

Глава 6

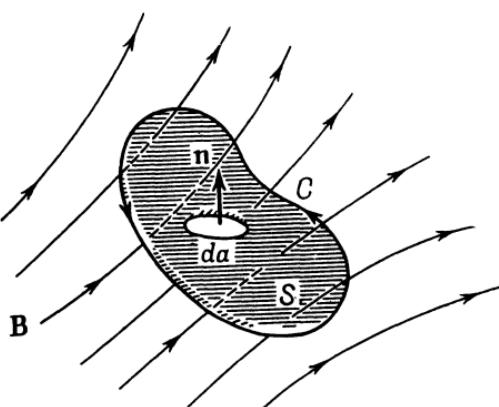
ПЕРЕМЕННЫЕ ВО ВРЕМЕНИ ПОЛЯ. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Выше мы рассматривали задачи с не зависящими от времени электрическими и магнитными полями. В обоих случаях применялись аналогичные математические методы, но электрические и магнитные явления рассматривались как независимые. Единственным связующим звеном был тот факт, что токи, создающие магнитные поля, имеют, по существу, электрическую природу, поскольку они обусловливаются движением зарядов. При рассмотрении же переменных во времени полей независимость электрических и магнитных явлений исчезает. При изменении во времени магнитного поля возникает электрическое поле, а изменение электрического поля порождает магнитное поле. В случае переменных полей мы имеем не электрическое и не магнитное поля в отдельности, а общее *электромагнитное поле*. Полное значение взаимосвязи между электрическим и магнитным полями и их фактическая тождественность объясняются по-настоящему лишь в специальной теории относительности (см. гл. 11). Здесь мы ограничимся исследованием основных физических явлений и установим систему уравнений, описывающих поведение электромагнитных полей, которые известны под названием *уравнений Максвелла*. Мы рассмотрим основные следствия из этих уравнений, заложив тем самым фундамент электродинамики. В последующих главах будут рассмотрены многочисленные следствия этих основных соотношений.

Мы вынуждены будем опустить ряд разделов, представляющих самостоятельный интерес, но достаточно полно изложенных в других руководствах. Сюда относятся, в частности, теория квазистационарных полей, теория цепей, расчет индуктивностей, вопросы, связанные с токами Фуко и индукционным нагревом. При рассмотрении всех этих проблем ни в одном случае не используются какие-либо новые понятия, кроме введенных в этой главе или в предыдущих. Интересующийся читатель может найти соответствующие литературные ссылки в конце главы.

§ 1. Закон индукции Фарадея

Первые количественные исследования связи переменных электрического и магнитного полей были проведены в 1831 г. Фарадеем при опытах с контурами, помещенными в переменное магнитное поле. Фарадей заметил, что в контуре индуцируется ток в случаях, когда а) в соседнем контуре включается или выключается постоянный ток, б) соседний контур с постоянным током движется относительно первого контура, в) внутрь контура вносится (или



Ф и г. 6.1.

из него выносится) постоянный магнит. Если ток в соседнем контуре не изменяется и не происходит относительного движения контуров, то никакого тока не возникает. Фарадей интерпретировал возникновение этих токов как следствие изменения магнитного потока, пронизывающего данный контур. Изменение потока индуцирует электрическое поле, линейный интеграл от которого, взятый вдоль контура, называется *электродвижущей силой* \mathcal{E} . Эта электродвижущая сила в соответствии с законом Ома и вызывает появление тока.

Представим наблюдения Фарадея в количественной математической форме. Рассмотрим поверхность S с единичной нормалью n , ограниченную контуром C , как показано на фиг. 6.1. Пусть контур C помещен в магнитное поле B . Тогда магнитный поток, пронизывающий контур, будет

$$F = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (6.1)$$

Электродвижущая сила в контуре определяется выражением

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}, \quad (6.2)$$

где \mathbf{E}' — электрическое поле на элементе $d\mathbf{l}$ контура C . Наблюдения Фарадея можно выразить математически в виде

$$\mathcal{E} = -k \frac{dF}{dt}. \quad (6.3)$$

Электродвижущая сила индукции в контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего данный контур. Знак определяется законом Ленца, утверждающим, что индуцированный ток (и соответствующий ему магнитный поток) имеет такое направление, что препятствует изменению потока сквозь контур.

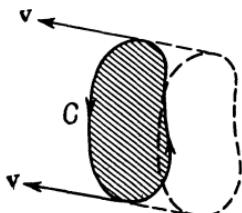
Коэффициент пропорциональности k зависит от выбора единиц измерения величин электрического и магнитного полей. Он не является, как это можно было бы предположить, независимой эмпирической постоянной, которую можно определить из эксперимента. Ниже мы увидим, что после выбора единиц и размерностей в законе Ампера величина и размерность k получаются из требования галилеевской инвариантности закона Фарадея. В гауссовых единицах $k = c^{-1}$, где c — скорость света.

До появления специальной теории относительности (да и после ее появления в случае, когда относительные скорости малы по сравнению со скоростью света) всегда подразумевалось, хотя подчас явно и не формулировалось, что все физические законы инвариантны относительно преобразований Галилея. Это означает, что физические явления протекают одинаково с точки зрения двух наблюдателей, движущихся с постоянной скоростью v относительно друг друга, если пространственные и временные координаты связаны преобразованием Галилея $x' = x + vt$, $t' = t$. Рассмотрим, в частности, опыты Фарадея. Как установлено экспериментально, в контуре возникают одинаковые токи независимо от того, движется ли этот контур относительно токонесущего контура или же он покоятся, а движется токонесущий контур, лишь бы их относительное движение в обоих случаях было одинаковым.

Рассмотрим теперь закон Фарадея для движущегося контура и посмотрим, к каким следствиям приводит галилеевская инвариантность. Выражая (6.3) через интегралы от \mathbf{E}' и \mathbf{B} , мы получаем

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da. \quad (6.4)$$

Наведенная в контуре электродвижущая сила пропорциональна *полной* производной по времени от магнитного потока, который может изменяться как при изменении магнитного поля, так и при изменении формы, ориентации или положения контура. Уравнение (6.4) является обобщением закона Фарадея. В качестве контура *C* мы можем представлять себе любую замкнутую геометрическую линию в пространстве, не обязательно совпадающую с электрическим контуром. При этом (6.4) дает связь между самими



Ф и г. 6.2.

полями. Следует, однако, иметь в виду, что электрическое поле \mathbf{E}' представляет собой электрическое поле в элементе $d\mathbf{l}$ в системе координат, в которой $d\mathbf{l}$ покоится; именно это поле вызывает появление тока в случае наличия реального контура в этом месте.

Если контур *C* движется со скоростью v в некотором направлении, как показано на фиг. 6.2, то при вычислении полной производной в (6.4) необходимо учесть это движение. Тогда поток через контур может изменяться вследствие изменения магнитного поля во времени, а также из-за того, что при перемещении контура изменяется положение его границы. Легко показать, что полная производная от потока через движущийся контур равна¹⁾

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da + \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.4) можно записать теперь в виде

$$\oint_C [\mathbf{E}' - k(\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{l} = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da. \quad (6.6)$$

¹⁾ Для произвольного векторного поля в (6.5) должен входить добавочный член $\int_S (\operatorname{div} \mathbf{B}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da$, который дает вклад от источников векторного поля, проходимых движущимся контуром. Этот общий результат легче всего получить при использовании материальной производной:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}.$$

Это уравнение описывает закон Фарадея в применении к движущемуся контуру C . Но мы можем интерпретировать его и иначе. Мы можем считать, что контур C и поверхность S занимают некоторое мгновенное положение в пространстве в лабораторной системе координат. Применяя закон Фарадея (6.4) к этому фиксированному контуру, находим

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da, \quad (6.7)$$

где \mathbf{E} — электрическое поле в лабораторной системе координат. Условие галилеевской инвариантности приводит к требованию равенства левых частей уравнений (6.6) и (6.7). Это означает, что электрическое поле \mathbf{E}' в движущейся системе координат, связанной с контуром, равно

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + k(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.8)$$

Для определения константы k рассмотрим смысл величины \mathbf{E}' . На заряженную частицу (например, один из электронов проводимости) в движущемся контуре действует сила $q\mathbf{E}'$. Но в лабораторной системе координат эта частица создает ток $\mathbf{J} = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Соотношения (5.7) или (5.12) определяют силу, действующую на этот ток, которая совпадает с (6.8), если постоянная k равна c^{-1} .

Таким образом, закон Фарадея принимает вид

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da, \quad (6.9)$$

где \mathbf{E}' — электрическое поле на элементе $d\mathbf{l}$ в системе координат, в которой элемент $d\mathbf{l}$ покоится. Производная в правой части является полной производной по времени. Если контур C движется со скоростью \mathbf{v} , то электрическое поле в движущейся системе координат будет

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.10)$$

Приведенные результаты справедливы только для нерелятивистских скоростей. Галилеевская инвариантность не является строгим законом и применима только для относительных скоростей, малых по сравнению со скоростью света. Выражение (6.10) справедливо только с точностью до членов *первого* порядка по v/c и имеет погрешность порядка v^2/c^2 (см. гл. 11, § 10). Однако очевидно, что для лабораторных экспериментов с макроскопическими контурами выражения (6.9) и (6.10) имеют вполне достаточную точность.

