

Глава 7

ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Предметом настоящей главы являются плоские волны в неограниченном или полуограниченном пространстве. В первую очередь будут рассмотрены основные свойства плоских волн в непроводящей среде — их поперечная природа и различные типы поляризации. Затем описывается поведение одномерных волновых пакетов, вводятся понятия групповой скорости и дисперсии. Исследуется преломление и отражение волн от плоской границы раздела двух диэлектриков. Далее рассматриваются плоские волны в проводящей среде и анализируется простейшая модель электропроводности. Затем эта модель видоизменяется так, чтобы ее можно было применить к разреженной плазме или электронному газу, и рассматривается распространение поперечных волн в плазме, находящейся во внешнем статическом магнитном поле.

§ 1. Плоские волны в непроводящей среде

Характерной особенностью уравнений Максвелла для электромагнитного поля является существование решений в виде распространяющихся волн, несущих с собою энергию. Простейшим и вместе с тем наиболее важным случаем электромагнитных волн являются поперечные плоские волны. Прежде всего рассмотрим, как получаются такие решения в непроводящей среде, описываемой постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями. Уравнения Максвелла в неограниченном пространстве без источников имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где параметры μ , ϵ — характеристики среды. Комбинируя два содержащих роторы уравнения и учитывая равенство нулю дивергенций, мы легко найдем, что любая декартова составляющая полей E и B удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (7.2)$$

где постоянная

$$v = \sqrt{\frac{c}{\mu \epsilon}}, \quad (7.3)$$

имеющая размерность скорости, является характеристикой среды. Волновое уравнение (7.2) имеет известное решение в виде плоской волны

$$u = e^{ik \cdot x - i\omega t}, \quad (7.4)$$

где частота ω и модуль волнового вектора k связаны соотношением

$$k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\mu \epsilon} \frac{\omega}{c}. \quad (7.5)$$

Если мы рассмотрим волны, распространяющиеся только в одном направлении, скажем в x -направлении, то фундаментальным решением будет

$$u(x, t) = A e^{ikx - i\omega t} + B e^{-ikx - i\omega t}. \quad (7.6)$$

Используя (7.5), мы можем написать

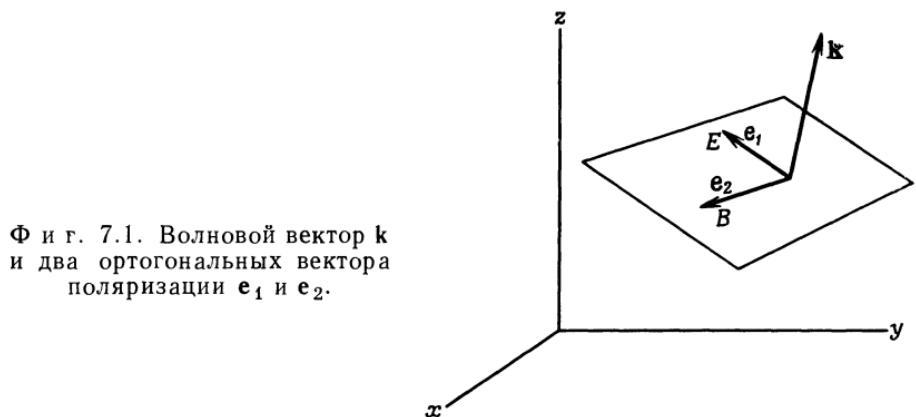
$$u_k(x, t) = A e^{ik(x-vt)} + B e^{-ik(x+vt)}. \quad (7.7)$$

Если v не зависит от k (т. е. рассматривается недиспергирующая среда, для которой $\mu \epsilon$ не зависит от частоты), то, как мы знаем, из интегральной теоремы Фурье [см. (2.50) и (2.51)] с помощью линейной суперпозиции $u_k(x, t)$ можно построить общее решение вида

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt), \quad (7.8)$$

где f и g — произвольные функции. Легко проверить и непосредственно, что это решение действительно удовлетворяет волновому уравнению (7.2). Оно описывает волны, движущиеся соответственно в положительном и отрицательном направлениях по x со скоростью v , которая называется фазовой скоростью волны. Если же v зависит от k , то ситуация не будет простой — начальные волны $f(x)$ и $g(x)$ уже не распространяются со скоростью v без искажения формы (см. § 3). Однако для каждой частотной компоненты скорость v , определенная равенством (7.3), остается фазовой скоростью.

Плоские волны, определяемые соотношениями (7.4) и (7.5), удовлетворяют скалярному волновому уравнению (7.2). Но нужно еще учесть векторный характер полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла. Принимая условие, что истинные электрическое



Фиг. 7.1. Волновой вектор \mathbf{k} и два ортогональных вектора поляризации \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 .

и магнитное поля соответствуют действительным частям комплексных величин, будем искать \mathbf{E} и \mathbf{B} в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{e}_1 E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{e}_2 B_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t},\end{aligned}\quad (7.9)$$

где \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — постоянные единичные векторы, а E_0 и B_0 — комплексные амплитуды, постоянные как в пространстве, так и во времени. Из условий $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ следуют равенства

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (7.10)$$

которые означают, что \mathbf{E} и \mathbf{B} перпендикулярны направлению распространения волны \mathbf{k} . Такие волны называются *поперечными*. Роторные уравнения приводят к дальнейшим ограничениям. Подставляя (7.9) в первое роторное уравнение (7.1), получаем

$$i \left[(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1) E_0 - \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_2 B_0 \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} = 0. \quad (7.11)$$

Уравнение (7.11) (в действительности это несколько уравнений) имеет решение

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1}{k}, \quad (7.12)$$

$$B_0 = \sqrt{\mu \epsilon} E_0. \quad (7.13)$$

Таким образом, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{k} образуют систему ортогональных векторов, векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} колеблются в фазе и отношение \mathbf{E} к \mathbf{B} постоянно (фиг. 7.1). Волна, описываемая соотношениями (7.9), (7.12)

и (7.13), является поперечной волной, распространяющейся в направлении \mathbf{k} . Соответствующий средний по времени поток энергии определяется действительной частью комплексного вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*. \quad (7.14)$$

Этот поток (энергия, проходящая через единицу площади в единицу времени) равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |E_0|^2 \mathbf{e}_3, \quad (7.15)$$

где \mathbf{e}_3 — единичный вектор в направлении \mathbf{k} .

Средняя по времени плотность энергии равна

$$u = \frac{1}{16\pi} \left(\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \right), \quad (7.16)$$

откуда следует, что

$$u = \frac{\epsilon}{8\pi} |E_0|^2. \quad (7.17)$$

Беря отношение абсолютных величин (7.15) и (7.17), мы видим, что скорость потока энергии равна $v = c/\sqrt{\mu\epsilon}$, что и следовало ожидать согласно (7.8).

§ 2. Линейная и круговая поляризация

В плоской волне (7.9) вектор электрического поля направлен вдоль \mathbf{e}_1 . Такая волна называется линейно поляризованной с вектором поляризации \mathbf{e}_1 .

Для получения общего случая поляризации нам нужна еще одна линейно поляризованная волна, не зависящая от первой. Ясно, что две волны

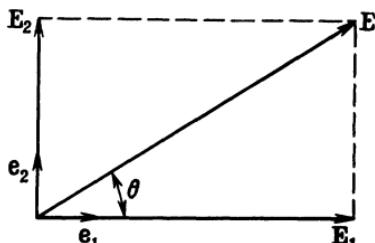
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_1 E_1 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{e}_2 E_2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{B}_j &= \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_j}{k} \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

у которых

представляют собой два таких линейно независимых решения. Амплитуды E_1 и E_2 являются комплексными числами, что позволяет ввести разность фаз между обеими волнами. Общее решение для плоской волны, распространяющейся в направлении \mathbf{k} , дается линейной комбинацией \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{e}_1 E_1 + \mathbf{e}_2 E_2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}. \quad (7.19)$$

Если E_1 и E_2 имеют одинаковые фазы, то (7.19) представляет собой линейно поляризованную волну с вектором поляризации, направленным под углом $\theta = \arctg(E_2/E_1)$ к оси e_1 и с амплитудой $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$, как показано на фиг. 7.2.



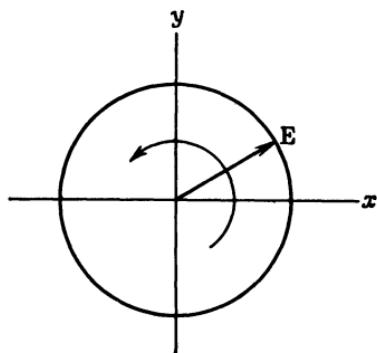
Фиг. 7.2. Электрическое поле линейно поляризованной волны.

Если же E_1 и E_2 имеют различные фазы, то волна (7.19) эллиптически поляризована.

Чтобы понять, что это означает, рассмотрим простейший случай круговой (или циркулярной) поляризации. При этом E_1 и E_2 одинаковы по абсолютной величине, а по фазе отличаются на 90° . Волна (7.19) принимает вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E_0 (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (7.20)$$

где E_0 — ее действительная амплитуда. Пусть оси координат выбраны таким образом, что волна распространяется в положи-



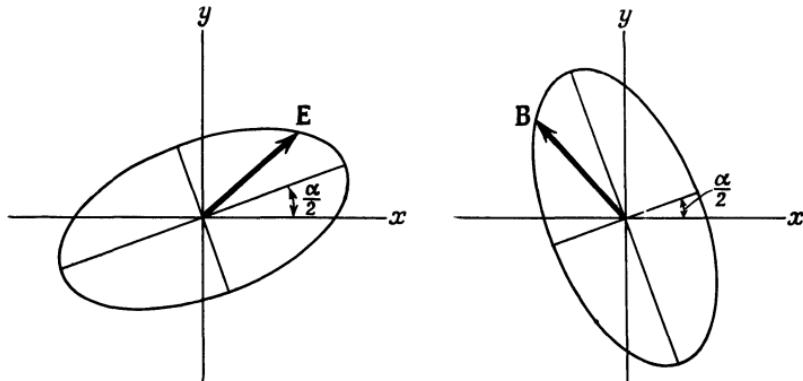
Фиг. 7.3. Электрическое поле волны с круговой поляризацией.

