тождества

$$\operatorname{div}(\mathbf{x}^2 \mathbf{J}) = 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}) + x^2 \operatorname{div} \mathbf{J}.$$

В результате главный член разложения для вращающего момента принимает вид

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(0). \quad (5.72)$$

Это уже знакомое нам выражение для вращающего момента, действующего на диполь, введенное в § 1 при рассмотрении способов определения величины и направления вектора магнитной индукции.

Потенциальную энергию постоянного магнитного момента (или магнитного диполя) во внешнем магнитном поле можно найти, исходя как из выражения для силы (5.69), так и из выражения для вращающего момента (5.72). Рассматривая силу как взятый с обратным знаком градиент потенциальной энергии U , находим

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (5.73)$$

Для магнитного диполя, находящегося в однородном поле, вращающий момент (5.72) можно интерпретировать как взятую с обратным знаком производную U по углу между векторами \mathbf{B} и \mathbf{m} . Этот известный результат отражает тот факт, что диполь стремится ориентироваться в направлении магнитного поля и принять положение с наименьшей потенциальной энергией.

В заключение заметим, что выражение (5.73) не определяет полную энергию магнитного момента во внешнем поле. При внесении диполя \mathbf{m} на занимаемое им место в магнитном поле следует еще совершить работу по поддержанию тока \mathbf{J} , обеспечивающего постоянство момента \mathbf{m} . Несмотря на то что конечное состояние стационарно, его установлению предшествует некоторый переходный процесс, в течение которого поля меняются во времени. Этот процесс лежит вне рамок настоящего исследования. Поэтому окончательное обсуждение вопроса об энергии магнитного поля следует отложить до гл. 6, § 2, когда уже будет рассмотрен закон индукции Фарадея.

§ 8. Макроскопические уравнения

Рассмотренные до сих пор соотношения (5.17) и (5.22) для стационарных магнитных полей следует понимать как микроскопические уравнения в том смысле, как это объяснено в гл. 4. Мы считали плотность тока \mathbf{J} известной функцией координат. В макроскопических задачах это часто оказывается несправедливым. Имеющиеся в атомах вещества электроны создают эффективные атомные токи, плотность которых очень быстро флуктуирует. Известными и имеющими смысл можно считать лишь их значения, усредненные по макроскопическому объему. Кроме того, электроны обладают собственными магнитными моментами, которые нельзя выразить через плотность электронного тока. Эти магнитные моменты могут создавать дипольные поля, также весьма быстро меняющиеся в пределах атома.

Чтобы учесть магнитные свойства атомов, мы поступим так же, как и в гл. 4, § 3. Вывод макроскопических уравнений мы изложим здесь вкратце. Несколько более полное изложение будет дано в гл. 6, § 10. Дело в том, что в переменных по времени полях часть атомного тока обусловлена временной производной от поляризации \mathbf{P} , так что для полного рассмотрения атомного тока необходимо перейти к общему случаю полей, зависящих от времени.

Полную плотность тока можно разделить на две части:

- плотность тока проводимости \mathbf{J} , обусловленную истинным перемещением зарядов;
- плотность атомных токов \mathbf{J}_a , характеризующую токи, циркулирующие внутри атомов и молекул.

Соответственно полный векторный потенциал складывается из двух членов:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}_a(\mathbf{x}') d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (5.74)$$

Мы используем здесь обозначение \mathbf{a} (вместо \mathbf{A}) для микроскопического векторного потенциала подобно тому, как в гл. 4 мы обозначали через \mathbf{e} микроскопическое электрическое поле.

Для определения вклада атомных токов рассмотрим сначала отдельную молекулу, а затем произведем усреднение по всем молекулам. Рассмотрение проводится в точности так же, как и в § 6 этой главы для ограниченного распределения тока. Для молекулы с центром в точке \mathbf{x}_j векторный потенциал в точке \mathbf{x} приближенно равен

$$\mathbf{a}_{\text{мол}}(\mathbf{x}) = \frac{[\mathbf{m}_{\text{мол}} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3}. \quad (5.75)$$

Чтобы наряду с орбитальными моментами учесть и собственные магнитные моменты электронов, будем считать $\mathbf{m}_{\text{мол}}$ общим молекулярным магнитным моментом. Если теперь просуммировать по всем молекулам и усреднить, как в гл. 4, § 3, то получим следующее выражение для макроскопического векторного потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'; \quad (5.76)$$

здесь $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ — макроскопическая намагниченность (т. е. магнитный момент единицы объема), определяемая соотношением

$$\mathbf{M} = N \langle \mathbf{m}_{\text{мол}} \rangle, \quad (5.77)$$

где N — число молекул в единичном объеме.

Вклад намагниченности в векторный потенциал \mathbf{A} можно представить в более удобной форме

$$\int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' = \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'. \quad (5.78)$$

Используя далее тождество $\text{rot}(\varphi \mathbf{M}) = [\text{grad} \varphi \times \mathbf{M}] + \varphi \text{rot} \mathbf{M}$, мы получаем

$$\int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' = \int \frac{\text{rot}' \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' - \int \text{rot}' \left(\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'. \quad (5.79)$$

Последний интеграл может быть преобразован в поверхностный интеграл от $(\mathbf{n} \times \mathbf{M})/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ и обращается в нуль при достаточно хорошем математическом поведении \mathbf{M} , если токи локализованы внутри конечного объема. Заменяя последний член соотношения

(5.76) первым членом правой части соотношения (5.79), мы можем записать векторный потенциал в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') + c \operatorname{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.80)$$