Закон Фарадея (6.9) можно записать также и в дифференциальной форме, если воспользоваться теоремой Стокса и считать контур

покоящимся в выбранной системе отсчета (для того чтобы **E** и **B** были определены в *одной и той же* системе отсчета). Преобразуя интеграл, выражающий электродвижущую силу, в поверхностный интеграл, приходим к соотношению

$$\int_S \left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} da = 0.$$

В силу произвольности поверхности S , опирающейся на произвольный контур C , подынтегральное выражение должно обращаться в нуль во всех точках пространства.

Таким образом, дифференциальная форма закона Фарадея имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (6.11)$$

Заметим, что (6.11) является обобщением уравнения для статического электрического поля $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ на случай переменных полей.

§ 2. Энергия магнитного поля

При рассмотрении постоянных магнитных полей в гл. 5 мы оставили в стороне вопрос об энергии поля и плотности энергии. Это объясняется тем, что для того, чтобы создать какую-либо конфигурацию постоянных токов и соответствующих им магнитных полей, требуется некоторый переходный период, в течение которого токи и поля изменяются от нуля до своих стационарных значений. Переменные во времени поля вызывают электродвижущие силы, вследствие чего источники тока совершают некоторую работу. Поскольку энергия поля, по определению, является полной работой, необходимой для создания поля, мы должны учесть и работу против электродвижущих сил.

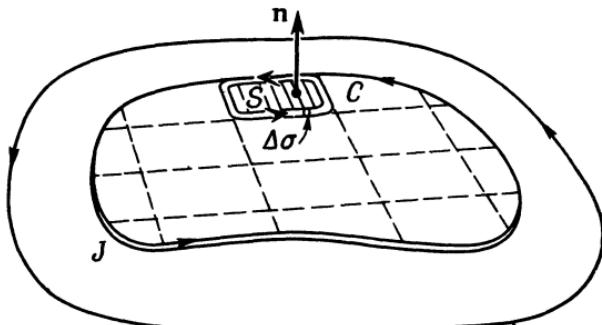
Предположим сначала, что мы имеем отдельный контур с постоянным током I . При изменении потока через контур в нем возникает электродвижущая сила \mathcal{E} . Для того чтобы ток остался постоянным, источники тока должны в единицу времени совершать работу

$$\frac{dW}{dt} = -I\mathcal{E} = \frac{1}{c} I \frac{dF}{dt}$$

(помимо работы, расходующейся на омические потери, которая не включается в магнитную энергию). Отсюда следует, что при изменении потока через контур с током I на величину δF работа, совершаемая источниками, равна

$$\delta W = \frac{1}{c} I \delta F.$$

Рассмотрим теперь работу, необходимую для создания произвольного распределения постоянных токов и полей. Мы можем предположить, что процесс создания полей происходит с бесконечно малой скоростью, так что с желаемой степенью точности соблюдается соотношение $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. При этом распределение токов можно разбить на совокупность элементарных замкнутых контуров. Одним из таких контуров является показанная на фиг. 6.3 элементарная



Фиг. 6.3. Разбиение распределенного тока на элементарные контуры.

трубка тока с поперечным сечением $\Delta\sigma$, замкнутая в контур C , окружающий поверхность S с нормалью n .

Выразим дополнительную работу, совершающую против наводимой э. д. с., через изменение магнитной индукции в этом элементарном контуре

$$\Delta(\delta W) = \frac{J\Delta\sigma}{c} \int_S \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{B} da.$$

Знак Δ показывает, что рассматривается только один элементарный контур. Выражая \mathbf{B} через векторный потенциал \mathbf{A} , мы получаем

$$\Delta(\delta W) = \frac{J\Delta\sigma}{c} \int_S (\operatorname{rot} \delta \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da,$$

или, применяя теорему Стокса,

$$\Delta(\delta W) = \frac{J\Delta\sigma}{c} \int_C \delta \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

Но $J\Delta\sigma d\mathbf{l}$ равно $\mathbf{J}d^3x$, так как элемент $d\mathbf{l}$ параллелен \mathbf{J} . Очевидно, суммирование по всем элементарным контурам приводит к объемному интегралу. Таким образом, полная работа, совершаемая внешними источниками при изменении векторного потенциала на величину $\delta \mathbf{A}$, запишется как

$$\delta W = \frac{1}{c} \int \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d^3x. \quad (6.12)$$

Чтобы перейти от \mathbf{J} и $\delta\mathbf{A}$ к магнитным полям, воспользуемся законом Ампера

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

Отсюда

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \delta \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H} d^3x. \quad (6.13)$$

С помощью векторного тождества

$$\text{div}(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \cdot \text{rot } \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \text{rot } \mathbf{Q}$$

мы можем преобразовать выражение (6.13) к виду

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int [\mathbf{H} \cdot \text{rot } \delta \mathbf{A} + \text{div}(\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A})] d^3x. \quad (6.14)$$

Если распределение токов предполагается ограниченным, то второй интеграл обращается в нуль. Учитывая связь \mathbf{B} и \mathbf{A} , мы можем записать приращение энергии в виде

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} d^3x. \quad (6.15)$$

Это соотношение является магнитным аналогом электростатического соотношения (4.89). В полученной здесь форме оно применимо к любым магнитным средам, включая ферромагнитные материалы. Если предположить, что среда пара- или диамагнитна, так что между \mathbf{H} и \mathbf{B} существует линейная связь, то

$$\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}).$$

При изменении полей от нуля до их конечной величины общая магнитная энергия будет в этом случае равна

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d^3x. \quad (6.16)$$

Это — магнитный аналог выражения (4.92).

Чтобы получить соотношение, эквивалентное соотношению (4.86), в котором электростатическая энергия выражена через плотность заряда и потенциал, следует в (6.12) предположить линейную связь между \mathbf{J} и \mathbf{A} . Тогда магнитная энергия представляется в виде

$$W = \frac{1}{2c} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} d^3x. \quad (6.17)$$

Задача об определении изменения магнитной энергии при внесении в магнитное поле некоторого тела с магнитной проницаемостью μ_1 при фиксированных источниках тока может быть рассмотрена

вполне аналогично соответствующей электростатической задаче (см. гл. 4, § 8). Роль \mathbf{E} здесь играет \mathbf{B} , а роль \mathbf{D} играет \mathbf{H} . Первоначально мы имеем среду с магнитной проницаемостью μ_0 , в которой существует магнитная индукция \mathbf{B}_0 . После внесения тела индукция и поле становятся равными \mathbf{B} и \mathbf{H} . В качестве упражнения читатель может проверить, что при фиксированных источниках поля изменение энергии будет описываться выражением

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}_0 - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_0) d^3x, \quad (6.18)$$

где интегрирование производится по объему внесенного тела. Это выражение можно переписать также в виде

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mu_1 - \mu_0) \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0 d^3x = \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \right) \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 d^3x. \quad (6.19)$$

Здесь μ_1 и μ_0 могут быть функциями координат, но они предполагаются не зависящими от напряженности поля.

Для тела, находящегося в свободном пространстве ($\mu_0 = 1$), изменение энергии можно выразить через намагниченность

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 d^3x. \quad (6.20)$$

Следует отметить, что соотношение (6.20) с точностью до знака эквивалентно соответствующему электростатическому выражению (4.96). Изменение знака вызвано тем, что энергия W — это полное изменение энергии при внесении в поле намагничивающегося тела, включая и работу, совершающую источниками против электродвигущих сил индукции. В этом смысле магнитная задача с фиксированными токами аналогична электростатической задаче с фиксированными потенциалами на проводниках. Рассуждения, аналогичные приведенным в гл. 4, § 8, показывают, что при малом смещении работа, совершаемая против индуцированных э. д. с., в 2 раза больше и противоположна по знаку изменению потенциальной энергии тела. Поэтому для нахождения силы, действующей на тело при обобщенном смещении ξ , мы должны вычислить положительную производную W по смещению ξ

$$F_\xi = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_J. \quad (6.21)$$

Индекс J указывает на то, что производная берется при фиксированных токах.

Разница между (6.20) и потенциальной энергией (5.73) постоянного магнитного момента во внешнем поле (кроме множителя $1/2$, который является следствием предполагаемой линейной зависимости

сти между **M** и **B**) связана с тем, что (6.20) выражает полную энергию, требуемую для создания данной конфигурации, тогда как (5.73) включает только работу совершающую при внесении постоянного магнитного момента в поле, и не содержит работы по созданию магнитного момента и по поддержанию его постоянным.