тельном направлении оси z , если e_1 и e_2 направлены соответственно вдоль осей x и y . Составляющие электрического поля мы получим, беря действительную часть (7.20):

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{x}, t) &= E_0 \cos(kz - \omega t), \\ E_y(\mathbf{x}, t) &= \mp E_0 \sin(kz - \omega t). \end{aligned} \quad (7.21)$$

В любой фиксированной точке пространства электрический вектор поля (7.21) имеет постоянную амплитуду, но вращается по кругу с частотой ω , как показано на фиг. 7.3. Верхний знак, $(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)$,

соответствует вращению против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего навстречу волне. Эта волна в оптике называется *волной с левой круговой поляризацией*. По терминологии современной физики эта волна, как говорят, имеет *положительную спиральность*. Последний термин представляется более удобным, поскольку в такой волне момент количества движения имеет положительную составляющую по оси z (см. задачу 6.12). При нижнем знаке,



Ф и г. 7.4. Электрическое и магнитное поля в эллиптически поляризованной волне.

$(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2)$, если также смотреть навстречу волне, вращение электрического вектора происходит по часовой стрелке; это — волна с правой круговой поляризацией (в оптике), иными словами, она имеет *отрицательную спиральность*.

Две волны с круговой поляризацией (7.20) аналогично линейно поляризованным волнам представляют собой базисную систему для описания общего случая поляризованных волн. Введем комплексные ортогональные единичные векторы

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2), \quad (7.22)$$

обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\mp} &= 0, \\ \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_3 &= 0, \\ \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\pm} &= 1. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Тогда общее представление (7.19) можно записать в эквивалентном виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_+ \mathbf{e}_+ + E_- \mathbf{e}_-) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (7.24)$$

где E_+ и E_- — комплексные амплитуды. Если E_+ и E_- различны по модулю, но имеют одинаковые фазы, то (7.24) представляет

собой эллиптически поляризованную волну с главными осями эллипса, расположенными вдоль \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Отношение полуосей эллипса равно $(1+r)/(1-r)$, где $r = E_-/E_+$. Если же комплексные амплитуды E_+ и E_- имеют различные фазы, так что $E_-/E_+ = re^{ia}$, то оси эллипса, описываемого вектором \mathbf{E} , повернуты на угол $\alpha/2$. На фиг. 7.4 показан общий случай эллиптической поляризации: в каждой точке пространства векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} описывают эллипсы, изображенные на фиг. 7.4.

При $r = \pm 1$ мы возвращаемся к случаю линейно поляризованных волн.

§ 3. Суперпозиция волн в одном измерении. Групповая скорость

Выше мы нашли решения уравнений Максвелла в виде плоских волн и обсудили их свойства. Мы ограничились рассмотрением только монохроматических волн с заданными частотой и волновым числом. Однако в реальных условиях таких идеализированных волн не существует. Даже самый монохроматический источник света и остронастроенный радиопередатчик дают излучение в конечном (хотя, возможно, и малом) интервале частот или длин волн. Немонохроматичность связана с конечной продолжительностью импульса, с собственной шириной линии в источнике света, а также с множеством других причин. Так как основные уравнения линейны, мы можем в принципе очень просто получить любую линейную суперпозицию решений с различными частотами. В действительности, однако, следует иметь в виду некоторые особенности.

1. В диспергирующей среде (где диэлектрическая проницаемость является функцией частоты поля) волны, имеющие разные частоты, распространяются с различными фазовыми скоростями. В результате изменяются взаимные фазы различных компонент. В частности, это приводит к изменению формы импульса по мере его распространения.

2. Скорость потока энергии в диспергирующей среде может сильно отличаться от фазовой скорости и даже не иметь определенного значения.

3. В среде с поглощением импульс излучения, затухая, не сохраняет своей формы, если поглощение существенно зависит от частоты.

По существу, эти дисперсионные и диссипативные эффекты неявно учитываются в теории рядов и интегралов Фурье (см. гл. 2, § 9). Возьмем для простоты скалярные одномерные волны. Пусть $u(x, t)$ является скалярной функцией, под которой мы можем подразумевать любую из декартовых составляющих электромагнит-

ного поля. Основное решение волнового уравнения (7.2) возьмем в форме (7.6). Связь между частотой ω и волновым числом k электромагнитных волн дается соотношением (7.5). При линейной суперпозиции мы можем принять за независимую переменную либо ω , либо k . Примем сначала за независимую переменную волновое число k . Для учета дисперсии будем считать ω произвольной функцией k

$$\omega = \omega(k). \quad (7.25)$$

Поскольку дисперсионные свойства среды не могут зависеть от направления распространения волны, частота ω должна быть четной функцией k , так что $\omega(-k) = \omega(k)$. Для большинства длин волн ω является медленно меняющейся функцией k . Однако при некоторых частотах имеются области «аномальной дисперсии», где ω меняется быстро в узком интервале длин волн. Последующее рассмотрение, основанное только на общей формуле (7.25), одинаково применимо к электромагнитным волнам, звуковым волнам, волнам де Броиля и т. д. Мы будем пока считать, что k и $\omega(k)$ вещественны, исключив тем самым из рассмотрения диссипативные эффекты.

Из фундаментальных решений (7.6) мы можем построить общее решение в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk. \quad (7.26)$$

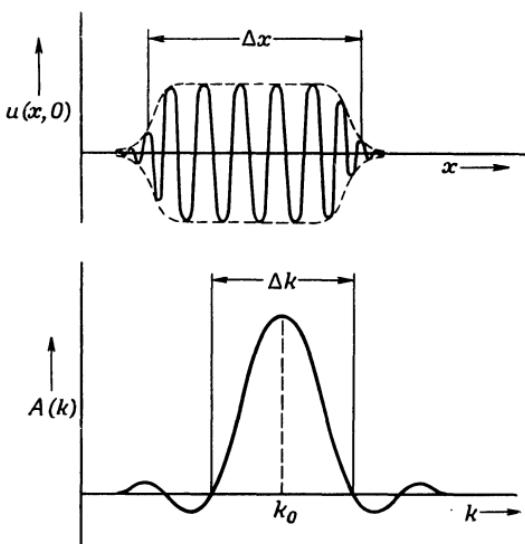
Множитель $1/\sqrt{2\pi}$ введен для согласования с обозначениями теории интегралов Фурье [см. (2.50) и (2.51)]. Амплитуда $A(k)$ описывает свойства линейной суперпозиции различных волн. Она определяется через значение пространственной амплитуды $u(x, t)$ при $t = 0$ ¹⁾ с помощью преобразования

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx. \quad (7.27)$$

Если $u(x, 0)$ представляет собой гармоническую волну $\exp(ik_0x)$ на всей оси x , то из соотношения ортогональности (2.52) следует $A(k) = \sqrt{2\pi} \delta(k - k_0)$, что соответствует монохроматической бегущей волне $u(x, t) = \exp[ik_0x - i\omega(k_0)t]$, как и должно быть. Если же при $t = 0$ функция $u(x, 0)$ представляет собой волновой

¹⁾ В последующем изложении мы не касаемся вопроса о начальных условиях. Для дифференциального уравнения второго порядка мы должны были бы задать не только $u(x, 0)$, но также и $du(x, 0)/dt$. Однако это обстоятельство не повлияет на результаты данного раздела. Оно будет учтено в следующем параграфе.

пакет конечной длины порядка Δx (фиг. 7.5), то амплитуда $A(k)$ уже не будет δ -функцией. Она будет представляться пикообразной функцией с шириной порядка Δk с максимумом вблизи волнового числа k_0 , являющегося основным волновым числом модулированной волны $u(x, 0)$. Если обозначить через Δx и Δk среднеквадра-



Фиг. 7.5. Синусоидальный волновой пакет конечной протяженности и его фурье-спектр.

тичные отклонения величин x и k [определенные через интенсивности $|u(x, 0)|^2$ и $|A(k)|^2$], то для них можно вывести общее соотношение

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}. \quad (7.28)$$

Читатель может легко убедиться, что обычно для импульсов или волновых пакетов, не слишком быстро обрывающихся по краям, произведение Δx на Δk близко к предельной величине $\frac{1}{2}$. Это означает, что короткому отрезку волны всего лишь в несколько длин волн соответствует широкое распределение волновых чисел, и наоборот, «длинная» синусоидальная волна почти монохроматична. Соотношение (7.28) в равной мере применимо к отклонениям времени и частоты.

Рассмотрим теперь изменение во времени импульса, или ограниченного во времени волнового отрезка.

