

Глава 9

ПРОСТЕЙШИЕ ИЗЛУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ И ДИФРАКЦИЯ

В двух предыдущих главах мы рассмотрели свойства электромагнитных волн и их распространение в ограниченном и неограниченном пространствах. Однако при этом ничего не было сказано о получении таких волн. В настоящей главе мы частично восполним этот пробел и рассмотрим излучение волн ограниченными системами колеблющихся зарядов и токов. Если рассматривать только достаточно простые излучающие системы, то можно ограничиться сравнительно простым математическим аппаратом. Более систематическое изложение теории излучения будет дано в гл. 16, где рассматриваются мультипольные поля.

Вторая половина главы посвящена вопросам дифракции. Так как скалярная теория Кирхгофа обычно излагается во многих книгах, мы сосредоточим основное внимание на векторных свойствах дифракционных электромагнитных полей.

§ 1. Поля, создаваемые ограниченными колеблющимися источниками

Систему зарядов и токов, изменяющихся во времени, всегда можно разложить на гармоники с помощью рядов или интегралов Фурье и рассматривать в отдельности каждую гармонику. Поэтому без ущерба для общности мы можем рассматривать потенциалы, поля и излучение ограниченной системы зарядов и токов, изменяющихся во времени по синусоидальному закону:

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= Q(x) e^{-i\omega t}, \\ J(x, t) &= J(x) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Как обычно, для нахождения истинных физических величин следует брать действительную часть этих выражений. Предпола-

гается, что электромагнитные потенциалы и поля имеют такую же временную зависимость.

В гл. 6 было показано, что в случае отсутствия ограничивающих поверхностей решение волнового уравнения для векторного потенциала при лоренцовской калибровке имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \int dt' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right). \quad (9.2)$$

Дельта-функция обеспечивает конечную скорость распространения полей. При синусоидальной зависимости от времени (9.1) решение для \mathbf{A} принимает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x', \quad (9.3)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, а множитель $e^{-i\omega t}$ подразумевается. Магнитное поле определяется соотношением

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (9.4)$$

а электрическое поле вне источников равно

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{B}. \quad (9.5)$$

При заданном распределении токов $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ поля, по крайней мере в принципе, могут быть найдены, если вычислен интеграл (9.3). В § 4 этой главы мы рассмотрим некоторые примеры прямого вычисления этого интеграла. Однако сначала мы установим некоторые простые, но общие свойства полей, предполагая, что токи сосредоточены в очень малой по сравнению с длиной волны области. Если размеры источника имеют величину порядка d , а длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ и $d \ll \lambda$, то представляют интерес три области

ближняя (статическая) зона: $d \ll r \ll \lambda$,

промежуточная (индукционная) зона: $d \ll r \sim \lambda$,

дальняя (волновая) зона: $d \ll \lambda \ll r$.

Мы увидим, что свойства полей в разных зонах весьма различны. В ближней зоне поля носят характер статических полей: имеются отличные от нуля радиальные составляющие, и изменение полей с расстоянием зависит от свойств источника. В дальней зоне, напротив, поля перпендикулярны радиусу-вектору и всегда спадают по закону $1/r$, характерному для полей излучения.

Если мы рассматриваем поля вдали от источника, т. е. случай $r \gg d$ (не делая никаких предположений об отношении r к λ), то в интеграле (9.3) можно положить

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}', \quad (9.6)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{x} . При этом векторный потенциал принимает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/r} d^3x'. \quad (9.7)$$

Предполагая что $r \gg d$ и $d \ll \lambda$, можно разложить экспоненту и знаменатель в ряд по $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/r} &= 1 + \left(\frac{1}{r} - ik \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2ik}{r} - k^2 \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')^2 + \dots \end{aligned} \quad (9.8)$$

Подставив это разложение в (9.7), получим m -й член ряда для \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_m = \frac{e^{ikr}}{cr} \frac{(-ik)^m}{m!} \left(1 + \frac{a_1}{ikr} + \dots + \frac{a_m}{(ikr)^m} \right) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')^m d^3x', \quad (9.9)$$

где коэффициенты полинома a_j — некоторые целые числа. Это выражение позволяет определить радиальную зависимость поля в общем случае. В ближней зоне, где $kr \ll 1$, преобладающим является последний член полинома, так что векторный потенциал стремится к пределу

$$\lim_{kr \rightarrow 0} \mathbf{A}_m \rightarrow \frac{(-1)^m a_m}{cm!} \frac{1}{r^{m+1}} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')^m d^3x', \quad (9.10)$$

не зависящему от волнового числа k . Таким образом, ближние поля являются квазистатическими: они гармонически изменяются во времени как $e^{-i\omega t}$, но во всех других отношениях имеют статический характер.

В дальней зоне, где $kr \gg 1$, доминирующим членом полинома в (9.9) будет первый член, и для векторного потенциала получаем

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \mathbf{A}_m \rightarrow \frac{e^{ikr}}{cr} \frac{(-ik)^m}{m!} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')^m d^3x'. \quad (9.11)$$

В этом приближении векторный потенциал дает расходящуюся сферическую волну. Легко показать, что в дальней зоне поля (9.4) и (9.5) перпендикулярны радиусу-вектору и спадают как r^{-1} . Таким образом, они представляют собой поля излучения. Амплитуда m -го члена разложения \mathbf{A} в волновой зоне равна

$$\frac{1}{m!} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}')^m d^3x'. \quad (9.12)$$

Так как \mathbf{x}' имеет величину порядка d , а произведение kd , по предположению, мало по сравнению с единицей, то очевидно, что последовательные члены в разложении \mathbf{A} быстро уменьшаются с номером m . Следовательно, излучение источника определяется в основ-

ном первым неисчезающим членом разложения (9.8). Перейдем теперь к более детальному анализу полей, соответствующих последовательным членам разложения.