Мы видим, что намагниченность вносит в векторный потенциал такой же вклад, как и ток с эффективной плотностью:

$$\mathbf{J}_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (5.81)$$

При выводе соотношения (5.80) был сделан один шаг, который требует разъяснения. Он заключается в использовании дипольного векторного потенциала (5.75) для всех молекул, включая и расположенные в окрестности точки \mathbf{x} . Для молекул, находящихся внутри сферы с центром в точке \mathbf{x} и радиусом порядка нескольких молекулярных диаметров d , векторный потенциал существенно отличается от дипольного выражения (5.75) и имеет гораздо менее резко выраженную особенность. Таким образом, в (5.80) влияние молекул, находящихся внутри этой сферы, вычислено неправильно. Чтобы оценить влияние этих молекул, заметим, что величина векторного потенциала, создаваемого единицей объема вблизи точки \mathbf{x} , равна $|\operatorname{rot} \mathbf{M}|/R$, в то время как объем шарового слоя, ограниченного поверхностями с радиусами R и $R + dR$, равен $4\pi R^2 dR$. Следовательно, ошибка в оценке влияния непосредственной окрестности точки \mathbf{x} на вектор \mathbf{A} имеет величину порядка $d^2 |\operatorname{rot} \mathbf{M}| \sim \sim (d^2/L) \langle M \rangle$, где L — характерный макроскопический масштаб изменения \mathbf{M} . Поскольку полный векторный потенциал имеет величину порядка $\langle M \rangle L$, то относительная ошибка при использовании дипольного приближения для всех точек по порядку величины равна d^2/L^2 . Она пренебрежимо мала, пока макроскопическая длина L не становится микроскопической. Однако в последнем случае весь вывод теряет силу.

Для получения макроскопического эквивалента уравнения (5.22) запишем \mathbf{B} , пользуясь соотношением (5.80), или, что то же самое, заменим в (5.22) \mathbf{J} на полный ток ($\mathbf{J} + \mathbf{J}_M$):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (5.82)$$

Член $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ можно объединить с \mathbf{B} . При этом мы получим новую макроскопическую характеристику \mathbf{H} , называемую *магнитным полем*¹⁾:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}. \quad (5.83)$$

¹⁾ В дальнейшем, там где это не внесет путаницы, мы часто будем называть магнитным полем также и индукцию \mathbf{B} . — Прим. ред.

При этом макроскопические уравнения, заменяющие (5.26), записутся в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Введение \mathbf{H} в качестве макроскопического поля полностью эквивалентно введению \mathbf{D} для электрического поля. Электростатическим аналогом уравнений (5.84) являются уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Подчеркнем, что основными полями являются \mathbf{E} и \mathbf{B} . Они удовлетворяют однородным уравнениям систем (5.84) и (5.85). Производные поля \mathbf{D} и \mathbf{H} введены для удобства и учитывают в среднем вклад в ρ и \mathbf{J} атомных зарядов и токов.

По аналогии с диэлектриком следует ожидать, что свойства магнитной среды также можно описать с помощью небольшого числа констант, характеризующих данное вещество. В простейшем случае мы можем предположить, что \mathbf{B} и \mathbf{H} пропорциональны друг другу:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (5.86)$$

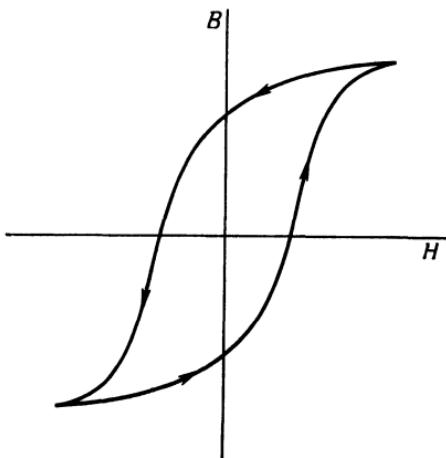
Характеризующая вещество постоянная μ называется *магнитной проницаемостью*¹⁾. Такое простое соотношение справедливо только для неферромагнитных материалов. Однако для этих немагнитных веществ μ обычно отличается от единицы лишь на величину порядка 10^{-5} ($\mu > 1$ для парамагнитных и $\mu < 1$ для диамагнитных веществ). Для ферромагнитных материалов вместо (5.86) имеет место нелинейная функциональная связь

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}(\mathbf{H}). \quad (5.87)$$

Явление гистерезиса показывает, что \mathbf{B} является неоднозначной функцией \mathbf{H} , как это видно из фиг. 5.8. Фактически значение функции $\mathbf{F}(\mathbf{H})$ зависит от истории вещества. В связи с этим引进ится дифференциальная магнитная проницаемость $\mu(\mathbf{H})$, которая определяется как производная от \mathbf{B} по \mathbf{H} , в предложении, что

¹⁾ Аналогом электростатического соотношения $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, выражающим производную величину \mathbf{D} через основную величину \mathbf{E} , было бы соотношение $\mathbf{H} = \mu' \mathbf{B}$. Однако по традиции используется соотношение (5.86). Некоторым основанием для этого является то, что для большинства веществ μ больше единицы, что, возможно, более удобно, чем использование величины μ' , которая меньше единицы.

В и **H** параллельны. Для веществ, обладающих высокой магнитной проницаемостью, $\mu(H)$ может достигать величин порядка 10^6 . У большинства необработанных ферромагнитных материалов в очень малых полях наблюдается линейная зависимость (5.86) между **В** и **H**. Обычные величины начальной магнитной проницаемости лежат в интервале от 10 до 10^4 .



Фиг. 5.8. Петля гистерезиса, характеризующая зависимость **B** от **H** в ферромагнетике.

Сложная связь между **В** и **H** в ферромагнитных материалах приводит к специфическим трудностям при решении граничных задач магнитного поля по сравнению с аналогичными задачами электростатики. Однако в ряде случаев благодаря очень большой величине магнитной проницаемости можно ввести упрощающие предположения в граничные условия. В § 9 мы непосредственно займемся этими вопросами.