Импульс, изображенный на фиг. 7.5 для момента $t = 0$, с течением времени перемещается. Компоненты с различными частотами

и волновыми числами движутся с разными фазовыми скоростями. Таким образом, имеется тенденция к потере первоначальной когерентности и к искажению формы импульса. Поэтому мы можем ожидать, что импульс будет распространяться со скоростью, несколько отличающейся, скажем, от средней фазовой скорости составляющих его волн. Рассмотрение общего случая сильно диспергирующей среды, а также очень короткого импульса с широким интервалом волновых чисел довольно сложно. Однако распространение импульса с не слишком широким спектром волновых чисел, а также распространение импульса в среде, в которой частота слабо зависит от волнового числа, может быть рассмотрено следующим приближенным методом. В любой момент времени t волна описывается соотношением (7.26). Если функция $A(k)$ имеет достаточно острый пик около некоторого волнового числа k_0 , то частоту $\omega(k)$ можно разложить в ряд в окрестности $k = k_0$:

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 (k - k_0) + \dots . \quad (7.29)$$

При этом интеграл преобразуется к виду

$$u(x, t) \approx \frac{\exp \{i [k_0 (d\omega/dk)|_0 - \omega_0] t\}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp \left\{ i \left[x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 t \right] k \right\} dk. \quad (7.30)$$

Из сравнения с выражением (7.27) и с обратным фурье-образом следует, что интеграл в (7.30) равен $\sqrt{2\pi} u(x', 0)$, где $x' = x - (d\omega/dk)|_0 t$, т. е.

$$u(x, t) \approx u \left(x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 t, 0 \right) \exp \left\{ i \left[k_0 \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 - \omega_0 \right] t \right\}. \quad (7.31)$$

Отсюда видно, что если не говорить об общем фазовом множителе, то импульс движется без искажения формы со скоростью

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_0, \quad (7.32)$$

которая носит название *групповой скорости*. Если плотность энергии определяется амплитудой волны (точнее, квадратом ее модуля), то ясно, что в этом приближении перенос энергии происходит с групповой скоростью, т. е. со скоростью движения импульса.

Для световых волн связь между ω и k описывается соотношением

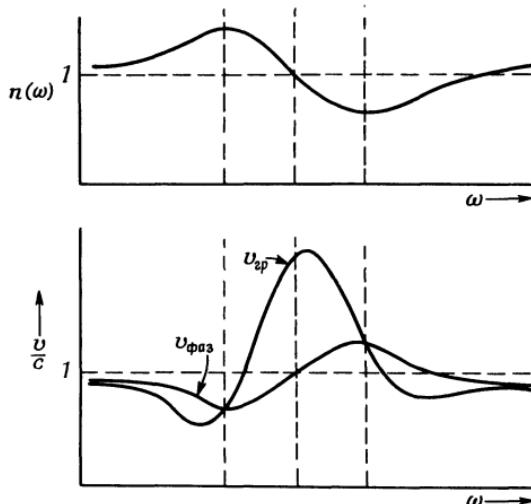
$$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)}, \quad (7.33)$$

где c — скорость света в свободном пространстве, а $n(k)$ — пока-

затель преломления в функции от k . Фазовая скорость

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)} \quad (7.34)$$

может быть как меньше, так и больше c в зависимости от того, больше или меньше единицы величина $n(k)$. Для большинства



Фиг. 7.6. Зависимость показателя преломления $n(\omega)$, фазовой скорости $v_{\text{фаз}}$ и групповой скорости $v_{\text{гр}}$ от частоты ω в области аномальной дисперсии.

длин волн в оптическом диапазоне $n(k)$ больше единицы почти во всех средах. Групповая скорость (7.32) равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{n(\omega) + \omega(dn/d\omega)}. \quad (7.35)$$

В этом соотношении более удобно считать n функцией от ω , а не от k . При нормальной дисперсии производная $dn/d\omega$ положительна и, кроме того, $n > 1$; таким образом, скорость потока энергии меньше фазовой скорости, а также меньше c . В области же аномальной дисперсии $dn/d\omega$ может оказаться большой отрицательной величиной. При этом групповая скорость будет сильно отличаться от фазовой скорости и может стать больше c ¹⁾.

Зависимость групповой и фазовой скоростей от частоты в области аномальной дисперсии показана на фиг. 7.6.

¹⁾ Здесь нет оснований беспокоиться, что нарушаются принципы специальной теории относительности, поскольку в этом случае групповая скорость теряет свой физический смысл. Большая величина $dn/d\omega$ означает, что ω быстро меняется при изменении k , и, следовательно, приближение (7.29) и вытекающие из него соотношения неприменимы. В этом случае поведение импульса гораздо более сложно.

§ 4. Примеры распространения импульсов в диспергирующей среде

Чтобы проиллюстрировать общую теорию предыдущего параграфа и показать применимость понятия групповой скорости, рассмотрим теперь некоторый частный случай зависимости частоты от волнового числа и точно рассчитаем распространение импульса в такой среде. Но прежде чем переходить к частной модели, необходимо более детально, чем это делалось при выводе (7.26) и (7.27), сформулировать задачу с начальными условиями. Как отмечалось выше, при корректной постановке задачи с начальными условиями для волнового уравнения требуется задать начальные значения функции $u(x, t)$ и ее производной по времени $\partial u(x, 0)/\partial t$. Так как для получения $u(x, t)$ мы условились брать действительную часть (7.26)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk + \text{Компл. сопр.}, \quad (7.36)$$

то легко видеть, что $A(k)$ следующим образом выражается через начальные величины:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk} \left[u(x, 0) + \frac{i}{\omega(k)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right] dx. \quad (7.37)$$

Рассмотрим теперь импульс, в начальный момент представляющий собой модулированную синусоидальную волну, огибающая которой является гауссовой кривой:

$$u(x, 0) = e^{-x^2/2L^2} \cos k_0 x. \quad (7.38)$$

Для простоты предположим, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (7.39)$$

Это означает, что в момент времени, непосредственно предшествующий моменту $t = 0$, волна состояла из двух импульсов, каждый из которых двигался по направлению к началу координат, так что при $t = 0$ они совместились и образовали импульс (7.38). Ясно, что в последующие моменты времени импульсы будут продолжать двигаться в противоположные стороны. Таким образом, следует ожидать, что начальное распределение (7.38) расщепится на два одинаковых волновых пакета, один из которых будет двигаться влево, а другой—вправо. Амплитуда Фурье $A(k)$ импульса,

задаваемого соотношениями (7.38) и (7.39), имеет вид

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{V^{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-x^2/2L^2} \cos k_0 x \, dx = \\ &= \frac{L}{2} \left\{ \exp \left[-\frac{L^2}{2}(k - k_0)^2 \right] + \exp \left[-\frac{L^2}{2}(k + k_0)^2 \right] \right\}. \quad (7.40) \end{aligned}$$

Как мы увидим ниже, четность функции $A(k)$ [$A(-k) = A(k)$] как раз и отражает наличие двух импульсов, движущихся в разные стороны от начала координат.

Чтобы рассчитать форму волны в последующие моменты времени, мы должны задать $\omega = \omega(k)$. В качестве модели, допускающей точное решение и позволяющей выявить существенные особенности дисперсии, мы выберем зависимость

$$\omega(k) = v \left(1 + \frac{a^2 k^2}{2} \right); \quad (7.41)$$

здесь v — постоянная частота, а a — постоянная длина, определяющая характерную длину волны, для которой дисперсия становится существенной. Импульс (7.38) представляет собой модулированную волну с волновым числом $k = k_0$, поэтому из приближенной теории предыдущего параграфа вытекает, что оба импульса должны двигаться с групповой скоростью

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} (k_0) = v a^2 k_0 \quad (7.42)$$

и не должны существенно изменяться по форме (если, конечно, они не являются слишком узкими).

Точное описание зависимости от времени можно получить из соотношений (7.36) и (7.40) для $A(k)$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{L}{2 V^{2\pi}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{L^2}{2}(k - k_0)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \exp \left[-\frac{L^2}{2}(k + k_0)^2 \right] \right\} \exp \left\{ ikx - ivt \left[1 + \frac{a^2 k^2}{2} \right] \right\} dk. \quad (7.43) \end{aligned}$$

Интеграл легко вычисляется, если дополнить показатели экспонент до полных квадратов. В результате получим

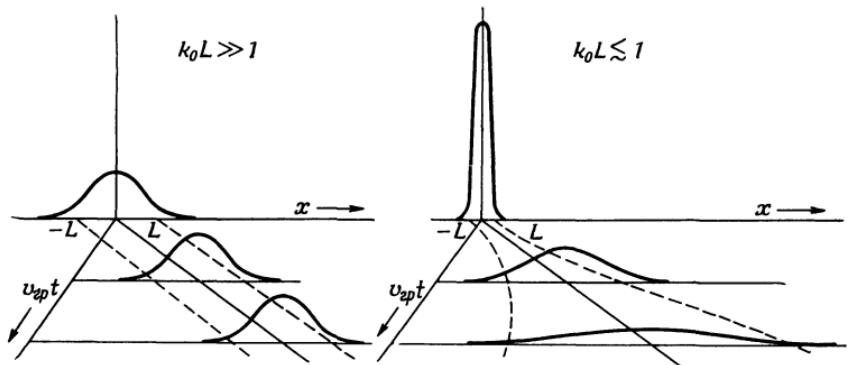
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp \left[-(x - va^2 k_0 t)^2 / 2L^2 \left(1 + \frac{ia^2 vt}{L^2} \right) \right]}{\left[1 + (ia^2 vt / L^2) \right]^{1/2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[ik_0 x - iv \left(1 + \frac{a^2 k_0^2}{2} \right) t \right] + (k_0 \rightarrow -k_0) \right\}, \quad (7.44) \end{aligned}$$

где член $(k_0 \rightarrow -k_0)$ имеет тот же вид, что и первый, но с заменой k_0 на $-k_0$.

Выражение (7.44) описывает два импульса, распространяющихся в противоположных направлениях. Максимум амплитуды каждого импульса движется с групповой скоростью (7.42), а огибающая кривая остается по форме гауссовой. Однако ширина этой гауссовой кривой не постоянна, а растет со временем. Эффективная ширина огибающей равна

$$L(t) = \left[L^2 + \left(\frac{a^2 v t}{L} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (7.45)$$

Таким образом, влияние дисперсии на импульс тем сильнее (за данный отрезок времени), чем острее его огибающая. Условием малости



Фиг. 7.7. Изменение формы волнового пакета при его движении.