§ 3. Максвелловский ток смещения. Уравнения Максвелла

Основные законы электричества и магнетизма, которые мы рассматривали до сих пор, можно представить в дифференциальной форме следующими четырьмя уравнениями:

закон Кулона

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\varrho,$$

закон Ампера

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J},$$

закон Фарадея

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

отсутствие свободных магнитных зарядов

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

} (6.22)

Эти уравнения записаны в макроскопической форме в гауссовой системе единиц. Напомним, что все эти законы, кроме закона Фарадея, получены при изучении постоянных полей. С логической точки зрения априори ниоткуда не следует, что статические уравнения должны оставаться неизменными в случае полей, зависящих от времени. И действительно, система уравнений (6.22) в той форме, как она здесь написана, неприменима для переменных полей.

Потребовался гений Джемса Кларка Максвелла, который, опираясь на результаты экспериментов Фарадея, сумел обнаружить некорректность уравнений (6.22) и надлежащим образом изменить их, что в итоге привело к открытию новых физических явлений, не известных в то время, но впоследствии подтвержденных экспериментально во всех деталях. Такая блестящим образом дополненная Максвеллом в 1865 г. система уравнений заслуженно известна под названием уравнений Максвелла.

Некорректным уравнением в системе (6.22) является закон Ампера, который выведен для постоянных токов, когда $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Это требование к дивергенции \mathbf{J} содержится непосредственно в уравнении Ампера. Действительно, беря дивергенцию от обеих

частей равенства, получаем

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0. \quad (6.23)$$

Однако уравнение $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ справедливо только для стационарных явлений; общее соотношение дается уравнением непрерывности для заряда и тока

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0. \quad (6.24)$$

Максвелл заметил, что при учете закона Кулона [см. (6.22)] уравнение непрерывности можно представить в виде равенства нулю дивергенции некоторого вектора:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial q}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.25)$$

Соответственно Максвелл обобщил закон Ампера на случай переменных полей, произведя в нем замену

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6.26)$$

Обобщенный закон Ампера принимает при этом вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6.27)$$

Для стационарных процессов это соотношение дает прежний, экспериментально проверенный закон, но теперь оно стало математически совместимым с уравнением непрерывности (6.24) для переменных полей. Максвелл назвал добавочный член в (6.26) *током смещения*. Введенная модификация закона Ампера имеет решающее значение для быстро меняющихся полей. Без нее не было бы электромагнитных волн, и, собственно, все последующие главы настоящей книги не были бы написаны. Максвелл пришел к заключению, что свет представляет собой электромагнитные волны, и показал возможность генерации электромагнитных волн различных частот. Это привлекло внимание всех физиков и стимулировало множество теоретических и экспериментальных исследований в конце девятнадцатого столетия.

Система четырех уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi q, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (6.28)$$

известных под названием уравнений Максвелла, составляет основу всей электродинамики. В сочетании с выражением для силы

Лоренца и вторым законом движения Ньютона эти уравнения дают полное описание динамики заряженных частиц, взаимодействующих с электромагнитными полями (см. § 9 настоящей главы и гл. 10 и 12). Для макроскопического описания динамических характеристик среды, состоящей из большого количества атомов, используются кроме того, *материальные уравнения*, связывающие \mathbf{D} и \mathbf{J} с \mathbf{E} , а \mathbf{H} с \mathbf{B} (например, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ для изотропного магнитного диэлектрика с конечной проводимостью).

При написании уравнений Максвелла (6.28) использованы те же единицы, что и в предыдущих главах, а именно гауссова система единиц. Для читателя, привыкшего к другой системе единиц, например МКС, в табл. 2 в приложении приведены основные уравнения в наиболее употребительных системах. Табл. 3 в приложении позволяет перевести произвольное уравнение в гауссовых единицах в систему МКС, а табл. 4 дает соотношение между соответствующими единицами.

§ 4. Векторный и скалярный потенциалы

Уравнения Максвелла образуют систему взаимосвязанных уравнений первого порядка в частных производных, определяющих изменение составляющих электрического и магнитного полей. Для простых конфигураций они могут быть решены непосредственно. Однако часто удобно ввести потенциалы и свести систему к меньшему числу уравнений второго порядка. При этом некоторые из уравнений Максвелла удовлетворяются автоматически. Мы уже познакомились с этим методом в электростатике и магнитостатике, где использовались скалярный потенциал Φ и векторный потенциал \mathbf{A} .

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, мы можем выразить \mathbf{B} через векторный потенциал:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6.29)$$

Подставляя это выражение во второе однородное уравнение системы (6.28) (в закон Фарадея), получаем

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.30)$$

Величину в круглых скобках, ротор которой равен нулю, можно, очевидно, представить в виде градиента некоторой скалярной функции, а именно скалярного потенциала Φ :

$$\begin{aligned} \text{или } & \left. \begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\operatorname{grad} \Phi, \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Поля **B** и **E**, определенные через потенциалы **A** и Φ соотношениями (6.29) и (6.31), тождественно удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла. Динамическое поведение **A** и Φ определяется двумя неоднородными уравнениями системы (6.28).

На данной стадии удобно ограничить наше рассмотрение микроскопической формой уравнений Максвелла. Тогда неоднородные уравнения системы (6.28) можно записать через потенциалы в виде

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -4\pi\varrho, \quad (6.32)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (6.33)$$

Таким образом, мы свели систему четырех уравнений Максвелла к двум уравнениям, которые, однако, остались взаимосвязанными. Для получения отдельных уравнений для Φ и **A** можно воспользоваться свободой в определении потенциалов. Так как индукция **B** связана с **A** формулой (6.29), то векторный потенциал определен лишь с точностью до аддитивной векторной функции, являющейся градиентом произвольной скалярной функции Λ . Магнитное поле **B** не меняется при преобразовании

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Lambda. \quad (6.34)$$

Чтобы при этом осталось неизменным также и электрическое поле (6.31), следует одновременно преобразовать и скалярный потенциал

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (6.35)$$

Соотношения (6.34) и (6.35) позволяют, в частности, выбрать такую систему потенциалов (**A**, Φ), чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (6.36)$$

При этом уравнения (6.32) и (6.33) сводятся к двум отдельным неоднородным волновым уравнениям для Φ и **A**

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho, \quad (6.37)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (6.38)$$

Уравнения (6.37) и (6.38) в совокупности с (6.36) образуют систему уравнений, полностью эквивалентную уравнениям Максвелла.

§ 5. Калибровочные преобразования.

Лоренцовская калибровка. Кулоновская калибровка

Преобразования (6.34) и (6.35) называются *калибровочными преобразованиями*, а инвариантность полей относительно этих преобразований называется *калибровочной инвариантностью*. Соотношение (6.36) между \mathbf{A} и Φ называется *условием Лоренца*. Покажем, что всегда можно выбрать потенциалы так, чтобы они удовлетворяли условию Лоренца. Для этого предположим, что потенциалы \mathbf{A} , Φ , удовлетворяющие уравнениям (6.32) и (6.33), не удовлетворяют уравнению (6.36). Произведем калибровочное преобразование потенциалов \mathbf{A}' , Φ' и потребуем, чтобы \mathbf{A}' и Φ удовлетворяли условию Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}. \quad (6.39)$$

Очевидно, если калибровочная функция Λ выбрана таким образом, что она удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = - \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \quad (6.40)$$

то новые потенциалы \mathbf{A}' и Φ' будут удовлетворять условию Лоренца и волновым уравнениям (6.37) и (6.38).

Потенциалы, удовлетворяющие условию Лоренца (6.36), все еще содержат некоторую неопределенность. Очевидно, группа *ограниченных калибровочных преобразований*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Lambda, \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.41)$$

с функцией Λ , удовлетворяющей уравнению

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0, \quad (6.42)$$

сохраняет условие Лоренца, если первоначально \mathbf{A} и Φ удовлетворяли этому условию. Все потенциалы этого ограниченного класса потенциалов называют принадлежащими к *лоренцовской калибровке*. Лоренцовская калибровка является наиболее употребительной, поскольку, во-первых, при ее использовании Φ и \mathbf{A} входят эквивалентным образом в волновые уравнения (6.37) и (6.38) и, во-вторых, потому, что она не зависит от выбора координатной системы и поэтому очень удобна в специальной теории относительности (см. гл. 11, § 9).

Другой полезной калибровкой потенциалов является так называемая *кулоновская*, или *поперечная калибровка*. При этой калиб-

ровке налагается дополнительное условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (6.43)$$

Из (6.32) следует, что скалярный потенциал удовлетворяет при этом уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\varrho, \quad (6.44)$$

решение которого имеет вид

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\varrho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (6.45)$$

Скалярный потенциал (6.45) является мгновенным кулоновским потенциалом, соответствующим плотности заряда $\varrho(\mathbf{x}, t)$, чем и объясняется название «кулоновская калибровка».