§ 9. Граничные условия для магнитной индукции и поля

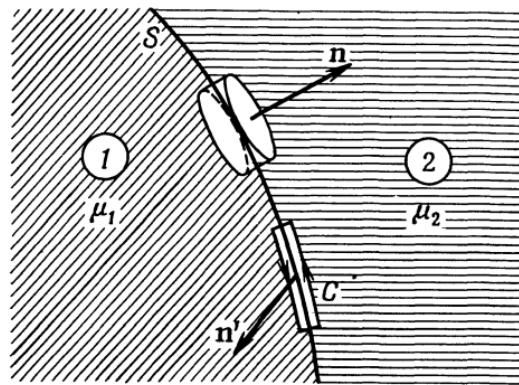
Для решения граничных задач магнитостатики необходимо прежде всего установить граничные условия, которым удовлетворяют **В** и **H** на поверхности раздела двух сред с различными магнитными свойствами. Расположим на граничной поверхности элементарный цилиндрический объем таким образом, чтобы торцевые плоскости находились в областях 1 и 2 и были параллельны граничной поверхности *S*, как показано на фиг. 5.9.

Применяя теорему Гаусса и соотношение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, получаем

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (5.88)$$

где \mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности раздела, направленная из области 1 в область 2, а индексы означают, что данная величина берется на поверхности S в одной из двух сред.

Рассмотрим теперь элементарный (также изображенный на фиг. 5.9) контур C площадью S , нормаль \mathbf{n}' к которому параллельна



Ф и г. 5.9.

поверхности раздела. Применяя теорему Стокса к первому из уравнений (5.84), получаем

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}' da. \quad (5.89)$$

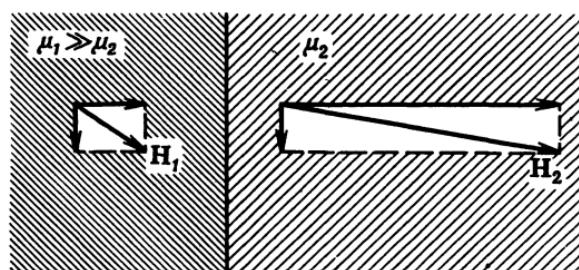
При ширине контура, стремящейся к нулю, линейный интеграл дает разность тангенциальных составляющих \mathbf{H} в обеих средах, а поверхностный интеграл пропорционален плотности поверхностного тока \mathbf{K} [заряд/(длина \times время)]. Таким образом, из (5.89) получаем соотношения

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{n}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{K}, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}. \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

Выразим эти граничные условия через \mathbf{H} и магнитную проницаемость μ . Предполагая для простоты, что поверхностные токи отсутствуют, получаем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n} &= \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}. \end{aligned} \right\} \quad (5.91)$$

Если $\mu_1 \gg \mu_2$, то нормальная составляющая \mathbf{H}_2 много больше нормальной составляющей \mathbf{H}_1 , как показано на фиг. 5.10. В пределе $(\mu_1/\mu_2) \rightarrow \infty$ магнитное поле \mathbf{H}_2 становится перпендикулярным граничной поверхности независимо от направления \mathbf{H}_1 (кроме особого случая, когда поле \mathbf{H}_1 строго параллельно поверхности раздела). Таким образом, граничные условия для \mathbf{H} на поверхности материальных тел с очень большой магнитной проницаемостью совпадают с граничными условиями для электрического поля



Ф и г. 5.10.

на поверхности проводников. Это позволяет использовать теорию электростатического потенциала и для магнитного поля. Поверхности тел из вещества с большой магнитной проницаемостью являются приближенно «эквипотенциальными», а силовые линии \mathbf{H} перпендикулярны этим эквипотенциальным поверхностям. Указанная аналогия часто используется при проектировании магнитов. Задается конфигурация поля, а профиль полюсных наконечников магнита выбирается так, чтобы он совпадал с эквипотенциальной поверхностью.

§ 10. Однородно намагниченный шар

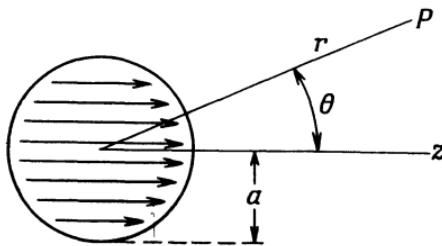
Для иллюстрации различных методов, которые применяются при решении граничных задач магнитостатики, рассмотрим простую задачу о помещенном в немагнитную среду шаре радиусом a (фиг. 5.11) с однородной постоянной намагниченностью \mathbf{M} , равной M_0 по величине и направленной вдоль оси z ($\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_3$). Вне шара $\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$. Следовательно, при $r > a$ вектор $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ можно записать как взятый с обратным знаком градиент скалярного магнитного потенциала, удовлетворяющего уравнению Лапласа:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_e &= -\operatorname{grad} \Phi_M, \\ \nabla^2 \Phi_M &= 0. \end{aligned} \tag{5.92}$$

Общее решение для потенциала, удовлетворяющее условию $\mathbf{B} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\Phi_M(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}}. \quad (5.93)$$

На предыдущих примерах мы уже убедились, что в этом разложении часто отличны от нуля только несколько первых членов, иногда даже лишь один член с $l = 1$.



Ф и г. 5.11.

Внутри намагниченного тела уравнения (5.92), вообще говоря, неприменимы, так как $\text{rot } \mathbf{B} \neq 0$. Для рассматриваемой простой задачи это не приводит к трудностям, поскольку, согласно (5.83), \mathbf{B} , \mathbf{H} и \mathbf{M} в отсутствие приложенных полей параллельны.