Пакет, ширина которого велика по сравнению с длиной волны ($k_0 L \gg 1$), искажается сравнительно мало, в то время как узкий пакет ($k_0 L \lesssim 1$) быстро расширяется, а его амплитуда уменьшается.

изменения формы является $L \gg a$. Конечно, для очень больших промежутков времени t ширина гауссовой кривой всегда будет линейно возрастать со временем:

$$L(t) \rightarrow \frac{a^2 v t}{L}, \quad (7.46)$$

но время, в течение которого происходит переход к этой асимптотической зависимости, определяется отношением L/a . Для оценки скорости расширения импульса можно сопоставить величину $L(t)$, определяемую соотношением (7.45), с величиной $v_{grp}t = va^2 k_0 t$. На фиг. 7.7, где представлены для примера два импульса, изображены кривые положения максимумов $x = v_{grp}t$ и линии $v_{grp}t \pm L(t)$, показывающие расширение импульса со временем. В левой части фиг. 7.7 импульс содержит много длин волн k_0^{-1} и поэтому почти не расплывается. В правой части показано поведение первоначально узкого импульса, который расплывается настолько быстро, что по прошествии короткого времени его уже даже нельзя назвать импульсом.

Хотя предыдущие результаты получены при некотором специальном выборе начальной формы импульса (7.38) и дисперсионного соотношения (7.41), они имеют более общее значение. В § 3 было показано, что средней скоростью импульса является групповая скорость $v_{\text{grp}} = d\omega/dk = \omega'$. Расширение импульса объясняется тем, что импульсу с начальной шириной Δx_0 присущ разброс волновых чисел $\Delta k \sim 1/\Delta x_0$. Отсюда следует, что групповая скорость, определенная для различных величин k внутри импульса, имеет разброс порядка

$$\Delta v_{\text{grp}} \sim \omega'' \Delta k \sim \frac{\omega''}{\Delta x_0}. \quad (7.47)$$

За время t это приводит к расширению на величину $\sim \Delta v_{\text{grp}} t$. Если мы сложим квадратично начальную ширину и уширение из-за разброса групповой скорости, то получим ширину $\Delta x(t)$ в момент времени t :

$$\Delta x(t) \approx \sqrt{(\Delta x_0)^2 + \left(\frac{\omega'' t}{\Delta x_0}\right)^2}, \quad (7.48)$$

Мы видим, что (7.48) в точности совпадает с (7.45), если положить $\Delta x_0 = L$. Выражение (7.48) для $\Delta x(t)$ показывает, что если $\omega'' \neq 0$, то узкий импульс расплывается быстро, поскольку он характеризуется широким спектром волновых чисел, и, наоборот, широкий импульс расплывается медленно. Все эти соображения непосредственно применимы и в волновой механике. Они лежат в основе принципа неопределенностей Гейзенberга. В волновой механике частота равна энергии, деленной на постоянную Планка, а волновое число — механическому импульсу, также деленному на постоянную Планка.

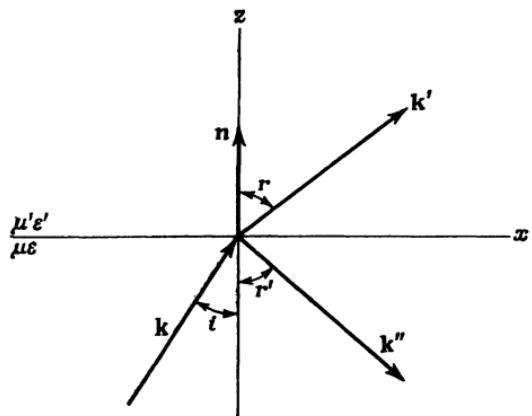
Задача о движении волновых пакетов в дисипативной диспергирующей среде является довольно сложной. Некоторые частные случаи поддаются аналитическому описанию, но получающимся аналитическим выражениям трудно дать физическую интерпретацию. Волновые пакеты в такой среде затухают и существенно искажаются при распространении. Мы отсылаем читателя к книге Стрэттона [106], где рассмотрен этот вопрос и приведены примеры численных расчетов.

§ 5. Отражение и преломление электромагнитных волн на плоской границе раздела между диэлектриками

Явления отражения и преломления света на плоской поверхности между двумя средами с различными диэлектрическими свойствами общеизвестны. Характеристики этих явлений можно разбить на два класса:

1. Кинематические характеристики
 - а) закон отражения: угол падения равен углу отражения;
 - б) закон преломления Снеллиуса: $\sin i / \sin r = n' / n$, где i и r — углы падения и преломления, n и n' — соответствующие показатели преломления.
2. Динамические характеристики
 - а) интенсивность отраженного и преломленного света;
 - б) изменение фазы и поляризация.

Кинематические характеристики непосредственно вытекают из волновой природы явления и необходимости удовлетворения граничных условий. Они не зависят от конкретного типа волн или



Фиг. 7.8. Отражение и преломление на плоской границе раздела двух различных сред. k — падающая волна, k'' — отраженная, k' — преломленная.

вида граничных условий. Динамические же характеристики зависят от специфики электромагнитных полей и их граничных условий.

Координатная система и принятые обозначения показаны на фиг. 7.8. Среды, расположенные снизу и сверху от плоскости $z = 0$, характеризуются соответственно магнитной и электрической проницаемостями μ , ϵ и μ' , ϵ' . Плоская волна с волновым вектором k и частотой ω падает из среды μ , ϵ . Преломленная волна имеет волновой вектор k' , отраженная — волновой вектор k'' , а n — единичный вектор нормали, направленный из среды μ , ϵ в среду μ' , ϵ' . Согласно (7.18), электрическое и магнитное поля для указанных трех волн можно записать в виде:

для падающей волны

$$\mathbf{E} = E_0 e^{ik \cdot \mathbf{x} - i\omega t},$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mu \epsilon} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{k}, \quad (7.49)$$

для преломленной волны

$$\mathbf{E}' = E'_0 e^{ik' \cdot \mathbf{x} - i\omega t},$$

$$\mathbf{B}' = \sqrt{\mu' \epsilon'} \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'}{k'}, \quad (7.50)$$

для отраженной волны

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'' &= \mathbf{E}_0'' e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{B}'' &= \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''}{k}.\end{aligned}\quad (7.51)$$

Волновые числа имеют следующую абсолютную величину:

$$\begin{aligned}|\mathbf{k}| &= |\mathbf{k}''| = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\epsilon}, \\ |\mathbf{k}'| &= k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu'\epsilon'}.\end{aligned}\quad (7.52)$$

Из наличия граничных условий при $z = 0$, которые должны удовлетворяться во всех точках плоскости в любой момент времени, вытекает требование одинаковой зависимости от координат и времени всех полей при $z = 0$. Поэтому независимо от характера граничных условий при $z = 0$ все фазовые множители должны совпадать:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x})_{z=0}. \quad (7.53)$$

Соотношение (7.53) дает кинематические характеристики отражения и преломления. Легко видеть, что все три волновых вектора должны лежать в одной плоскости. Далее, в обозначениях фиг. 7.8

$$k \sin i = k' \sin r = k'' \sin r'. \quad (7.54)$$

Поскольку $k'' = k$, то $i = r'$, т. е. угол падения равен углу отражения. Отсюда же следует и закон Снеллиуса:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{k'}{k} = \sqrt{\frac{\mu'\epsilon'}{\mu\epsilon}} = \frac{n'}{n}. \quad (7.55)$$

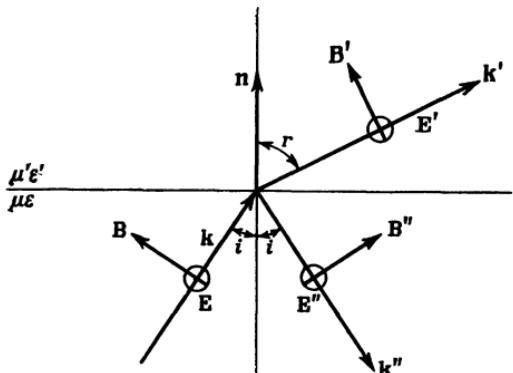
Динамические характеристики вытекают из граничных условий непрерывности нормальных составляющих \mathbf{D} и \mathbf{B} и тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} . Для полей (7.49) — (7.51) граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned}[\epsilon(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'') - \epsilon' \mathbf{E}_0'] \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0'] \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0') \times \mathbf{n} &= 0, \\ \left[\frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'') - \frac{1}{\mu'} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0' \right] \times \mathbf{n} &= 0.\end{aligned}\quad (7.56)$$

При применении этих граничных условий удобно рассмотреть отдельно два случая: случай, когда вектор поляризации падающей плоской линейно поляризованной волны перпендикулярен плоскости падения (плоскости, образованной векторами \mathbf{k} и \mathbf{n}), и случай, когда вектор поляризации лежит в плоскости падения. Общий

случай произвольной эллиптической поляризации, как показано в § 2, может быть получен линейной комбинацией этих двух решений.

Рассмотрим сначала случай, когда электрическое поле перпендикулярно плоскости падения (фиг. 7.9). Векторы электрического поля направлены от читателя. Ориентации векторов \mathbf{B} выбраны



Фиг. 7.9. Отражение и преломление при поляризации, перпендикулярной плоскости падения.

таким образом, чтобы поток энергии был направлен вдоль волновых векторов. Так как все электрические поля параллельны плоскости раздела, то первое граничное условие (7.56) ничего не дает. Из третьего и четвертого условий (7.56) получаем

$$\frac{E_0 + E''_0 - E'_0}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}} = 0, \quad (7.57)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (E_0 - E''_0) \cos i - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} E'_0 \cos r = 0.$$

Второе условие (7.56) при учете закона Снеллиуса дублирует третье условие. Относительные амплитуды преломленной и отраженной волн определяются соотношениями (7.57).