Векторный потенциал удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (6.46)$$

Слагаемое в правой части, содержащее скалярный потенциал, может быть в принципе вычислено согласно (6.45). Используя уравнение непрерывности, мы можем написать

$$\operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div}' \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (6.47)$$

Если представить ток в виде суммы «продольной» и «поперечной» составляющих

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_t, \quad (6.48)$$

таких, что $\operatorname{rot} \mathbf{J}_l = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{J}_t = 0$, то эти составляющие запишутся следующим образом:

$$\mathbf{J}_l = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div}' \mathbf{J}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (6.49)$$

$$\mathbf{J}_t = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (6.50)$$

что можно проверить, воспользовавшись векторным тождеством $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{J} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{J} - \nabla^2 \mathbf{J}$ и соотношением $\nabla^2 (1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Из сравнения (6.47) с (6.49) следует, что

$$\operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J}_l. \quad (6.51)$$

Таким образом, источником в волновом уравнении для \mathbf{A} служит поперечный ток (6.50)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t, \quad (6.52)$$

чем и определяется название «поперечная калибровка».

Кулоновская (поперечная) калибровка часто используется для описания полей в отсутствие источников. В этом случае $\Phi = 0$, \mathbf{A} удовлетворяет однородному волновому уравнению, а поля определяются через \mathbf{A} соотношениями

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6.53)$$

§ 6. Функция Грина для волнового уравнения

Волновые уравнения (6.37), (6.38) и (6.52) имеют одинаковую структуру

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{x}, t), \quad (6.54)$$

где $f(\mathbf{x}, t)$ дает распределение источников, а c представляет собой скорость распространения волн в пространстве.

Для решения уравнения (6.54), так же как в электростатике, полезно найти сначала функцию Грина. Поскольку теперь поля зависят и от времени, функция Грина будет зависеть от переменных $(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t')$ и должна удовлетворять уравнению

$$\left(\nabla_{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (6.55)$$

Решение уравнения (6.54) в неограниченном пространстве без граничных поверхностей выражается через G интегралом

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') f(\mathbf{x}', t') d^3x' dt'. \quad (6.56)$$

Нужно, конечно, потребовать, чтобы функция Грина удовлетворяла определенным граничным условиям, которые задаются физическими требованиями.

Основная функция Грина¹⁾, удовлетворяющая уравнению (6.55), зависит только от разностей координат $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ и времен $(t - t')$. Для нахождения G представим обе части уравнения (6.55) в виде интегралов Фурье. Дельта-функцию в правой части можно представить следующим образом:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} e^{-i\omega(t - t')}. \quad (6.57)$$

Соответственно запишем функцию G в виде

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \int d^3k \int d\omega g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} e^{-i\omega(t - t')}. \quad (6.58)$$

¹⁾ Под «основной» автор понимает функцию Грина для неограниченного пространства.— *Прим. ред.*

Функцию $g(\mathbf{k}, \omega)$ легко определить, подставляя (6.57) и (6.58) в уравнение (6.55). При этом получаем

$$g(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (6.59)$$

При подстановке $g(\mathbf{k}, \omega)$ в (6.58) и последующем интегрировании по \mathbf{k} и ω мы сталкиваемся с особенностью подынтегрального выражения при $k^2 = \omega^2/c^2$. Решение (6.59) имеет смысл только в том случае, если мы знаем правила обращения с этой особенностью. Математически мы не можем получить такие правила, мы должны прийти к ним из физических соображений.

Функция Грина, удовлетворяющая уравнению (6.55), представляет собой волновое возмущение, вызванное точечным источником, находящимся в точке \mathbf{x}' и излучающим только в течение бесконечно малого интервала времени при $t = t'$. Мы знаем, что такое волновое возмущение распространяется со скоростью c в виде расходящейся сферической волны. Следовательно, необходимо потребовать, чтобы наше решение для G обладало следующими свойствами:

а) $G = 0$ везде при $t < t'$,

б) G представляет собой расходящуюся волну при $t > t'$.

При выполнении интегрирования в выражении (6.58) по ω мы сталкиваемся с особенностью функции $g(\mathbf{k}, \omega)$ в точках $\omega = \pm ck$. Мы можем представить интеграл по ω в виде интеграла Коши по комплексной плоскости ω . Для $t > t'$ интеграл вдоль действительной оси в (6.58) эквивалентен контурному интегралу по изображенному на фиг. 6.4 контуру C , замкнутому в нижней полуплоскости, так как интеграл по полуокружности экспоненциально стремится к нулю. Аналогично при $t' > t$ контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости контуром C' (фиг. 6.4).

Чтобы функция G обращалась в нуль при $t < t'$, мы должны предположить, что полюса $\omega = \pm ck$ смешены вниз от действительной оси (фиг. 6.4). При этом интеграл по контуру C (для $t > t'$) будет отличен от нуля, в то время как интеграл по контуру C' (для $t < t'$) обратится в нуль. Смещение полюсов можно выразить математически, заменив в (6.59) ω величиной $\omega + i\varepsilon$. Тогда функция Грина принимает вид

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3k \int d\omega \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}-i\omega t}}{k^2 - \frac{1}{c^2} (\omega + i\varepsilon)^2}, \quad (6.60)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $\tau = t - t'$, а ε — положительная бесконечно малая величина.

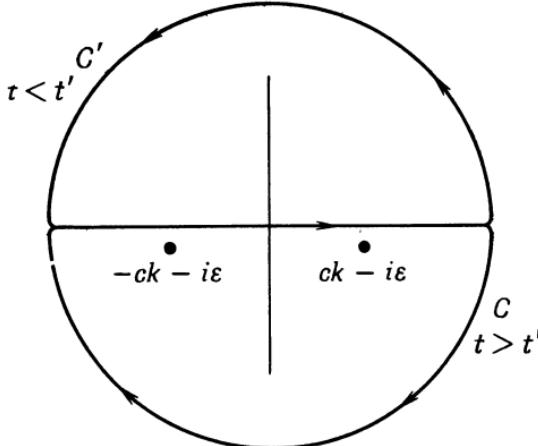
Интегрирование по ω при $\tau > 0$ производится с помощью теоремы Коши по контуру C (см. фиг. 6.4) и дает

$$G = \frac{c}{2\pi^2} \int d^3k e^{ik \cdot R} \frac{\sin c\tau k}{k}. \quad (6.61)$$

Интегрирование по d^3k произведем сначала по углам; это дает

$$G = \frac{2c}{\pi R} \int_0^\infty dk \sin kR \sin c\tau k. \quad (6.62)$$

Поскольку подынтегральное выражение является четной функцией



Фиг. 6.4. Комплексная плоскость ω с контуром C для $t > t'$ и контуром C' для $t < t'$.

k , интегрирование здесь можно распространить на весь интервал $-\infty < k < \infty$. Заменяя переменную k на $x = ck$, мы можем представить (6.62) в виде

$$G = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} dx [e^{i(\tau-R/c)x} - e^{i(\tau+R/c)x}]. \quad (6.63)$$

Согласно (2.52), эти интегралы выражаются через δ -функции Дирака. Аргумент второй δ -функции никогда не обращается в нуль (вспомним, что $\tau > 0$). Таким образом, вклад в G дает только первый интеграл, и функция Грина оказывается равной

$$G = \frac{1}{R} \delta \left(\tau - \frac{R}{c} \right),$$

или, более подробно,

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{\delta\left(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (6.64)$$

Эта гриновская функция иногда называется *запаздывающей функцией Грина*, что отражает естественную причинную последовательность при распространении волнового возмущения: эффект, наблюдаемый в точке \mathbf{x} в момент времени t , вызывается возмущением, которое произошло в точке \mathbf{x}' в более раннее (так называемое *запаздывающее*) время $t' = t - (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)$.

Решение волнового уравнения (6.54) в отсутствие границ имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\delta\left(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f(\mathbf{x}', t') d^3x' dt'. \quad (6.65)$$

Производя интегрирование по dt' , мы получаем так называемое *запаздывающее решение*

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{[f(\mathbf{x}', t')]_{\text{запазд}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (6.66)$$

Квадратные скобки $[]_{\text{запазд}}$ означают, что в качестве t' должно быть взято запаздывающее время $t' = t - (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)$.

§ 7. Задача с начальными условиями. Интегральное представление Кирхгофа

Решение (6.66) является частным интегралом неоднородного волнового уравнения (6.54). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, к нему можно добавить произвольное решение однородного волнового уравнения. Согласно таблице, приведенной в гл. 1 (см. стр. 31), соответствующие граничные условия являются граничными условиями Коши (задаются ψ и $\partial\psi/\partial n$) на «открытой поверхности». Для трехмерного волнового уравнения открытой поверхностью является трехмерный объем, определяемый одной функциональной зависимостью между четырьмя координатами (x, y, z, t) . Обычно такой открытой поверхностью является обыкновенное трехмерное пространство в фиксированный момент времени $t = t_0$. При этом мы приходим к задаче с начальными условиями: заданы $\psi(\mathbf{x}, t_0)$ и $\partial\psi(\mathbf{x}, t_0)/\partial t$ для всех \mathbf{x} и нужно найти $\psi(\mathbf{x}, t)$ для всех моментов времени $t > t_0$.