Следовательно, мы можем положить

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= B_0 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{H}_i &= (B_0 - 4\pi M_0) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Границные условия на поверхности сферы требуют непрерывности B_r и H_θ . Поэтому, согласно (5.92) — (5.94), получаем

$$\begin{aligned} B_0 \cos \theta &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1) a_l P_l(\cos \theta)}{a^{l+2}}, \\ -(B_0 - 4\pi M_0) \sin \theta &= - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{a^{l+2}} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Очевидно, в этих разложениях не равны нулю только члены с $l = 1$. Находим неизвестные постоянные a_1 и B_0 :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4\pi}{3} M_0 a^3, \\ B_0 &= \frac{8\pi}{3} M_0. \end{aligned} \quad (5.96)$$

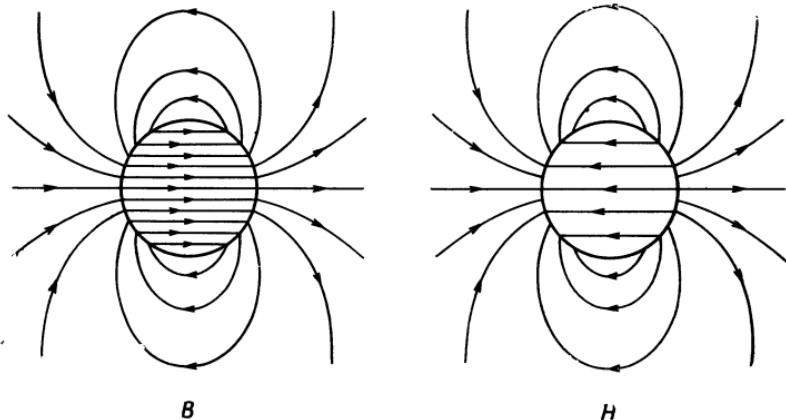
Итак, поле вне сферы совпадает с полем диполя (5.41) с дипольным моментом

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{M}, \quad (5.97)$$

а внутренние поля выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= \frac{8\pi}{3} \mathbf{M}, \\ \mathbf{H}_i &= -\frac{4\pi}{3} \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Заметим, что индукция \mathbf{B}_i параллельна намагниченности \mathbf{M} , в то время как поле \mathbf{H}_i антипараллельно \mathbf{M} . Силовые линии \mathbf{B} и \mathbf{H}



Фиг. 5.12. Линии \mathbf{B} и \mathbf{H} для однородно намагниченного шара.

Линии \mathbf{B} являются замкнутыми кривыми, а линии \mathbf{H} начинаются на поверхности шара, где расположены «магнитные заряды» — $\operatorname{div} \mathbf{M}$.

изображены на фиг. 5.12. Линии \mathbf{B} образуют непрерывные замкнутые петли, а линии \mathbf{H} оканчиваются на поверхности шара. Таким образом, на поверхности как бы сосредоточены «магнитные заряды». Эти фиктивные заряды связаны с дивергенцией намагниченности шара (см. ниже).

Решение как внутри, так и вне сферы можно получить также и из теории электростатического потенциала, если рассматривать не \mathbf{B} , а \mathbf{H} . При этом следует исходить из уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= -4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Эти уравнения показывают, что \mathbf{H} — потенциальный вектор, а $-\operatorname{div} \mathbf{M}$ можно рассматривать как плотность магнитных зарядов.

Полагая $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Phi_M$, находим

$$\nabla^2 \Phi_M = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}. \quad (5.100)$$

Так как намагниченность \mathbf{M} постоянна по величине и направлению, ее дивергенция внутри сферы равна нулю. Однако следует учесть скачок \mathbf{M} на границе сферы, поскольку вне сферы \mathbf{M} обращается в нуль. Запишем решение уравнения (5.100) внутри и вне сферы в виде

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = - \int \frac{\operatorname{div}' \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.101)$$

Отсюда, используя векторное тождество $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{M}) = \mathbf{M} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{M}$, получаем

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = - \int \operatorname{div}' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \cdot \operatorname{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'. \quad (5.102)$$

Первый интеграл обращается в нуль при интегрировании по произвольному объему, содержащему шар. Заменяя производную по \mathbf{x}' производной по \mathbf{x} в соответствии с правилом $\operatorname{grad}' \rightarrow -\operatorname{grad}$, справедливым для любой функции от $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, мы можем записать скалярный потенциал в виде

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = -\operatorname{div} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = -\operatorname{div} \left[M_0 \mathbf{e}_3 \int_0^a r'^2 dr' \int d\Omega' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]. \quad (5.103)$$

Вклад в интеграл дает только первый член разложения $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$, соответствующий $l = 0$; поэтому

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = -4\pi M_0 \operatorname{div} \left[\mathbf{e}_3 \int_0^a \frac{r'^2 dr'}{r'} \right]. \quad (5.104)$$

Значение этого интеграла зависит от того, где находится точка наблюдения — внутри или вне сферы. Легко видеть, что

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{4\pi M_0 a^2}{3} \left(\frac{r_<}{r_>} \right) \cos \theta, \quad (5.105)$$

где $r_<$ и $r_>$ — соответственно меньшая и большая из величин r и a . Потенциал (5.105) описывает вне шара поле магнитного диполя

с моментом (5.97), а внутри шара — постоянное поле \mathbf{H}_i [см. (5.98)] в согласии с первым методом решения задачи¹⁾.

В заключение мы решим эту задачу, используя всегда применимый векторный потенциал. Согласно (5.80), векторный потенциал определяется соотношением

$$\oint \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{\text{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (5.106)$$

Поскольку \mathbf{M} внутри сферы имеет постоянную величину, ротор \mathbf{M} везде равен нулю. Однако аналогично предыдущему следует учесть влияние скачка \mathbf{M} на границе сферы. Воспользовавшись (5.79), мы видим, что \mathbf{A} можно представить поверхностным интегралом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = - \int \text{rot}' \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right] d^3x' = \oint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} da'. \quad (5.107)$$

Величину $c(\mathbf{M} \times \mathbf{n})$ можно рассматривать как поверхностную плотность тока. Отметим, что эквивалентность однородной намагниченности внутри некоторого объема поверхностному току с плотностью $c(\mathbf{M} \times \mathbf{n})$ на поверхности этого объема является общим результатом для объемов произвольной формы. Эта эквивалентность часто оказывается полезной при рассмотрении полей, создаваемых постоянными магнитами.