Таким образом, в случае, когда поле \mathbf{E} *перпендикулярно плоскости падения*, имеем

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2}{1 + (\mu \operatorname{tg} i / \mu' \operatorname{tg} r)} \rightarrow \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r)}, \quad (7.58)$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{1 - (\mu \operatorname{tg} i / \mu' \operatorname{tg} r)}{1 + (\mu \operatorname{tg} i / \mu' \operatorname{tg} r)} \rightarrow -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}.$$

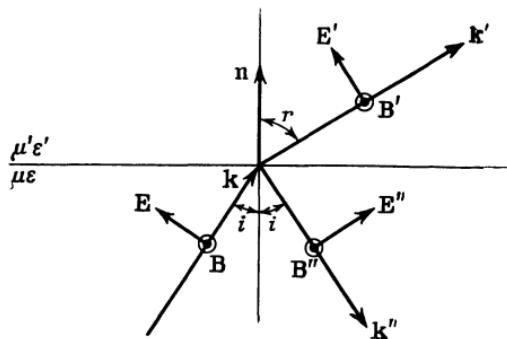
Здесь выражения справа справедливы в предположении $\mu' = \mu$, которое обычно выполняется для оптических частот.

Если электрическое поле параллельно плоскости падения, как показано на фиг. 7.10, то граничные условия содержат нормальную составляющую \mathbf{D} и тангенциальные составляющие \mathbf{E} и \mathbf{H} [первое, третье и четвертое условия (7.56)]. Из условия непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} получаем

$$\cos i (E_0 - E''_0) - \cos r E'_0 = 0, \quad (7.59)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (E_0 + E''_0) - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} E'_0 = 0.$$

Условие непрерывности нормальной составляющей \mathbf{D} в совокупности с законом Снеллиуса приводит к условию, повторяющему второе из этих соотношений. Из (7.59) вытекают следующие выражения



Фиг. 7.10. Отражение и преломление при поляризации, параллельной плоскости падения.

для относительных амплитуд преломленной и отраженной волн для случая, когда поле \mathbf{E} параллельно плоскости падения:

$$\frac{E'_0}{E_0} = 2 \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu'\epsilon'} \frac{\sin 2i}{\sin 2r + (\mu/\mu') \sin 2i}} \rightarrow \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)}, \quad (7.60)$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{(\mu/\mu') \sin 2i - \sin 2r}{\sin 2r + (\mu/\mu') \sin 2i} \rightarrow \frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)}.$$

Как и выше, выражения, стоящие справа, справедливы при $\mu' = \mu$.

Для нормального падения ($i = 0$) обе системы (7.58) и (7.60) сводятся к выражениям

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2}{\sqrt{\mu\epsilon'/\mu'\epsilon} + 1} \rightarrow \frac{2n}{n' + n}, \quad (7.61)$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon'/\mu'\epsilon} - 1}{\sqrt{\mu\epsilon'/\mu'\epsilon} + 1} \rightarrow \frac{n' - n}{n' + n}.$$

Знак отраженной волны выбран в соответствии с фиг. 7.10 для поляризации, параллельной плоскости падения. При $n' > n$ фаза отраженной волны обратна фазе падающей.

§ 6. Поляризация при отражении и полное внутреннее отражение

Заслуживают внимания следующие два вывода из динамических соотношений для отражения и преломления. Во-первых, при поляризации, параллельной плоскости падения, существует угол падения, называемый углом Брюстера, при котором нет отраженной

волны¹⁾. Полагая для простоты $\mu' = \mu$, мы видим из (7.60), что отраженной волны не будет, когда $i + r = \pi/2$. Из закона Снеллиуса (7.55) находим следующее выражение для угла Брюстера:

$$i_B = \arctg \frac{n'}{n} . \quad (7.62)$$

Для типичного отношения $n'/n = 1,5$ получаем $i_B \approx 56^\circ$. Если плоская волна смешанной поляризации падает на плоскую поверхность раздела под углом Брюстера, то отраженная волна будет *полностью поляризованной* в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Это свойство может быть использовано для получения пучков плоскополяризованного света, хотя такой метод и менее эффективен, чем методы, основанные на использовании анизотропных свойств некоторых диэлектриков.

Даже если неполяризованная волна падает и не под углом Брюстера, отраженная волна все равно будет иметь преимущественную поляризацию перпендикулярно плоскости падения. На этом основано применение темных стекол, преимущественно пропускающих волны лишь с одним направлением поляризации. В радиочастотном диапазоне приемные антенны благодаря поляризационным свойствам отраженных волн могут быть ориентированы таким образом, чтобы ослабить прием отраженных от поверхности волн (или волн, отраженных от ионосферы) и создать благоприятные условия для приема прямых волн.

Второе явление называется *полным внутренним отражением*. Слово «внутреннее» подчеркивает, что падающая и отраженная волны находятся в среде с большим показателем преломления, чем преломленная волна ($n > n'$)²⁾. Из закона Снеллиуса (7.55) следует, что $r > i$ при $n > n'$. Следовательно, $r = \pi/2$, когда $i = i_0$, где

$$i_0 = \arcsin \frac{n'}{n} . \quad (7.63)$$

Для волны, падающей под углом $i = i_0$, преломленная волна распространяется параллельно поверхности. При этом поток энергии через поверхность равен нулю и, следовательно, такому углу падения должно соответствовать полное отражение. Что же произойдет при $i > i_0$? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что $\sin r > 1$ при $i > i_0$. Это означает, что r является комплексным

¹⁾ В общем случае $\mu \neq \mu'$ угол Брюстера может соответствовать и перпендикулярной поляризации. Однако далее автор ограничивается случаем $\mu = \mu'$, когда отсутствие отраженной волны возможно только для параллельной поляризации.— Прим. ред.

²⁾ Не очень удачный термин «полное внутреннее отражение» в последнее время часто заменяют более простым термином «полное отражение».— Прим. ред.

углом с мнимым косинусом

$$\cos r = i \sqrt{\left(\frac{\sin i}{\sin i_0}\right)^2 - 1}. \quad (7.64)$$

Смысл появляющихся комплексных величин станет ясным, если мы рассмотрим фазу преломленной волны

$$\begin{aligned} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}) &= \exp[ik'(x \sin r + z \cos r)] = \\ &= \exp\left\{-k'\left[\left(\frac{\sin i}{\sin i_0}\right)^2 - 1\right]^{1/2} z\right\} \exp\left(ik' \frac{\sin i}{\sin i_0} x\right). \end{aligned} \quad (7.65)$$

Это выражение показывает, что при $i > i_0$ преломленная волна распространяется только параллельно поверхности; в направлении, перпендикулярном поверхности, она экспоненциально затухает. За исключением случая $i \approx i_0$, волна существенно затухает уже на расстоянии нескольких длин волн от границы раздела.

Хотя на другой стороне от границы раздела поля и существуют, однако ясно, что поток энергии сквозь поверхность равен нулю. Таким образом, для углов $i \geq i_0$ имеет место полное внутреннее отражение. В отсутствии потока энергии можно убедиться, вычисляя среднюю по времени нормальную составляющую вектора Пойнтинга на внутренней стороне поверхности

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}'^*)]. \quad (7.66)$$

Подставляя сюда $\mathbf{H}' = (c/\mu' \omega)(\mathbf{k}' \times \mathbf{E}')$, находим

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{c^2}{8\pi\omega} \operatorname{Re} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}') |\mathbf{E}'_0|^2]. \quad (7.67)$$

Но $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}' = k' \cos r$ — чисто мнимая величина, так что $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Явление полного внутреннего отражения находит широкое применение в тех случаях, когда необходимо осуществить передачу световых потоков без потерь интенсивности. В ядерной физике «световоды» из люсита или других пластиков используются для передачи света, испускаемого сцинтилирующим кристаллом при пролете ионизирующей частицы, в фотоумножитель, где этот свет преобразуется в полезный электрический сигнал. Фотоумножитель часто приходится располагать далеко от сцинтилирующего кристалла из-за нехватки места или из-за магнитных полей, искажающих его показания. Если поперечный размер световода велик по сравнению с длиной волны, то приближенно справедливо приведенное выше рассмотрение для плоской границы. Если же поперечные размеры диэлектрика имеют величину порядка длины волны, то необходимо специальное рассмотрение с учетом конкретной геометрии световода. С такой задачей мы встретимся при рассмотрении диэлектрических волноводов (см. гл. 8, § 8).

§ 7. Волны в проводящей среде

Распространение волн в проводящей среде существенно отличается от распространения в непроводящей среде. Если наряду с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ среда характеризуется также проводимостью σ , то к уравнениям Максвелла следует добавить закон Ома

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (7.68)$$

С учетом (7.68) мы можем представить уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mu \mathbf{H} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} = 0. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Выше было показано, что в непроводящем диэлектрике *переменные* во времени поля являются *поперечными*, т. е. векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны направлению пространственного изменения поля. В предельном случае нулевой частоты, как мы знаем из электростатики и магнитостатики, *статические* поля в диэлектрике *продольны* в том смысле, что они получаются из скалярных потенциалов и поэтому параллельны направлению пространственного изменения последних.