Для анализа задачи с начальными условиями и для получения интегрального представления Кирхгофа для замкнутой граничной

поверхности воспользуемся теоремой Грина (1.35) и проинтегрируем это соотношение по времени от $t' = t_0$ до $t' = t_1 > t$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt' \int_V d^3x' (\varphi \nabla'^2 \psi - \psi \nabla'^2 \varphi) = \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right) da'. \quad (6.67)$$

Положим $\psi = \psi$ и $\varphi = G$. С учетом волновых уравнений (6.54) и (6.55) левая часть, которую мы обозначим через LH, принимает вид

$$\begin{aligned} LH = & \int_{t_0}^{t_1} dt' \int_V d^3x' \left[4\pi \psi(x', t') \delta(x' - x) \delta(t' - t) - \right. \\ & \left. - 4\pi f(x', t') G + \frac{1}{c^2} \left(G \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} - \psi \frac{\partial^2 G}{\partial t'^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Первый член в (6.68) дает $4\pi \psi(x, t)$, второй представляет собой частное решение (6.66). После интегрирования по частям по времени оставшихся двух членов получим

$$\begin{aligned} LH = & 4\pi \psi(x, t) - 4\pi \int_{t_0}^{t_1} dt' \int_V d^3x' f(x', t') G + \\ & + \frac{1}{c^2} \int_V d^3x' \left(G \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \psi \frac{\partial G}{\partial t'} \right) \Big|_{t'=t_0}^{t'=t_1}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Так как $G = 0$ при $t' = t_1 > t$, то при подстановке верхнего предела получаем нуль. Комбинируя (6.69) и (6.67), приходим к интегральному представлению для $\psi(x, t)$ внутри объема V , ограниченного поверхностью S , для моментов времени $t > t_0$:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \int_V d^3x' \frac{[f(x', t')]_{\text{запазд}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi c^2} \int_V d^3x' \left(G \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \psi \frac{\partial G}{\partial t'} \right)_{t'=t_0} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S da' \left(G \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial G}{\partial n'} \right). \end{aligned} \quad (6.70)$$

Мы написали первый член в (6.70) в обычной форме (6.66), воспользовавшись явным выражением (6.64) для функции G . Далее мы преобразуем так же и остальные члены.

Рассмотрим сначала для простоты задачу с начальными условиями для бесконечной области, считая ψ и $d\psi/dt$ заданными функциями координат при $t = t_0 = 0$:

$$\psi(x, 0) = F(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = D(x). \quad (6.71)$$

При этом поверхностный интеграл в (6.70) можно опустить. Для упрощения обозначений примем точку наблюдения за начало

координат и введем сферические координаты. Тогда

$$\begin{aligned}\psi(0, t) = & \int d\Omega' \int_0^\infty r' dr' f(r', \Omega', t' = t - \frac{r'}{c}) + \\ & + \frac{1}{4\pi c^2} \int d\Omega' \int_0^\infty r' dr' \left[D(r', \Omega') \delta(t - \frac{r'}{c}) - \right. \\ & \left. - F(r', \Omega) \frac{\partial}{\partial t'} \delta(t' + \frac{r'}{c} - t) \Big|_{t'=0} \right].\end{aligned}\quad (6.72)$$

Производную от δ -функции можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t'} \delta(t' + \frac{r'}{c} - t) \Big|_{t'=0} = c^2 \delta'(r' - ct).$$

С учетом свойств δ -функции, приведенных в гл. 1, § 2, выражение (6.72) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\psi(0, t) = & \int d\Omega' \int_0^\infty r' dr' f(r', \Omega', t' = t - \frac{r'}{c}) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \left[t D(ct, \Omega') + \frac{\partial}{\partial t} (t F(ct, \Omega')) \right].\end{aligned}\quad (6.73)$$

Полученное выражение называется *решением Пуассона* задачи с начальными условиями. В отсутствие источников ($f = 0$) поле в начале координат в момент t зависит только от величины начальных полей в точках на расстоянии ct от начала координат.

Задачи с начальными условиями для волнового уравнения подробно исследованы для случая одного, двух, трех и большего числа измерений. Мы отсылаем читателя к книге Морса и Фешбаха [77] или к книге Адамара [47], где изложение является более математическим.

Теперь получим из (6.70) так называемое интегральное представление Кирхгофа для поля внутри объема V через значение ψ и ее производных на граничной поверхности S . Предположим теперь, что внутри V нет источников и начальные значения ψ и $d\psi/dt$ равны нулю [вместо этого мы могли бы предположить, что начальный момент времени отодвинут столь далеко в прошлое, что решение (6.73), соответствующее начальным значениям, уже не скрывается на поле внутри объема V]. Тогда поле внутри V определяется выражением

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S da' \left(G \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \Psi \frac{\partial G}{\partial n'} \right). \quad (6.74)$$

Учитывая (6.64), мы можем вычислить $\partial G / \partial n'$

$$\begin{aligned} \text{grad}' G = \frac{\partial G}{\partial R} \text{grad}' R &= -\frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\delta \left(t' + \frac{R}{c} - t \right)}{R} \right] = \\ &= -\frac{\mathbf{R}}{R} \left\{ -\frac{\delta \left(t' + \frac{R}{c} - t \right)}{R^2} + \frac{\delta' \left(t' + \frac{R}{c} - t \right)}{cR} \right\}. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Член с производной от δ -функции можно проинтегрировать по времени t' по частям. В результате интегральное представление Кирхгофа запишется в виде

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \mathbf{n} \cdot \left[\frac{\text{grad}' \psi(\mathbf{x}', t')}{R} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \psi(\mathbf{x}', t') - \frac{\mathbf{R}}{cR^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{\text{запазд}} d\mathbf{a}', \quad (6.76)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, а \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S . Подчеркнем, что (6.76) не является решением, а дает только интегральное представление поля ψ через его значение и значение его производных по координатам и по времени на поверхности S . Последние не могут быть выбраны произвольно и определяются только путем решения соответствующей граничной задачи Коши.

Интеграл Кирхгофа (6.76) является математическим выражением принципа Гюйгенса и служит исходным пунктом при рассмотрении задач дифракции. Подробно дифракция будет рассмотрена в гл. 9, § 5 и далее.

§ 8. Теорема Пойнтинга

Для теории электромагнитных полей важное значение имеет формулировка законов сохранения энергии и импульса. Мы начнем с рассмотрения закона сохранения энергии, который часто называют *теоремой Пойнтинга* (1884 г.). Работа, совершаемая электромагнитным полем \mathbf{E} , \mathbf{B} в единицу времени над отдельным зарядом q , равна $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$, где \mathbf{v} — скорость заряда. Магнитное поле работы не совершает, поскольку магнитная сила перпендикулярна скорости. При непрерывном распределении зарядов и токов полная работа, совершаемая полем в объеме V в единицу времени, равна

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x. \quad (6.77)$$

Это выражение определяет скорость превращения электромагнитной энергии в механическую или тепловую. Очевидно, с такой же скоростью уменьшается энергия электромагнитного поля

внутри объема V . Чтобы найти этот закон сохранения в явном виде, преобразуем выражение (6.77) с помощью уравнений Максвелла. Для исключения \mathbf{J} воспользуемся законом Ампера — Максвелла:

$$\oint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = \frac{1}{4\pi} \oint_V [c \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}] d^3x. \quad (6.78)$$

Учитывая векторное тождество

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

и закон Фарадея, преобразуем правую часть (6.78) к виду

$$\oint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = -\frac{1}{4\pi} \oint_V [c \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}] d^3x. \quad (6.79)$$

Для дальнейшего необходимо сделать два допущения. Первое из них не имеет существенного значения и делается только для простоты. Будем предполагать, что макроскопическая среда обладает линейными электрическими и магнитными свойствами. Тогда два члена в (6.79), содержащие производные по времени, можно в соответствии с (4.92) и (6.16) интерпретировать как производные по времени от плотностей электростатической и магнитной энергий. Теперь мы сделаем второе предположение, а именно будем считать, что сумма выражений (4.92) и (6.16) представляет собой полную электромагнитную энергию также и в случае переменных во времени полей. Если плотность полной энергии поля обозначить через

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}), \quad (6.80)$$

то (6.79) перепишется в виде

$$-\oint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = \oint_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] d^3x. \quad (6.81)$$

Поскольку объем V произволен, это соотношение можно представить в форме дифференциального закона сохранения, или уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (6.82)$$

Вектор \mathbf{S} , определяющий поток энергии, называется *вектором Пойнтинга*. Он равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (6.83)$$

и имеет размерность энергия/(площадь \times время). Так как в законе сохранения фигурирует только дивергенция этого вектора, к вектору Пойнтинга можно прибавить ротор произвольного вектора поля. Однако этот добавочный член не приводит ни к каким физи-

ческим следствиям, и поэтому обычно используется частная форма (6.83).