В случае сферы, когда вектор \mathbf{M} направлен вдоль оси z , вектор $(\mathbf{M} \times \mathbf{n})$ имеет только азимутальную составляющую

$$(\mathbf{M} \times \mathbf{n})_\varphi = M_0 \sin \theta'. \quad (5.108)$$

Для удобства расчета будем считать, что точка наблюдения лежит в плоскости xz (так же как в § 5). Отличной от нуля будет только y -составляющая вектора — $(\mathbf{n} \times \mathbf{M})$. Таким образом, азимутальная составляющая векторного потенциала равна

$$A_\varphi(\mathbf{x}) = M_0 a^2 \int d\Omega' \frac{\sin \theta' \cos \varphi'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \quad (5.109)$$

где точка \mathbf{x}' имеет координаты (a, θ', φ') . Зависящий от углов множитель можно представить в виде

$$\sin \theta' \cos \varphi' = - \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \operatorname{Re} [Y_{1,1}(\theta', \varphi')]. \quad (5.110)$$

¹⁾ Вывод соотношений (5.105) из (5.101) можно провести и более просто. Легко видеть, что для однородно намагниченного шара $\operatorname{div} \mathbf{M} = -M_0 \cos \theta \delta(r-a)$. Подстановка этого выражения в (5.101) при использовании (3.70) прямо приводит к (5.105). Однако соотношение (5.103) представляется полезным для более сложных распределений намагниченности.

Соответственно в разложении (3.70) для $|x - x'|$ сохраняются только члены с $l = 1$, $m = 1$, и мы получим

$$A_\varphi(x) = \frac{4\pi}{3} M_0 a^2 \left(\frac{r_-}{r_+} \right) \sin \theta, \quad (5.111)$$

где r_- и r_+ — меньшая и большая из величин r и a . Если векторный потенциал \mathbf{A} имеет только одну φ -составляющую, то магнитная индукция \mathbf{B} выражается формулами (5.38). Очевидно, в согласии с полученным выше результатом выражение (5.111) дает однородное поле \mathbf{B} внутри сферы и дипольное поле снаружи.

Примененные здесь различные методы иллюстрируют возможные подходы к решению задач магнитостатики, в частности, с заданным распределением намагниченности. Метод скалярного потенциала применим только в том случае, когда токи отсутствуют. Для решения же общих задач при наличии токов необходимо использовать векторный потенциал (за исключением некоторых случаев простой геометрии, где могут применяться различные специальные методы).

§ 11. Намагниченный шар во внешнем поле. Постоянные магниты

В § 10 мы рассмотрели поле, создаваемое однородно намагниченным шаром. Исходя из линейности уравнений поля, мы можем добавить к этому полю магнитную индукцию $\mathbf{B}_0 = \mathbf{H}_0$, однородную во всем пространстве. Тогда мы приходим к задаче об однородно намагниченном шаре во внешнем магнитном поле. Согласно (5.98), магнитная индукция \mathbf{B} и магнитное поле \mathbf{H} внутри шара оказываются в этом случае соответственно равными

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= \mathbf{B}_0 + \frac{8\pi}{3} \mathbf{M}, \\ \mathbf{H}_i &= \mathbf{B}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Представим теперь, что шар не является постоянным магнитом, а представляет собой парамагнетик или диамагнетик с магнитной проницаемостью μ . Намагниченность \mathbf{M} возникает в нем в результате действия внешнего поля. Для нахождения \mathbf{M} используем соотношение

$$\mathbf{B}_i = \mu \mathbf{H}_i. \quad (5.113)$$

Отсюда

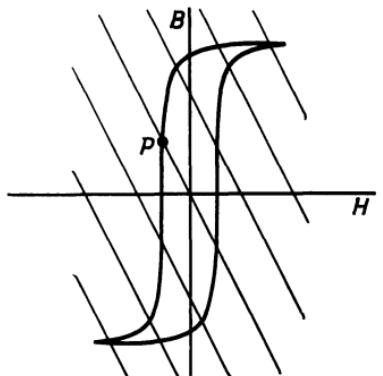
$$\mathbf{B}_0 + \frac{8\pi}{3} \mathbf{M} = \mu \left(\mathbf{B}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} \right) \quad (5.114)$$

и, следовательно, вектор намагниченности равен

$$\mathbf{M} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathbf{B}_0. \quad (5.115)$$

Отметим полную аналогию с выражением (4.63) для вектора поляризации \mathbf{P} диэлектрического шара в однородном электрическом поле.

Для ферромагнитных веществ приведенные выше результаты неприменимы. Действительно, из уравнения (5.115) следует, что при выключении внешнего поля намагниченность обращается в нуль. Однако этому выводу противоречит существование постоянных



Ф и г. 5.13.