При отличной от нуля проводимости картина несколько изменяется. Рассмотрим для простоты поля, зависящие только от одной пространственной координаты ξ . Разложим \mathbf{E} и \mathbf{H} на продольную и поперечную составляющие

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi, t) &= \mathbf{E}_{||}(\xi, t) + \mathbf{E}_{\perp}(\xi, t), \\ \mathbf{H}(\xi, t) &= \mathbf{H}_{||}(\xi, t) + \mathbf{H}_{\perp}(\xi, t). \end{aligned} \quad (7.70)$$

Из свойства оператора ротора следует, что поперечные составляющие \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют двум роторным уравнениям системы (7.69), приводящим к поперечным волнам (см. ниже), в то время как продольные составляющие удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{||}}{\partial \xi} &= 0, \quad \frac{\partial H_{||}}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial E_{||}}{\partial \xi} &= 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \right) E_{||} = 0. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Из первой пары уравнений следует, что единственным возможным продольным магнитным полем является статическое однородное поле. В этом отношении проводящая среда ведет себя как и непроводящая. Однако вторая пара уравнений в (7.71) показывает,

что продольное электрическое поле однородно в пространстве, но изменяется во времени

$$E_{||}(\xi, t) = E_0 e^{-4\pi\sigma t/\epsilon}. \quad (7.72)$$

Следовательно, в отсутствие внешних токов статическое продольное поле не может существовать в проводящей среде. Для хороших проводников, таких, как медь, σ имеет величину порядка 10^{17} сек⁻¹, так что возмущения затухают за весьма короткое время.

Рассмотрим теперь поперечные поля в проводящей среде. В предположении, что поля изменяются как $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$, из первого роторного уравнения (7.69) получаем соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}), \quad (7.73)$$

а из второго — соотношение

$$i(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) + i\epsilon \frac{\omega}{c} \mathbf{E} - \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} = 0. \quad (7.74)$$

Исключая \mathbf{H} или \mathbf{E} из двух последних уравнений, находим

$$\left[k^2 - \left(\mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} + 4\pi i \frac{\mu\omega\sigma}{c^2} \right) \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0. \quad (7.75)$$

Отсюда следует, что волновой вектор k является комплексным

$$k^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right). \quad (7.76)$$

Первый член соответствует току смещения, а второй — току проводимости. Ветвь квадратного корня в выражении для k выбирается таким образом, чтобы при $\sigma = 0$ получались известные результаты. Предполагая, что проводимость σ — действительное число, получаем

$$k = \alpha + i\beta,$$

где

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \left[\frac{\sqrt{1 + (4\pi\sigma/\omega\epsilon)^2} \pm 1}{2} \right]^{1/2}. \quad (7.77)$$

Для плохого проводника ($4\pi\sigma/\omega\epsilon \ll 1$) справедливо приближенное соотношение

$$k = \alpha + i\beta \approx \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} + i \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sigma \quad (7.78)$$

с точностью до членов первого порядка по $\sigma/\omega\epsilon$. В этом приближении $\operatorname{Re} k \gg \operatorname{Im} k$, и затухание волны ($\operatorname{Im} k$) не зависит от частоты, если не учитывать возможной зависимости проводимости от частоты. Наоборот, для хорошего проводника ($4\pi\sigma/\omega\epsilon \gg 1$) α и β при-

ближенно равны друг другу и

$$k \approx (1+i) \frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu}}{c}; \quad (7.79)$$

здесь сохранен только член наинизшего порядка малости по $\omega\epsilon/\sigma$.

Волны, описываемые выражением $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t)$, являются затухающими поперечными волнами. Их поля могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-\beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} e^{i\alpha n \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{-\beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} e^{i\alpha n \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \end{aligned} \quad (7.80)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{k} . Из уравнения $\operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 0$ следует, что $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$, а соотношение (7.73), связывающее \mathbf{H} и \mathbf{E} , дает

$$\mathbf{H}_0 = \frac{c}{\mu\omega} (\alpha + i\beta) \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0. \quad (7.81)$$

Отсюда видно, что в проводнике фазы \mathbf{H} и \mathbf{E} не совпадают. Определяя амплитуду и фазу k соотношениями

$$\begin{aligned} |k| &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4}, \\ \varphi &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}, \end{aligned} \quad (7.82)$$

мы можем записать (7.81) в виде

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} e^{i\varphi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0. \quad (7.83)$$

Выражение (7.83) показывает, что \mathbf{H} отстает во времени от \mathbf{E} на фазовый угол φ , а отношение амплитуд \mathbf{H} и \mathbf{E} равно

$$\frac{|\mathbf{H}_0|}{|\mathbf{E}_0|} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4}. \quad (7.84)$$

В хороших проводниках магнитное поле велико по сравнению с электрическим полем и отстает от него по фазе почти на 45° . При этом энергия почти полностью сосредоточена в магнитном поле.

Как показывают соотношения (7.80), волны экспоненциально затухают с расстоянием. Это означает, что амплитуда электромагнитной волны внутри проводника уменьшается в $e = 2,718$ раза на расстоянии

$$\delta = \frac{1}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu}}. \quad (7.85)$$

(Последнее выражение справедливо для хороших проводников.) Длина δ называется *толщиной скин-слоя*, или *глубиной проникно-*

вения¹⁾. Для меди, например, $\delta \approx 0,85 \text{ см}$ при частоте 60 Гц и $\delta \approx 0,71 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ при 10^8 Гц . Столь быстрое ослабление волн означает, что токи в высокочастотных контурах текут только по поверхности проводников. Отсюда, в частности, следует, что индуктивность элементов контура на высокой частоте несколько меньше, чем на низкой, из-за вытеснения магнитного потока из толщи проводников.

Задача об отражении и преломлении на границе между проводящими средами весьма сложна и здесь не рассматривается. Интересующегося читателя мы отсылаем к книге Стрэттона [106]. В гл. 8, § 1, будут рассмотрены поля на границе между диэлектриком и хорошим проводником.

§ 8. Простая модель проводимости

Простейшая модель проводимости была предложена Друде в 1900 г. Согласно этой модели, в каждой единице объема имеется некоторое количество n_0 электронов, которые свободно движутся под действием приложенного электрического поля. Кроме того, на них действует тормозящая сила, обусловленная столкновениями. Таким образом, уравнение движения для этих электронов будет иметь вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + mg\mathbf{v} = e\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \quad (7.86)$$

где g — постоянная затухания²⁾. Для быстропеременных полей смещение электрона мало по сравнению с длиной волны, так что приближенно

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + mg\mathbf{v} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (7.87)$$

где \mathbf{E}_0 — электрическое поле в среднем положении электрона. Установившееся решение для скорости электрона имеет вид

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m(g - i\omega)} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (7.88)$$

Отсюда следует, что проводимость дается выражением

$$\sigma = \frac{n_0 e^2}{m(g - i\omega)}. \quad (7.89)$$

¹⁾ В системе МКС толщина скин-слоя (7.85) равна $\delta = (2/\sigma\omega\mu)^{1/2}$.

²⁾ Константа затухания g характеризует среднее число столкновений, приводящих к существенному изменению импульса. Электрон испытывает столкновения с колебаниями решетки, дефектами решетки и с примесями. Для последовательного расчета g требуется квантовомеханическое рассмотрение с учетом принципа Паули (см. [118]).

Предполагая, что на атом приходится один свободный электрон, мы получаем для таких металлов, как медь (где плотность электронов $n_0 \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, а $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ сек}^{-1}$), эмпирическое значение константы затухания $g \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ сек}^{-1}$. Следовательно, для частот порядка микроволновых ($\sim 10^{10} \text{ сек}^{-1}$) или меньших проводимость металлов фактически является действительной величиной (т. е. ток находится в фазе с полем) и не зависит от частоты. Однако для более высоких частот (инфракрасные и выше) проводимость комплексна и существенно зависит от частоты; качественно эта зависимость описывается простой формулой (7.89).

§ 9. Поперечные волны в разреженной плазме

В некоторых случаях, как, например, в ионосфере или в разреженной плазме, торможение свободных электронов из-за столкновений пренебрежимо мало. Поэтому «проводимость» становится чисто мнимой

$$\sigma_{\text{пл}} \approx i \frac{n_0 e^2}{m\omega}. \quad (7.90)$$

Термин «проводимость» взят здесь в кавычки, так как в том случае, когда ток и электрическое поле находятся не в фазе, потери энергии на сопротивлении не происходит. Распространение поперечных электромагнитных волн в разреженной плазме описывается соотношением (7.76) с заменой σ на величину $\sigma_{\text{пл}}$, определяемую соотношением (7.90)¹⁾, т. е.

$$k^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad (7.91)$$

где величина

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m} \quad (7.92)$$

называется *плазменной частотой*. Так как волновое число может быть записано в виде $k = n\omega/c$, где n — показатель преломления, мы заключаем, что показатель преломления плазмы определяется выражением

$$n^2 \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (7.93)$$

Для волн высокой частоты ($\omega > \omega_p$) показатель преломления — действительное число, и волны свободно распространяются. Для частот, меньших плазменной частоты ω_p , показатель преломления является чисто мнимым. Следовательно, такие электромагнитные

¹⁾ Иногда соотношение (7.91) разрешают относительно ω^2 , т. е. записывают в виде $\omega^2 \approx \omega_p^2 + c^2 k^2$; в этом случае оно называется дисперсионным уравнением для $\omega = \omega(k)$.

волны отражаются от поверхности плазмы, а внутри плазмы поле экспоненциально спадает с расстоянием от поверхности. Глубина проникновения $\delta_{\text{пл}}$ дается формулой

$$\delta_{\text{пл}} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} \approx \frac{c}{\omega_p} \quad (7.94)$$

(последнее равенство справедливо при $\omega \ll \omega_p$). В лабораторных условиях плотность электронов (плотность плазмы) обычно имеет величину порядка $n_0 \approx 10^{12} - 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Это значит, что $\omega_p \approx 6 \cdot 10^{10} - 6 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$, так что типичная глубина проникновения для статических и низкочастотных полей лежит в пределах $5 \cdot 10^{-1} - 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$. Вытеснение полей из плазмы — хорошо известный эффект в проблеме управляемых термоядерных реакций; имеются попытки его использования для удержания горячей плазмы (см. гл. 10, § 5 и 6).