Физический смысл интегральной или дифференциальной формы законов (6.81) или (6.82) заключается в том, что скорость возрастания электромагнитной энергии внутри некоторого объема в сумме с энергией, вытекающей за единицу времени через поверхность, ограничивающую этот объем, равна взятой со знаком минус полной работе, совершающей полем над источниками внутри данного объема. Соотношения (6.81) и (6.82) выражают закон сохранения энергии. Если имеются нелинейные эффекты, такие, как гистерезис в ферромагнитных материалах, то простая форма закона сохранения (6.82) неприменима и необходимо добавить соответствующие члены, учитывающие потери на гистерезис.

§ 9. Законы сохранения для системы заряженных частиц и электромагнитных полей

Из выражений (6.81) и (6.82) для теоремы Пойнтинга видна существенная роль понятия энергии электромагнитного поля. Работа $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$, совершаемая полем в единичном объеме за единицу времени, определяет количество электромагнитной энергии, перешедшей в механическую или тепловую. Так как материя состоит в конце концов из заряженных частиц (электронов и атомных ядер), мы можем считать, что скорость передачи энергии является скоростью возрастания энергии заряженных частиц в единице объема. Таким образом, мы можем интерпретировать теорему Пойнтинга для микроскопических полей как выражение закона сохранения энергии для комбинированной системы частиц и полей. Если мы обозначим общую энергию частиц внутри объема V через $E_{\text{мех}}$ и предположим, что частицы не выходят из этого объема, то, очевидно,

$$\frac{dE_{\text{мех}}}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x. \quad (6.84)$$

Таким образом, теорема Пойнтинга выражает закон сохранения энергии для комбинированной системы

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (E_{\text{мех}} + E_{\text{полев}}) = - \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} da, \quad (6.85)$$

где полная энергия поля внутри V равна

$$E_{\text{полев}} = \int_V u d^3x = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3x. \quad (6.86)$$

Аналогично можно рассмотреть и закон сохранения импульса. Мы знаем, что сила, действующая на заряд q во внешнем поле \mathbf{E} , равна $q\mathbf{E}$. Из основного соотношения (5.12) для сил, действующих на токи, мы можем заключить, что внешнее магнитное поле \mathbf{B} действует на заряд q , движущийся со скоростью \mathbf{v} , с силой $(q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Отсюда полная сила, с которой электромагнитное поле действует на зарженную частицу, равна

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (6.87)$$

Она называется *силой Лоренца*. Мы вывели выражение (6.87) из соотношений для постоянных полей, но оно экспериментально подтверждено для произвольных полей и для частиц с произвольно большими скоростями.

Согласно второму закону Ньютона, скорость изменения импульса частицы равна

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (6.88)$$

Если обозначить сумму импульсов всех частиц в объеме V через $\mathbf{P}_{\text{мех}}$, то мы можем написать

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{мех}}}{dt} = \int_V \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) d^3x. \quad (6.89)$$

Для удобства вычислений мы заменили сумму по частицам на интеграл по плотностям заряда и тока. Дискретный характер распределения зарядов можно восстановить в любой момент, вводя δ -функцию аналогично гл. 1, § 2. Так же как и при выводе теоремы Пойнティングа, мы исключим ρ и \mathbf{J} из (6.89) с помощью уравнений Максвелла:

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (6.90)$$

Отметим, что в (6.90) входят \mathbf{E} и \mathbf{B} , а не \mathbf{H} и \mathbf{D} . Это обусловлено тем, что, как уже указывалось выше, мы отнесли энергию зарядов к механической части энергии системы и поэтому пользуемся микроскопическими уравнениями, которые содержат только \mathbf{E} и \mathbf{B} . В следующем параграфе будут сделаны некоторые замечания об особенностях подхода, при котором энергия и импульс отдельных частиц, а именно связанных атомов, включаются в «полевую» энергию и импульс через диэлектрическую и магнитную проницаемости (см. также задачу 6.8).

Подставляя (6.90) в (6.89), представим подынтегральное выражение в виде

$$\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} \right). \quad (6.91)$$

Воспользуемся соотношением

$$\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

и добавим в скобках в (6.91) член $\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} \equiv 0$; тогда

$$\begin{aligned} \varrho E + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (6.92)$$

Для скорости изменения механического импульса можно теперь написать вместо (6.89) соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_{\text{мех}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3x &= \frac{1}{4\pi} \int_V (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + \\ &\quad + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) d^3x. \end{aligned} \quad (6.93)$$

Естественно отождествить объемный интеграл, стоящий в левой части равенства, с полным электромагнитным импульсом $\mathbf{P}_{\text{полев}}$ в объеме V :

$$\mathbf{P}_{\text{полев}} = \frac{1}{4\pi c} \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3x. \quad (6.94)$$

Подынтегральное выражение можно интерпретировать как плотность электромагнитного импульса. Заметим, что плотность импульса пропорциональна плотности потока энергии \mathbf{S} с коэффициентом пропорциональности c^{-2} .

Чтобы окончательно убедиться в том, что объемный интеграл от $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})/4\pi c$ можно отождествить с электромагнитным импульсом и представить (6.93) в форме закона сохранения импульса, мы должны преобразовать объемный интеграл в правой части (6.93) в поверхностный интеграл от нормальной составляющей некоторой величины, которую можно интерпретировать как поток импульса.

Подынтегральное выражение в (6.93), очевидно, имеет векторный характер. Поэтому если его можно представить как дивергенцию некоторой величины, то эта величина должна быть тензором второго ранга. Вместо того чтобы перейти к прямоугольным декартовым составляющим импульса, можно рассматривать тензоры, оставаясь в рамках векторных операций, если ввести соответствующие *диадные* обозначения. Если обозначить трехмерный тензор через T_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), а единичные базисные векторы вдоль координатных осей — через \mathbf{e}_i , то в диадном обозначении тензор T_{ij}

будет иметь вид¹⁾

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_i T_{ij} \mathbf{e}_j. \quad (6.95)$$

Стоящий слева от T_{ij} единичный вектор может образовывать скалярные или векторные произведения только при умножении слева, вектор, стоящий справа,— только при умножении справа. При заданной диаде компоненты тензора определяются как скалярные произведения

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_j. \quad (6.96)$$

Обозначим через $\overleftrightarrow{\Gamma}$ диаду, соответствующую единичному тензору второго ранга:

$$\overleftrightarrow{\Gamma} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (6.97)$$

Скалярное произведение произвольного вектора или векторного оператора на $\overleftrightarrow{\Gamma}$ слева или справа равно этому же вектору.

После этих беглых замечаний о свойствах диад вернемся теперь к векторным преобразованиям, необходимым для приведения объемного интеграла в правой части (6.93) к поверхностному. Используя векторное тождество

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

мы можем записать члены, содержащие \mathbf{B} , в виде

$$\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} B^2. \quad (6.98)$$

Последнее выражение можно представить в виде дивергенции от диады

$$\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} B^2 = \operatorname{div} \left(\mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \overleftrightarrow{\Gamma} B^2 \right). \quad (6.99)$$

Аналогично преобразуются члены, содержащие электрическое поле в (6.93). Следовательно, закон сохранения импульса принимает вид

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{\text{мех}} + \mathbf{P}_{\text{полев}}) = \int_V \operatorname{div} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} d^3x = \oint_S \mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} da. \quad (6.100)$$

¹⁾ Диадные обозначения мало распространены в нашей литературе. Произвольный тензор второго ранга может быть представлен как сумма n диад (внешних произведений векторов), где n — число измерений. Если разложить векторы, образующие диады, по единичным векторам системы координат, то мы придем к представлению (6.95). Оно удобно в том отношении, что умножение тензора (6.95) на вектор слева или справа сводится к скалярному (внутреннему) перемножению векторов.— Прим. ред.

Тензор-диада $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}$, называемый *максвелловским тензором напряжений*, равен

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} = \frac{1}{4\pi} \left[\mathbf{EE} + \mathbf{BB} - \frac{1}{2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} (E^2 + B^2) \right]. \quad (6.101)$$

Элементы этого тензора равны

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2) \right]. \quad (6.102)$$

Очевидно, $(-\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}})$ в уравнении (6.100) представляет собой нормальный к поверхности поток импульса через единичную площадь из объема V сквозь поверхность S . Иными словами, $(-\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{n}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}})$ — это сила, действующая на единичную площадку поверхности S . Это соотношение можно использовать для расчета сил, действующих на материальные тела в электромагнитном поле, если окружить эти тела граничной поверхностью S и подсчитать полную действующую на поверхность силу, определяемую правой частью уравнения (6.100).