магнитов. Возможность существования тел с постоянной намагниченностью связана с нелинейной зависимостью (5.87) и явлением гистерезиса. Исключив \mathbf{M} из (5.112), получим соотношение между \mathbf{H}_i и \mathbf{B}_i :

$$\mathbf{B}_i + 2\mathbf{H}_i = 3\mathbf{B}_0. \quad (5.116)$$

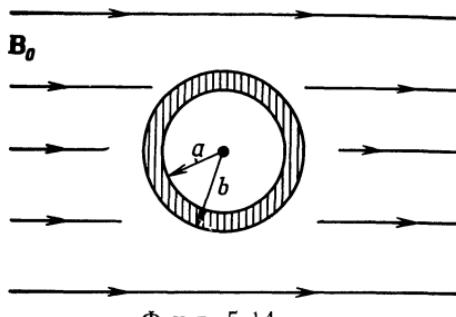
Другое соотношение между \mathbf{B}_i и \mathbf{H}_i дает гистерезисная кривая. Таким образом, для любого внешнего поля мы можем найти соответствующую величину внутреннего поля. Уравнение (5.116) изображается на гистерезисной диаграмме прямыми линиями, имеющими тангенс угла наклона, равный -2 , и пересекающими ось y в точке $3B_0$ (фиг. 5.13). Предположим, например, что внешнее поле возвращается до тех пор, пока ферромагнитный шар не будет намагничен до насыщения, а затем уменьшается до нуля. Внутренние поля B и H определяются при этом точкой P на фиг. 5.13, а намагниченность можно определить из (5.112) при $\mathbf{B}_0 = 0$.

Соотношение (5.116), устанавливающее связь между \mathbf{B}_i и \mathbf{H}_i , характерно только для шара. Для других геометрических фигур имеют место другие соотношения. Задача об эллипсоиде может быть

решена точно. В этом случае тангенс угла наклона линий (5.116) изменяется от нуля для случая плоского диска до $-\infty$ для тонкого иглообразного эллипсоида. Таким образом, в случае тонких стержней получается большая остаточная намагниченность, чем для шара или сплющенного эллипса.

§ 12. Магнитное экранирование. Сферическая оболочка из магнитного материала в однородном поле

Пусть в некоторой области свободного пространства задано некоторое начальное магнитное поле \mathbf{B}_0 . Если мы внесем в эту область магнитное тело, то силовые линии магнитной индукции



Ф и г. 5.14.

как-то изменятся. Как следует из соображений, приведенных в конце § 9 и касающихся веществ с очень высокой магнитной проницаемостью, можно предполагать, что силовые линии будут стремиться расположиться нормально к поверхности тела. Проводя дальнейшую аналогию с проводниками в электростатике, мы можем ожидать, что в случае полого тела поле внутри полости будет меньше внешнего поля и при $\mu \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю. Такой способ уменьшения полей называется *магнитной экранировкой*. Магнитная экранировка имеет большое практическое значение, поскольку создание областей, свободных от поля, часто бывает необходимо как для экспериментальных целей, так и для обеспечения надежной работы электронных устройств.

Для выяснения сущности явления магнитной экранировки рассмотрим в качестве примера сферическую оболочку с внутренним радиусом a и внешним радиусом b из материала с магнитной проницаемостью μ , помещенную в однородное постоянное магнитное поле \mathbf{B}_0 , как показано на фиг. 5.14. Нашей целью является нахождение зависимости полей \mathbf{B} и \mathbf{H} от μ во всем пространстве, и в первую очередь внутри полости $r < a$. Так как токов нет, то магнитное поле \mathbf{H} можно описать скалярным потенциалом: $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Phi_m$.

Далее, поскольку $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, то из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ вытекает, что $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ во всех областях и, следовательно, потенциал Φ_M везде удовлетворяет уравнению Лапласа. Таким образом, задача сводится к определению подходящих решений уравнения Лапласа в различных областях, удовлетворяющих граничным условиям (5.88) и (5.90) при $r = a$ и $r = b$.

В области $r > b$ потенциал следует взять в виде

$$\Phi_M = -B_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (5.117)$$

поскольку это выражение приводит к однородному полю $\mathbf{H} = \mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ на больших расстояниях. Для внутренних областей общие выражения для потенциала имеют вид

$$\begin{aligned} a < r < b: \quad \Phi_M &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_l r^l + \gamma_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta), \\ r < a: \quad \Phi_M &= \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l r^l P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (5.118)$$

Границные условия при $r = a$ и $r = b$ требуют непрерывности H_θ и B_r . Выраженные через потенциал Φ_M , эти условия дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(b_+) &= \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(b_-), & \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(a_+) &= \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(a_-), \\ \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(b_+) &= \mu \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(b_-), & \mu \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(a_+) &= \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(a_-). \end{aligned} \quad (5.119)$$

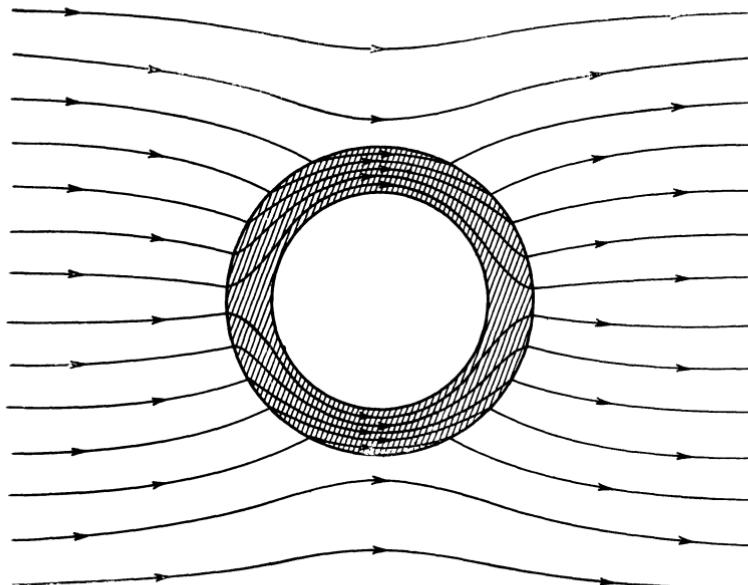
Здесь аргумент b_{\pm} указывает, что значение функции берется соответственно при приближении r к b со стороны больших и меньших значений; аналогичный смысл имеет a_{\pm} . Четыре условия (5.119), которые должны выполняться для всех углов θ , достаточны для определения неизвестных постоянных в (5.117) и (5.118). Мы видим, что все коэффициенты с $l \neq 1$ равны нулю, а коэффициенты с $l = 1$ удовлетворяют системе четырех уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 - b^3 \beta_1 - \gamma_1 &= b^3 B_0, \\ 2a_1 + \mu b^3 \beta_1 - 2\mu \gamma_1 &= -b^3 B_0, \\ a^3 \beta_1 + \gamma_1 - a^3 \delta_1 &= 0, \\ \mu a^3 \beta_1 - 2\mu \gamma_1 - a^3 \delta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5.120)$$