Простое выражение (7.93) для показателя преломления плазмы становится неприменимым при наличии внешнего статического магнитного поля. Это обстоятельство проявляется не только в лабораторных условиях, но также и в ионосфере, где имеется внешнее магнитное поле Земли. Для иллюстрации влияния внешнего поля рассмотрим простую задачу о распространении поперечных волн вдоль сильного статического однородного магнитного поля \mathbf{B}_0 в разреженной однородной электронной плазме. Если мы пренебрежем столкновениями и будем считать, что смещение электронов мало, то уравнение движения запишется приближенно в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx e\mathbf{E}e^{-i\omega t} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0. \quad (7.95)$$

Мы пренебрегли здесь магнитным полем \mathbf{B} волны по сравнению со статическим полем \mathbf{B}_0 . Удобно рассматривать поперечные волны с круговой поляризацией. В этом случае

$$\mathbf{E} = E(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2), \quad (7.96)$$

а магнитное поле \mathbf{B}_0 направлено вдоль \mathbf{e}_3 . Так как мы ищем установившееся решение, то примем для скорости электрона выражение

$$\mathbf{v}(t) = v(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)e^{-i\omega t}. \quad (7.97)$$

Из (7.95) с учетом (7.96) сразу получаем

$$v = \frac{ie}{m(\omega \pm \omega_B)} E, \quad (7.98)$$

где ω_B — частота вращения заряженной частицы в магнитном поле (ларморовская частота)

$$\omega_B = \frac{eB_0}{mc}. \quad (7.99)$$

Результат (7.98) становится понятным, если учесть, что во вращающейся с частотой ω_B координатной системе электрон ускоряется вращающимся электрическим полем с эффективной частотой $\omega \pm \omega_B$ в зависимости от знака круговой поляризации.

Плотность тока в плазме, обусловленная движением электронов, равна

$$\mathbf{J} = en_0\mathbf{v} = \frac{in_0e^2}{m(\omega \pm \omega_B)} \mathbf{E}. \quad (7.100)$$

Добавляя этот ток к току смещения, получаем соответствующее уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)} \right] \mathbf{E}. \quad (7.101)$$

Множитель в квадратных скобках можно интерпретировать как диэлектрическую проницаемость, или квадрат показателя преломления

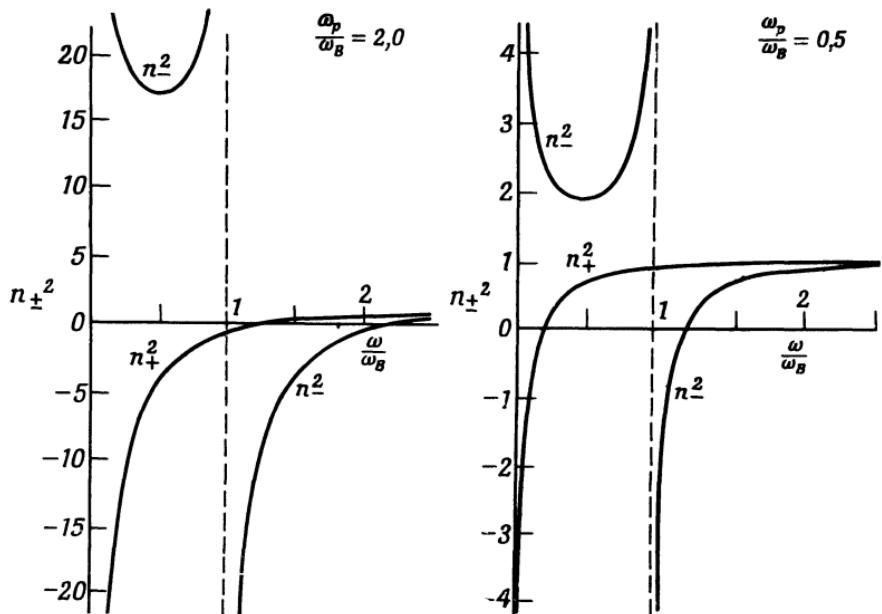
$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)}. \quad (7.102)$$

Эта формула представляет собой обобщение выражения (7.93) на случай отличного от нуля статического магнитного поля. Она не является общей, так как получена в предположении, что волны распространяются вдоль направления постоянного магнитного поля. Но даже на этом простом примере мы обнаруживаем ту существенную особенность, что волны с правой и левой круговой поляризацией распространяются различно и, следовательно, ионосфера является двоякопреломляющей. Если волна распространяется в направлении, не совпадающем с направлением постоянного поля \mathbf{B}_0 , то легко показать, что в тех случаях, когда можно пренебречь членами порядка ω_B^2 по сравнению с ω^2 и $\omega\omega_B$, показатель преломления определяется той же формулой (7.102). Однако при определении лармировской частоты по (7.99) мы должны теперь вместо B_0 представлять составляющую поля, параллельную направлению распространения. При этом ω_B в (7.102) зависит от угла, т. е. такая среда является не только двоякопреломляющей, но и анизотропной.

Для ионосферы максимальная плотность свободных электронов обычно равна $n_0 \approx 10^4 - 10^6 \text{ см}^{-3}$, что соответствует плазменной частоте $\omega_p \approx 6 \cdot 10^6 - 6 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$. Если мы примем напряженность земного магнитного поля равной 0,3 гаусс, то лармировская частота будет $\omega_B \approx 6 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$.

На фиг. 7.11 показана зависимость n_{\pm}^2 от частоты при двух величинах отношения ω_p/ω_B . В обоих случаях имеются широкие интервалы частот, где одна из величин n_{+}^2 и n_{-}^2 положительна, в то время как вторая отрицательна. В таком интервале частот волна с одной из круговых поляризаций не может распространяться

в плазме. Поэтому волна соответствующей поляризации будет полностью отражаться от плазмы. Волны с другой поляризацией будут частично проникать в плазму. Таким образом, если на плазму падает линейно поляризованный волны, то отраженная волна будет поляризована по эллипсу, большая ось которого, вообще говоря, повернута относительно направления поляризации падающей волны.

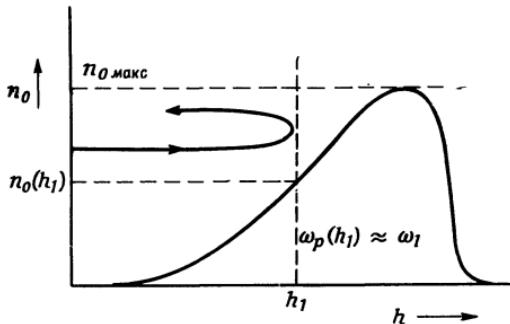


Фиг. 7.11. Зависимость показателя преломления от частоты для модели ионосферы (разреженная электронная плазма в постоянном однородном магнитном поле).

Направление распространения параллельно магнитному полю, n_+ и n_- обозначают соответственно показатель преломления для волн с правой и левой круговой поляризацией, ω_B — ларморовская частота; ω_p — плазменная частота.

С точки зрения рассмотренной здесь теории можно объяснить поведение радиоволн, отраженных от ионосферы, однако наличие нескольких слоев плазмы, плотность и относительное расположение которых меняются с высотой и во времени, делает проблему значительно более сложной, чем в нашем простейшем случае. Электронную плотность на различных высотах можно определить путем изучения отражения импульсов излучения, направленных вертикально вверх. Плотность свободных электронов в ионосфере медленно возрастает с высотой внутри данного слоя, как показано на фиг. 7.12, достигает максимума и затем резко падает при дальнейшем увеличении высоты. Импульс заданной частоты ω_1 входит

внутрь слоя без отражения благодаря медленному изменению n_0 . Когда же плотность n_0 становится достаточно большой, так что $\omega_p(h_1) \approx \omega_1$, то показатель преломления (7.102) обращается в нуль и импульс отражается. Плотность n_0 , при которой происходит отражение, определяется из условия обращения в нуль правой части выражения (7.102). Измеряя промежуток времени между



Фиг. 7.12. Зависимость электронной плотности от высоты в ионосферном слое (схематически).

излучением импульса и возвращением отраженного сигнала, мы можем найти высоту h_1 , соответствующую этой плотности. Меняя частоту ω_1 и измеряя соответствующие временные интервалы, можно найти зависимость электронной плотности от высоты. При достаточно большой частоте ω_1 показатель преломления в нуль не обращается и отражение становится очень малым. Частота, при которой исчезает отражение, и определяет максимум электронной плотности в данном слое.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Оптика как раздел электродинамики хорошо изложена в книге Борна и Вольфа [16], где в первой главе рассмотрены плоские волны, поляризация, отражение и преломление волн и пр. Весьма полное рассмотрение падения плоских волн на границу раздела диэлектриков и проводников дано в книге Стрэттона [106], гл. 9.

Хорошее изложение теории электромагнитных волн в изотропных и анизотропных средах дано также у Ландау и Лифшица [64], гл. 10 и 11. Более элементарное, но ясное и детальное изложение теории плоских волн и их свойств имеется в книге Адлера, Чу и Фано [2], гл. 7 и 8.

Распространение волн в диспергирующих средах подробно рассмотрено Бриллюэном [22]. Искажение и затухание импульсов в диссипативных средах детально изложено в книге Стрэттона [106].

Дополнение редактора. Распространение плоских электромагнитных волн рассмотрено также в книге Вайнштейна [122] и в монографии Альпера, Гинзбурга и Фейнберга [120] по распространению радиоволн. В последней работе, в частности, детально рассмотрено распространение в разреженной плазме (в ионосфере).