Сохранение момента количества движения комбинированной системы частиц и полей можно рассмотреть таким же образом, как и сохранение энергии и импульса. Соответствующие расчеты предлагаются выполнить читателю (см. задачу 6.9).

§ 10. Макроскопические уравнения

Хотя в большей части главы уравнения электродинамики записаны в макроскопической форме, читатель помнит, что вывод макроскопических уравнений из микроскопических был проведен отдельно для *электростатики* и *магнетостатики* в гл. 4, § 3 и в гл. 5, § 8. В связи с этим возникает вопрос о применимости этих уравнений для переменных во времени полей. Применимость этих уравнений представляется интуитивно очевидной, поскольку добавление максвелловского тока смещения было сделано на макроскопическом уровне. Тем не менее полезно непосредственно получить макроскопические уравнения из микроскопических и, в частности, проследить, как изменение во времени поляризации \mathbf{P} порождает распределение токов и приводит к превращению микроскопического тока смещения $\partial\mathbf{E}/\partial t$ в макроскопический ток смещения $\partial\mathbf{D}/\partial t$.

Основное допущение, которое было принято в наших предыдущих рассмотрениях, заключается в том, что макроскопические поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , удовлетворяющие двум однородным уравнениям Мак-

свела (6.28), являются средними значениями соответствующих микроскопических полей ϵ и β :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \langle \boldsymbol{\beta} \rangle. \quad (6.103)$$

Под средним значением теперь мы должны подразумевать результат усреднения как по пространству, так и по времени, например

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta T} \int d^3 \xi \int dt \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x} + \xi, t + \tau), \quad (6.104)$$

где объем ΔV и интервал времени ΔT малы по сравнению с соответствующими макроскопическими величинами.

Из соотношений (6.103) следует, что макроскопические потенциалы Φ и \mathbf{A} являются средними значениями соответствующих микроскопических величин

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi \rangle, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{a} \rangle, \quad (6.105)$$

поскольку поля \mathbf{E} и \mathbf{B} (или ϵ и β) получаются из них дифференцированием, согласно (6.29) и (6.31).

Чтобы выразить усредненные потенциалы через молекулярные характеристики, необходимо произвести точно такой же расчет, как в гл. 4, § 3, и гл. 5, § 8, за исключением двух моментов. Во-первых, в соответствии с проведенным в § 6 анализом решения волнового уравнения мы должны пользоваться «запаздывающими» потенциалами. Поэтому те же рассуждения, которые приводили к (4.33), приводят теперь к усредненному скалярному потенциалу

$$\langle \varphi \rangle = \int N(\mathbf{x}') \times \\ \times \left[\frac{\langle e_{\text{мол}}(\mathbf{x}', t') \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \langle \mathbf{p}_{\text{мол}}(\mathbf{x}', t') \rangle \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right]_{\text{запазд}} d^3 x'. \quad (6.106)$$

К этому выражению надо прибавить запаздывающий потенциал, обусловленный избыточными свободными зарядами $Q_{\text{св}}$. Второе изменение касается векторного потенциала. В стационарном случае обусловленный молекулами вклад в векторный потенциал был суммой членов типа потенциала магнитных диполей (5.75). Главные члены в разложениях были равны нулю в силу условия $\text{div } \mathbf{J} = 0$, которое для переменных полей уже несправедливо. Если проследить рассуждения вплоть до соотношения (5.51), то можно убедиться, что главный член в выражении для $\mathbf{a}_{\text{мол}}$ равен

$$\mathbf{a}_{\text{мол}} = \frac{1}{c |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \int \mathbf{J}_{\text{мол}}(\mathbf{x}', t') d^3 x' + \text{Дипольн. члены (5.75)} + \dots . \quad (6.107)$$

Для простоты мы временно опускаем индексы, указывающие на запаздывание. С помощью тождества $\text{div}'(x_i \mathbf{J}) = J_i + x_i \text{div}' \mathbf{J}$ пер-

вый член преобразуется к виду

$$\mathbf{a}_{\text{мол}} = -\frac{1}{c|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} \int \mathbf{x}' \operatorname{div}' \mathbf{J}_{\text{мол}} d^3x' + \text{Дипольн. члены (5.75)} + \dots . \quad (6.108)$$

Используем далее уравнение непрерывности $\operatorname{div}' \mathbf{J}_{\text{мол}} = -\partial Q_{\text{мол}} / \partial t'$ и определение молекулярного электрического дипольного момента (4.25). Тогда (6.108) дает

$$\mathbf{a}_{\text{мол}}(\mathbf{x}, t) \approx \left[\frac{1}{c} \frac{\partial p_j(t')}{\partial t'} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} + \frac{\mathbf{m}_j(t') \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|^3} \right]_{\text{запазд}}. \quad (6.109)$$

В случае переменных полей главный член оказывается пропорциональным скорости изменения электрического дипольного момента¹⁾. Суммируя по всем молекулам и производя усреднение в соответствии с (6.104), получаем средний микроскопический векторный потенциал

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{c} \int N(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial t'} \langle \mathbf{p}_{\text{мол}}(\mathbf{x}', t') \rangle + \right. \\ \left. + c \langle \mathbf{m}_{\text{мол}}(\mathbf{x}', t') \rangle \times \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right]_{\text{запазд}} d^3x'. \quad (6.110)$$

Сюда следует добавить обычное выражение для потенциала макроскопического тока проводимости с плотностью $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$.

Решения (6.106) и (6.110) с добавлением потенциалов, создаваемых свободными зарядами и токами проводимости, можно записать в виде

$$\langle \varphi \rangle = \int \left[\frac{\langle Q \rangle}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right]_{\text{запазд}} d^3x', \\ \langle \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{c} \int \left[\frac{\langle \mathbf{J} \rangle}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right]_{\text{запазд}} d^3x'. \quad (6.111)$$

Входящие сюда усредненные заряды и токи следующим образом зависят от макроскопических векторов поляризации \mathbf{P} и намагниченности \mathbf{M} , определенных соотношениями (4.36) и (5.77):

$$\langle Q \rangle = q - \operatorname{div} \mathbf{P}, \\ \langle \mathbf{J} \rangle = \mathbf{J} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (6.112)$$

где q и \mathbf{J} — макроскопические плотности заряда и тока.

Теперь, наконец, мы в состоянии непосредственно вывести макроскопические уравнения Максвелла из микроскопических. Однородные уравнения Максвелла вытекают непосредственно из

¹⁾ В действительности в случае переменных полей появляется не только главный член, но из второго слагаемого в (5.51) возникает также член, равный $(1/c) \overleftrightarrow{\partial Q} / \partial t \cdot \operatorname{grad}' (1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$, где \overleftrightarrow{Q} — квадрупольная диада молекулы. Поскольку мы удерживаем в (6.106) только дипольные члены, здесь этот квадрупольный член опущен.

определений (6.103). Переходя к неоднородным уравнениям, рассмотрим микроскопическую форму закона Ампера

$$\operatorname{rot} \beta = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}. \quad (6.113)$$

Усредняя обе части равенства и используя выражение (6.112) для $\langle \mathbf{J} \rangle$, мы получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{J} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.114)$$

Так как, согласно определению, $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, то мы приходим к искомому соотношению

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6.115)$$

Другое уравнение $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ выводится аналогичным образом из (6.112).

В заключение анализа макроскопических уравнений поля рассмотрим различие между микроскопической и макроскопической формами теоремы Пойнтинга. В § 8 мы получили макроскопическую форму (6.81) закона сохранения энергии. Записанный явно через поля, он имеет вид

$$\frac{c}{4\pi} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} da + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3x = - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d^3x. \quad (6.116)$$

Чтобы понять смысл входящих сюда сочетаний полей \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , следует установить связь с микроскопической формой теоремы Пойнтинга. Это проще всего сделать, выразив левую часть (6.116) через основные поля \mathbf{E} и \mathbf{B} . Легко видеть, что (6.116) примет при этом вид

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} da + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3x = \\ = - \int_V \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{J} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) d^3x. \end{aligned} \quad (6.117)$$

Из соотношений (6.112) следует, что соотношение (6.117) представляет собой аналог теоремы Пойнтинга для микроскопических полей, в котором каждая величина заменена на свое среднее значение. Оно *не является* простым результатом усреднения теоремы Пойнтинга для микроскопических полей, отличаясь рядом членов, которые выражают сохранение энергии флюктуирующих полей, представляющих собой мгновенные отклонения \mathbf{e} и β от \mathbf{E} и \mathbf{B} . Если не рассматривать эти флюктуирующие поля, мы можем интерпретировать соотношение (6.117) следующим образом.