Разрешая эти уравнения относительно a_1 и δ_1 , получаем

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[\frac{(2\mu+1)(\mu-1)}{(2\mu+1)(\mu+2)-2\frac{a^3}{b^3}(\mu-1)^2} \right] (b^3 - a^3) B_0, \\ \delta_1 &= - \left[\frac{9\mu}{(2\mu+1)(\mu+2)-2\frac{a^3}{b^3}(\mu-1)^2} \right] B_0. \end{aligned} \quad (5.121)$$

Потенциал вне сферической оболочки описывает суперпозицию однородного поля B_0 и поля (5.41), создаваемого диполем с момен-



Фиг. 5.15. Экранирующее действие оболочки из материала с большой магнитной проницаемостью.

том a_1 , ориентированным вдоль B_0 . Внутри полости имеется однородное магнитное поле, параллельное B_0 и равное по величине $-\delta_1$. При $\mu \gg 1$ дипольный момент a_1 и внутреннее поле $-\delta_1$ приближенно записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1 &\approx b^3 B_0, \\ -\delta_1 &\approx \frac{9}{2\mu \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right)} B_0. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Выражения (5.122) показывают, что внутреннее поле убывает пропорционально μ^{-1} . Следовательно, оболочка, сделанная из мате-

риала с большой магнитной проницаемостью $\mu \sim 10^3 - 10^6$, даже при сравнительно небольшой толщине значительно ослабляет поле внутри нее. На фиг. 5.15 показано поведение силовых линий **B**. Мы видим, что силовые линии как бы стремятся по возможности идти через вещество с высокой магнитной проницаемостью.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Задачи о постоянных токах в среде с сопротивлением аналогичны потенциальным задачам электростатики с той лишь разницей, что электрическая индукция заменяется плотностью тока, а диэлектрическая проницаемость — проводимостью. Однако граничные условия, вообще говоря, различны. Постоянные токи рассматриваются в книгах Джинса [55], гл. 9, 10, и Смайта [100], гл. 6.

Магнитные поля, создаваемые различными распределениями токов, и граничные задачи магнитостатики с большим количеством примеров рассматриваются у Дюрана [37], гл. 14 и 15, и Смайта [100], гл. 7 и 12.

Атомная теория магнитных свойств вещества относится к области квантовой механики. Полуклассическое рассмотрение дано в книге Беккера [6], Дюрана [37], гл. 17, Ландау и Лифшица [64], Розенфельда [86], гл. 4.

Квантовомеханическое рассмотрение проводится в работах, посвященных электрическим и магнитным свойствам вещества, например в книге Ван Флека [113].

Дополнение редактора. Изложение физических основ магнитостатики можно найти в книге Тамма [130].

ЗАДАЧИ

5.1. Исходя из дифференциального выражения

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \frac{dl \times \mathbf{x}}{x^3}$$

для магнитной индукции, создаваемой элементом тока Idl , показать, что для замкнутого контура, несущего ток I , магнитная индукция в точке наблюдения P выражается формулой

$$\mathbf{B} = -\frac{I}{c} \operatorname{grad} \Omega,$$

где Ω — телесный угол, под которым контур виден из точки P . (Это одна из возможных форм закона Ампера для контуров с током.)

5.2. а) Соленоид имеет N витков на единицу длины; ток через них равен I . Показать, что плотность магнитного потока на оси приближенно выражается формулой

$$B_z \approx \frac{2\pi NI}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2),$$

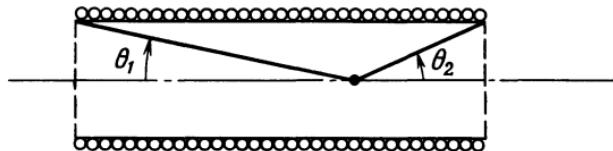
где углы θ_1 и θ_2 определены на фиг. 5.16.

б) Показать, что для длинного соленоида длиной L и радиусом a магнитное поле вблизи оси и в окрестности центра соленоида в основном парал-

лько оси, но имеет малую радиальную компоненту, равную

$$B_\rho \approx \frac{96\pi NI}{c} \frac{a^2 z Q}{L^4}.$$

Это выражение справедливо с точностью до величин $\sim a^2/L^2$ при $z \ll L$, $Q \ll a$. Координата z отсчитывается от центра соленоида.



Ф и г. 5.16.

в) Показать, что на конце соленоида магнитное поле вблизи оси имеет составляющие

$$B_z \approx \frac{2\pi NI}{c}, \quad B_\rho \approx \frac{\pi NI}{c} \frac{Q}{a}.$$

5.3. В цилиндрическом проводнике радиусом a просверлен круглый канал радиусом b , ось которого параллельна оси цилиндра и расположена от нее на расстоянии d ($d + b < a$). По металлической части цилиндра течет однородный ток, направленный вдоль оси. Используя закон Ампера и принцип суперпозиции, найти величину и направление магнитного поля в канале.

5.4. Круглый виток с током I расположен в плоскости xy , а его центр совпадает с началом координат.

а) Показать, что магнитное поле можно описать векторным потенциалом, имеющим лишь одну составляющую

$$A_\varphi(Q, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty dk \cos kz I_1(kQ_-) K_1(kQ_+),$$

где Q_- и Q_+ — соответственно меньшая и большая из величин Q и a .