ЗАДАЧИ

7.1. Почти монохроматический плоский одномерный волновой пакет имеет начальную форму $u(x, 0) = f(x) \exp(ik_0x)$, где $f(x)$ — огибающая. Для приведенных ниже функций $f(x)$ найти спектр волновых чисел пакета $|A(k)|^2$, построить схематически $|u(x, 0)|^2$ и $|A(k)|^2$, определить в явном виде среднеквадратичные значения Δx и Δk [выразить их через интенсивности $|u(x, 0)|^2$ и $|A(k)|^2$] и проверить неравенство (7.28):

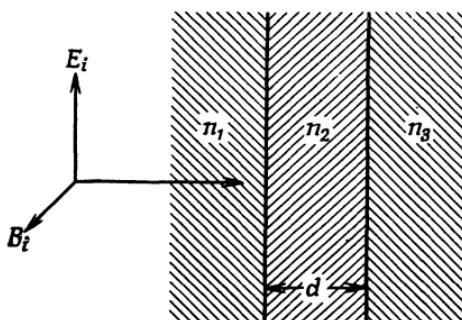
а) $f(x) = Ne^{-\alpha|x|/2}$,

б) $f(x) = Ne^{-\alpha^2 x^2/4}$,

в) $f(x) = \begin{cases} N(1 - \alpha|x|) & \text{для } \alpha|x| < 1, \\ 0 & \text{для } \alpha|x| > 1, \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} N & \text{для } |x| < a, \\ 0 & \text{для } |x| > a. \end{cases}$

7.2. Плоская волна падает нормально на плоский слой, изображенный на фиг. 7.13. Все три среды немагнитны, их показатели преломления равны соответственно n_1 , n_2 , n_3 . Толщина среднего слоя d .



Ф и г. 7.13.

а) Рассчитать коэффициенты прохождения и отражения (отношения проходящего и отраженного потоков энергии к падающему потоку энергии) и построить их зависимость от частоты для $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$; $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$; $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 1$.

б) Пусть среда n_1 является частью оптической системы (например, линзой); среда n_3 — воздух ($n_3 = 1$). Необходимо сделать такое оптическое покрытие (среда n_2), чтобы не было отраженных волн с частотой ω_0 . Какая при этом требуется толщина d и показатель преломления n_2 ?

7.3. Два плоских полубесконечных слоя из однородного изотропного немагнитного непоглощающего диэлектрика с показателем преломления n параллельны друг другу и разделены воздушным зазором ($n = 1$), имеющим ширину d . Плоская электромагнитная волна с частотой ω падает на зазор из одного слоя под углом падения i . Для линейно поляризованных волн с поляризацией как параллельной, так и перпендикулярной плоскости падения

а) рассчитать отношение мощности, проходящей во второй слой, к падающей мощности и отношение отраженной мощности к падающей,

б) для угла i , превышающего критический угол полного внутреннего отражения, построить зависимость отношения проходящей мощности к падающей от отношения ширины зазора d к длине волны в воздухе.

7.4. Плоскополяризованная электромагнитная волна с частотой ω падает из свободного пространства нормально на плоскую поверхность немагнитной среды, имеющей проводимость σ и диэлектрическую проницаемость ϵ .

а) Рассчитать амплитуду и фазу отраженной волны для произвольных σ и ϵ .

б) Рассмотреть предельные случаи очень плохой и очень хорошей проводимости и показать, что для хорошего проводника коэффициент отражения (отношение отраженной мощности к падающей) приближенно равен

$$R \approx 1 - 2 \frac{\omega}{c} \delta,$$

где δ — толщина скин-слоя.

7.5. Плоскополяризованная электромагнитная волна $\mathbf{E} = E_i \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$ нормально падает на плоский однородный слой *хорошего* проводника ($\sigma \gg \omega$), имеющий толщину t . Предполагая, что как во внешнем пространстве, так и в проводнике $\mu = \epsilon = 1$, рассмотреть отражение и прохождение падающей волны.

а) Показать, что амплитуды отраженной и проходящей волн с точностью до членов первого порядка по $(\omega/\sigma)^{1/2}$ описываются выражениями

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{(1 - \beta)(1 - e^{-2\lambda})}{(1 - e^{-2\lambda}) + \beta(1 + 3e^{-2\lambda})},$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{4\beta e^{-\lambda}}{(1 - e^{-2\lambda}) + \beta(1 + 3e^{-2\lambda})},$$

где $\beta = \sqrt{\omega/8\pi\sigma}(1 - i) = (\omega\delta/2c)(1 - i)$, $\lambda = (1 - i)t/\delta$, и $\delta = c/\sqrt{2\pi\omega\sigma}$ — толщина скин-слоя.

б) Убедиться, что для нулевой и бесконечной толщин слоя получаются правильные предельные результаты.

в) Показать, что, за исключением случая очень малых толщин, коэффициент прохождения равен

$$T = \frac{32(\operatorname{Re}\beta)^2 e^{-2t/\delta}}{1 - 2e^{-2t/\delta} \cos(2t/\delta) + e^{-4t/\delta}}.$$

Построить зависимость $\ln T$ от t/δ для $\operatorname{Re}\beta = 10^{-2}$. Уточнить понятие «очень малой толщины».

7.6. Плоские волны распространяются в однородном немагнитном *анизотропном* диэлектрике. В общем случае диэлектрик характеризуется тензором ϵ_{ij} , но если выбрать оси координат вдоль главных осей тензора, то составляющие вектора смещения связаны с соответствующими составляющими электрического поля соотношениями $D_i = \epsilon_{ii}E_i$ ($i = 1, 2, 3$), где ϵ_i — собственные значения матрицы ϵ_{ij} .

а) Показать, что для плоских волн с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} должно выполняться уравнение

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0.$$

б) Показать, что при заданном волновом векторе $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ могут распространяться две различные волны с разными фазовыми скоростями, удовлетворяющими уравнению Френеля:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{v^2 - v_i^2} = 0,$$

где $v_i = c/\sqrt{\epsilon_i}$ — так называемые главные скорости, а n_i — проекции единичного вектора \mathbf{n} по главным осям тензора.

в) Показать, что если \mathbf{D}_a и \mathbf{D}_b — векторы смещения для двух вышеупомянутых волн, то $\mathbf{D}_a \cdot \mathbf{D}_b = 0$.

7.7. Однородный изотропный немагнитный диэлектрик характеризуется показателем преломления $n(\omega)$, который предполагается, вообще говоря, комплексным (для описания процессов поглощения).

а) Показать, что общее решение для плоской одномерной волны может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} [A(\omega) e^{i(\omega/c)n(\omega)x} + B(\omega) e^{-i(\omega/c)n(\omega)x}],$$

где $u(x, t)$ — любая составляющая \mathbf{E} или \mathbf{B} .

б) Показать, что если функция $u(x, t)$ действительна, то $n(-\omega) = n^*(\omega)$.

в) Показать, что если $u(0, t)$ и $\partial u(0, t)/\partial x$ — граничные значения функции u и ее производной при $x = 0$, то коэффициенты $A(\omega)$ и $B(\omega)$ имеют вид

$$\begin{Bmatrix} A(\omega) \\ B(\omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left[u(0, t) \mp \frac{ic}{\omega n(\omega)} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \right].$$

7.8. Очень длинный импульс, представляющий собой плоскую волну частотой ω_0 с крутым передним фронтом, нормально падает в момент $t = 0$ на полубесконечный диэлектрик с показателем преломления $n(\omega)$, занимающий полупространство $x > 0$. На входе в диэлектрик ($x = +0$) граничные значения тангенциальной составляющей электрического поля и ее нормальной производной равны

$$u(0, t) = \theta(t) e^{-\varepsilon t} \cos \omega_0 t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \theta(t) \frac{\omega_0 n(\omega_0)}{c} e^{-\varepsilon t} \sin \omega_0 t,$$

где $\theta(t)$ — ступенчатая функция: $[\theta(t) = 0$ при $t < 0$, $\theta(t) = 1$ при $t > 0]$. Показатель спадания ε — положительная бесконечно малая постоянная величина.

а) Используя решение, полученное в задаче 7.7, представить поле $u(x, t)$ в диэлектрике в виде интеграла по частотам с явными выражениями для коэффициентов $A(\omega)$ и $B(\omega)$.

б) Доказать, что достаточным условием выполнения принципа причинности (согласно которому никакой сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света) в этой задаче является требование, что показатель преломления должен быть аналитической функцией комплексного переменного ω , не имеющей нулей и полюсов в верхней полуплоскости, и стремится к единице при $|\omega| \rightarrow \infty$.

в) Обобщить результаты п. «б» на случай произвольного направления падения волнового импульса.

7.9. а) Убедиться, что если показатель преломления $n(\omega)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексного переменного ω и стремится к единице при больших $|\omega|$, то его действительная и мнимая части при вещественных частотах ω связаны *дисперсионным соотношением*

$$\operatorname{Re} n(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \operatorname{Im} n(\omega') d\omega',$$

где P — главное значение интеграла. Написать второе дисперсионное соотношение, выражающее мнимую часть в виде интеграла от действительной части.

б) Исходя из дисперсионного соотношения, показать, что в интервале частот, где есть резонансное поглощение, обязательно имеет место аномальная дисперсия.

в) Элементарная классическая модель эффекта преломления основана на представлении о совокупности затухающих электронных осцилляторов и приводит к следующему выражению для показателя преломления:

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{2\pi Ne^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\nu_k\omega},$$

где ω_k — резонансная частота для k -го типа осцилляторов, ν_k — их константа затухания, а f_k — число таких осцилляторов на атом. Проверить, что такой показатель преломления удовлетворяет дисперсионному соотношению, приведенному в п. «а».