Будем относить заряды и токи, создаваемые электронами, движущимися внутри молекул, так же как и токи проводимости,

к внешним источникам. Тогда теорема Пойнтинга должна относиться к основным полям **E** и **B** и содержать работу, совершающую электрическим полем в единицу времени над *всеми* токами. Если трактовать работу, совершающую над эффективным молекулярным током $\partial P / \partial t + c \operatorname{rot} \mathbf{M}$, как энергию, содержащуюся или распространяющуюся в среде, то мы можем перенести соответствующий член в левую часть (6.117) и включить его в члены для плотности энергии и потока энергии в среде. Таким образом, мы опять приходим к макроскопической форме теоремы Пойнтинга (6.116), где явно выделена только работа электрического поля над токами проводимости. Энергию, связанную с эффективным молекулярным током, естественно включать в энергию поля, так как она представляет собой характеристику среды и в действительности является запасенной энергией (т. е. реактивной мощностью), которая в среднем не испытывает диссиляции (последнее не верно для магнитных сред при наличии гистерезисных эффектов). Напротив, мощность, связанная с токами проводимости, диссилирует: электрическая энергия превращается в механическую.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Законы сохранения энергии и импульса для электромагнитных полей рассматриваются почти во всех учебниках. Хорошее изложение вопроса об энергии квазистационарных токов и силах, действующих на контуры с током, дано в книге Пановского и Филипса [78], гл. 10, где использован подход, отличный от нашего. В книге Стрэттона [106], гл. 2, подробно рассмотрен тензор максвелловских напряжений с точки зрения сил, действующих на жидкости и твердые тела. Общее рассмотрение законов сохранения, а также теория квазистационарных токов, расчет индуктивностей и сил очень ясно изложены в книге Абрагама и Беккера [1], гл. 8 и 9.

Расчет индуктивностей и теория цепей имеются также в книге Смайта [100], гл. 8—10, и во многих технических учебниках. Опущенные в нашей книге разделы о токах Фуко и индуктивном нагреве рассмотрены с многочисленными примерами в книге Смайта [100], гл. 11.

Основным математическим содержанием этой главы является анализ волнового уравнения. Задачи с начальными условиями для одного, двух, трех и большего числа измерений рассматриваются в книге Морса и Фешбаха [77] и в более математической форме в книге Адамара [47].

Дополнение редактора. Физические основы теории переменных полей хорошо изложены в книге Тамма [130].

ЗАДАЧИ

6.1. а) Показать, что полная энергия системы взаимодействующих элементов тока в магнитном поле в свободном пространстве равна

$$W = \frac{1}{2c^2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ — плотность тока.

б) Пусть имеется n контуров с токами I_1, I_2, \dots, I_n . Показать, что их энергия выражается формулой

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i I_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i=1}^n M_{ij} I_i I_j.$$

Написать интегральное выражение для самоиндукции L_i и взаимоиндукции M_{ij} .

6.2. Двухпроводная линия передачи состоит из пары немагнитных параллельных проводов с радиусами a и b , расположенных на расстоянии $d > (a + b)$. Токи текут по этим проводам в противоположные стороны и равномерно распределены по сечению проводов. Показать, что самоиндукция на единицу длины определяется соотношением

$$c^2 L = 1 + 2 \ln \frac{d^2}{ab}.$$

6.3. Контур представляет собой тонкую проводящую оболочку радиусом a и параллельный ей внутренний обратный провод радиусом b . Предполагая распределение тока однородным по поперечному сечению провода, рассчитать самоиндукцию на единицу длины. Какова будет самоиндукция, если внутренний проводник является тонкой полой трубкой?

6.4. Показать, что взаимоиндукция двух круглых коаксиальных витков в однородной среде с магнитной проницаемостью μ равна

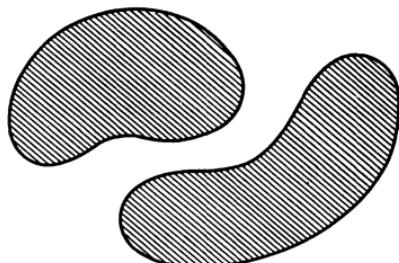
$$M_{12} = \frac{4\pi\mu}{c^2} \sqrt{ab} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right],$$

где

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + d^2};$$

здесь a и b — радиусы витков, d — расстояние между их центрами, а K и E — полные эллиптические интегралы.

Получить предельное выражение для случая, когда $d \ll |a|$ и $a \approx b$.



Фиг. 6.5.

6.5. Линия передачи состоит из двух параллельных идеальных проводников произвольного, но постоянного поперечного сечения (фиг. 6.5). Ток течет по одному из этих проводников и возвращается по другому.

Показать, что произведение индуктивности единицы длины на емкость единицы длины равно

$$LC = \frac{\mu \epsilon}{c^2},$$

где μ и ϵ — магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, окружающей проводники, а c — скорость света в свободном пространстве.

6.6. Доказать, что произвольный вектор \mathbf{F} можно разложить на поперечную и продольную составляющие

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t,$$

такие, что $\operatorname{div} \mathbf{F}_t = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{F}_l = 0$; при этом \mathbf{F}_l и \mathbf{F}_t определяются выражениями (6.49) и (6.50).

6.7. а) Показать, что одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

имеет общее решение

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{2} f\left(t + \frac{x}{c}\right) + \frac{c}{2} \int_{t-(x/c)}^{t+(x/c)} F(t') dt'$$

для граничных условий, при которых величины ψ и $\partial\psi/\partial x$ считаются заданными при $x = 0$ для произвольного времени t :

$$\psi(0, t) = f(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = F(t).$$

б) Найти соответствующее решение для граничных условий, заданных при $t = 0$:

$$\psi(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = g(x).$$

6.8. Рассмотреть закон сохранения энергии и импульса для макроскопической системы источников и электромагнитных полей в среде, описываемой диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ . Показать, что плотность энергии, вектор Пойнтинга, плотность импульса поля и максвелловский тензор натяжений даются выражениями:

$$u = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2),$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}),$$

$$\mathbf{g} = \frac{\mu \epsilon}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}),$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[\epsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \right].$$

Что изменится, если ϵ и μ будут зависеть от пространственных координат?

6.9. В тех же предположениях, что и в задаче 6.8, рассмотреть закон сохранения момента количества движения. Показать, что дифференциаль-

ная и интегральная формы закона сохранения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{L}_{\text{мех}} + \mathcal{L}_{\text{полев}}) + \operatorname{div} \overleftrightarrow{\mathbf{M}} = 0$$

и

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathcal{L}_{\text{мех}} + \mathcal{L}_{\text{полев}}) d^3x + \int_S \mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{M}} da = 0,$$

где плотность момента количества движения электромагнитного поля есть

$$\mathcal{L}_{\text{полев}} = \mathbf{x} \times \mathbf{g} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}),$$

а поток момента количества движения поля описывается тензором

$$\overleftrightarrow{\mathbf{M}} = \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \times \mathbf{x}.$$

Замечание. $\overleftrightarrow{\mathbf{M}}$ можно записать в виде тензора третьего ранга, $M_{ijk} = T_{ijk}x_h - T_{ikh}x_j$. Он антисимметричен по индексам j и k и поэтому имеет всего три независимых компоненты. С учетом индекса i тензор M_{ijk} имеет девять компонент и может быть представлен как псевдотензор второго ранга, как это и сделано выше.

6.10. Плоская волна падает нормально на полностью поглощающий плоский экран.

а) Используя закон сохранения импульса, показать, что давление (так называемое радиационное давление), действующее на экран, равно энергии поля в единице объема.

б) Вблизи Земли поток электромагнитной энергии от Солнца приблизительно равен $0,14 \text{ вт}/\text{см}^2$. Пусть межпланетный «парусный корабль» имеет парус с массой 10^{-4} г на 1 см^2 его площади и пренебрежимо малый вес остальной части. Каково будет максимальное ускорение в $\text{см}/\text{сек}^2$, обусловленное давлением солнечного излучения? Сравнить с ускорением, обусловленным солнечным «ветром» (корпускулярной радиацией).

6.11. Циркулярно поляризованные волны, распространяющиеся в z -направлении, имеют конечную протяженность в x - и y -направлениях. Предполагая, что амплитуда изменяется медленно (ширина фронта много больше длины волны), показать, что электрическое и магнитное поля приближенно выражаются формулами

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) \approx \left[E_0(x, y)(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) + \frac{i}{k} \left(\frac{\partial E_0}{\partial x} \pm i \frac{\partial E_0}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3 \right] e^{ikz-i\omega t},$$

$$\mathbf{B} \approx \mp i \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \mathbf{E},$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — единичные векторы по осям x, y и z .

6.12. Для циркулярно поляризованной волны, рассмотренной в задаче 6.11, рассчитать среднюю по времени составляющую момента количества движения, параллельную направлению распространения. Показать, что отношение этой составляющей момента количества движения к энергии волны равно

$$\frac{L_3}{U} = \pm \omega^{-1}.$$

Объяснить этот результат с точки зрения представления о световых квантах (фотонах). Показать, что для цилиндрически симметричной ограниченной плоской волны поперечные составляющие момента количества движения равны нулю.