б) Показать, что векторный потенциал может быть также представлен в виде

$$A_\varphi(Q, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty dk e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(kQ).$$

в) Написать интегральные выражения для составляющих магнитного поля, используя векторные потенциалы, приведенные в п. «а» и «б». Получить явное выражение для составляющих \mathbf{B} на оси путем вычисления соответствующих интегралов.

5.5. Два круглых витка с общим центром и радиусами a и b ($b < a$), по которым текут соответственно токи I и I' , расположены таким образом, что угол между их плоскостями равен α . Показать, что на каждый виток действует врачающий момент вокруг линии пересечения плоскостей вит-

ков, равный

$$N = \frac{2\pi^2 II' b^2}{ac^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left[\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+2) \Gamma(3/2)} \right]^2 \left(\frac{b}{a} \right)^{2n} P_{2n+1}^1(\cos \alpha),$$

где $P_1^1(\cos \alpha)$ — присоединенные функции Лежандра. Определить направление вращающего момента, считая угол α острый, а токи имеющими как одинаковое, так и противоположное направление.

5.6. Сфера с равномерно распределенным поверхностным зарядом вращается вокруг своего диаметра a с постоянной угловой скоростью ω . Найти векторный потенциал и магнитное поле внутри и вне сферы.

5.7. Длинный полый круглый цилиндр с внутренним радиусом a и внешним радиусом b , имеющий магнитную проницаемость μ , помещают в область с первоначально однородным полем \mathbf{B}_0 перпендикулярно этому полю. Определить магнитное поле во всем пространстве и построить график зависимости логарифма отношения величины \mathbf{B} на оси цилиндра к \mathbf{B}_0 от $\lg \mu$ для $a^2/b^2 = 0,5$ и $0,1$. Краевыми эффектами пренебречь.

5.8. В среде с магнитной проницаемостью, равной единице, примыкающей к полупространству $z < 0$ с магнитной проницаемостью μ , задано некоторое распределение токов $\mathbf{J}(\mathbf{x})$.

а) Показать, что магнитное поле в области $z > 0$ можно определить, заменив магнитную среду в области $z < 0$ токами-изображениями \mathbf{J}^* , имеющими составляющие

$$\frac{\mu-1}{\mu+1} J_x(x, y, -z), \quad \frac{\mu-1}{\mu+1} J_y(x, y, -z), \quad -\frac{\mu-1}{\mu+1} J_z(x, y, -z).$$

б) Показать, что магнитная индукция в области $z < 0$ соответствует распределению токов $2\mu/(\mu+1) \mathbf{J}$ в среде с единичной магнитной проницаемостью.

5.9. Круглый виток радиусом a с током I расположен в свободном пространстве, а его центр находится на расстоянии d от границы полупространства с магнитной проницаемостью μ . Определить силы, действующие на виток в случаях, когда:

а) плоскость витка параллельна границе магнетика,

б) плоскость витка перпендикулярна границе магнетика,

в) найти предельные выражения для сил «а» и «б» при $d \gg a$. Можно ли получить эти предельные величины с помощью какого-либо простого прямого метода?

5.10. Прямой круглый цилиндр длиной L и радиусом a изготовлен из «магнитно твердого» материала. Он имеет постоянную намагниченность M_0 , однородную по объему и параллельную его оси.

а) Определить магнитное поле \mathbf{H} и магнитную индукцию \mathbf{B} во всех точках на оси цилиндра как внутри, так и вне него.

б) Построить график зависимости от z отношений $\mathbf{B}/4\pi M_0$ и $\mathbf{H}/4\pi M_0$ на оси для $L/a = 5$.

5.11. а) Исходя из выражения (5.12) и учитывая, что намагниченность \mathbf{M} эквивалентна распределению тока с плотностью $J_M = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$, показать, что в отсутствие макроскопических токов на тело с намагниченностью \mathbf{M} действует сила

$$\mathbf{F} = - \int (\operatorname{div} \mathbf{M}) \mathbf{B}_e d^3x,$$

где \mathbf{B}_e — магнитная индукция, обусловленная всеми токами, кроме J_M .

6) Показать, что выражение для силы можно представить также в виде

$$\mathbf{F} = - \int (\operatorname{div} \mathbf{M}) \mathbf{H} d^3x,$$

где \mathbf{H} — полное магнитное поле, включающее и поле, создаваемое самим намагниченным телом.

5.12. Пусть магнитостатическое поле создается только заданным распределением постоянной намагниченности.

а) Показать, что

$$\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d^3x = 0,$$

если интеграл берется по всему пространству.

б) Используя выражение (5.73) для потенциальной энергии диполя во внешнем поле, показать, что магнитостатическую энергию для непрерывного распределения постоянной намагниченности можно записать в виде

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} d^3x = -\frac{1}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} d^3x.$$

Здесь опущена аддитивная постоянная, которая не зависит от ориентации и положения отдельных намагниченных тел.

5.13. Показать, что длинный прямой стержень с постоянным поперечным сечением A и однородной продольной намагниченностью M , приставленный торцом к плоской поверхности тела с бесконечной магнитной проницаемостью, притягивается к нему с силой, приближенно равной

$$F \approx 2\pi A M^2.$$

5.14. Прямой круглый цилиндр длиной L и радиусом a имеет однородную продольную намагниченность M .

а) Показать, что, будучи приставлен торцом к плоской поверхности с бесконечной магнитной проницаемостью, он притягивается к ней с силой

$$F = 8\pi a L M^2 \left[\frac{K(k) - E(k)}{k} - \frac{K(k_1) - E(k_1)}{k_1} \right],$$

где

$$k = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + L^2}}, \quad k_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + L^2}}.$$

б) Найти предельное выражение для этой силы при $L \gg a$.