§ 2. Электрическое дипольное поле и излучение

Если ограничиться первым членом разложения (9.8), то векторный потенциал (9.7) окажется равным

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\omega r}}{cr} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (9.13)$$

Этот интеграл можно представить в более привычной форме с помощью интегрирования по частям

$$\int \mathbf{J} d^3x' = - \int \mathbf{x}' \operatorname{div}' \mathbf{J} d^3x' = -i\omega \int \mathbf{x}' \varrho(\mathbf{x}') d^3x', \quad (9.14)$$

где использовано уравнение непрерывности

$$i\omega \varrho = \operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (9.15)$$

Таким образом, векторный потенциал равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -ik\mathbf{p} \frac{e^{i\omega r}}{r}, \quad (9.16)$$

где величина

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}' \varrho(\mathbf{x}') d^3x' \quad (9.17)$$

представляет собой электрический дипольный момент, введенный в электростатике соотношением (4.8).

Поля электрического диполя, согласно (9.4) и (9.5), записутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{i\omega r}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right), \\ \mathbf{E} &= k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{e^{i\omega r}}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{i\omega r}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Заметим, что магнитное поле перпендикулярно радиусу-вектору на любых расстояниях, а электрическое поле имеет составляющие, как параллельные, так и перпендикулярные \mathbf{n} .

В волновой зоне поля принимают асимптотическую форму

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{i\omega r}}{r}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{B} \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

характерную для полей излучения.

Наоборот, в ближней зоне они выражаются следующим образом:

$$\mathbf{B} = ik(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{1}{r^2},$$

$$\mathbf{E} = [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \frac{1}{r^3}. \quad (9.20)$$

Если отвлечься от колебаний во времени, то электрическое поле совпадает с электростатическим дипольным полем (4.13). В области $kr \ll 1$ магнитное поле в $(kr)^{-1}$ раз меньше электрического. Поэтому поле в ближней зоне имеет в основном электрический характер. В пределе $k \rightarrow 0$, соответствующем статическому полю, магнитное поле, естественно, исчезает, и ближняя зона распространяется до бесконечности.

Средняя по времени мощность, излучаемая в единицу телесного угла колеблющимся дипольным моментом \mathbf{p} , равна

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (\mathbf{r}^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*), \quad (9.21)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} даются выражениями (9.19). Отсюда

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p})|^2. \quad (9.22)$$

Направление поляризации определяется вектором $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p})$. Если все составляющие \mathbf{p} имеют одинаковую фазу, то получается характерное угловое распределение дипольного излучения

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta, \quad (9.23)$$

где угол θ отсчитывается от направления \mathbf{p} . Полная мощность излучения равна

$$P = \frac{ck^4}{3} |\mathbf{p}|^2. \quad (9.24)$$

Простым примером электрического дипольного излучателя является возбуждаемая в центре линейная антenna, длина которой d мала по сравнению с длиной волны. На фиг. 9.1 показана такая антenna, направленная вдоль оси z и расположенная между $z = -d/2$ и $z = d/2$. Напряжение подводится к небольшому зазору в центре антенны. Ток, имеющий одинаковое направление в обеих половинах антенны и величину I_0 в зазоре, спадает к краям антенны приблизительно линейно, достигая нуля на ее концах:

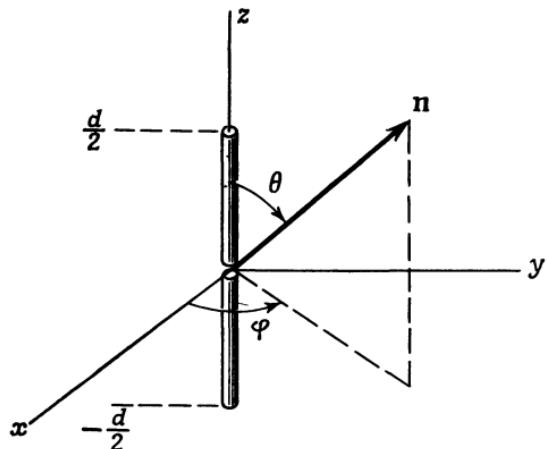
$$I(z) e^{-i\omega t} = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d} \right) e^{-i\omega t}. \quad (9.25)$$

Согласно уравнению непрерывности (9.15), линейная плотность заряда q' (заряд на единицу длины) постоянна на обеих половинах

антенны и равна

$$\varrho'(z) = \pm \frac{2iI_0}{\omega d}, \quad (9.26)$$

где верхний знак соответствует положительным значениям z ,



Фиг. 9.1. Короткая линейная антenna с возбуждением в центре.

а нижний — отрицательным. Дипольный момент (9.17) параллелен оси z и имеет величину

$$\mathbf{p} = \int_{-d/2}^{d/2} z \varrho'(z) dz = \frac{iI_0 d}{2\omega}. \quad (9.27)$$

Угловое распределение излучаемой мощности описывается выражением

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{32\pi c} (kd)^2 \sin^2 \theta, \quad (9.28)$$

а полная излучаемая мощность — выражением

$$P = \frac{I_0^2 (kd)^2}{12c}. \quad (9.29)$$

Мы видим, что, по крайней мере в длинноволновой области ($kd \ll 1$), мощность излучения растет при фиксированном токе пропорционально квадрату частоты.

§ 3. Магнитные дипольные и электрические квадрупольные поля

Следующий член в разложении (9.8) приводит к векторному потенциалу

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') d^3x'. \quad (9.30)$$

Это выражение можно представить в виде суммы двух членов, один из которых дает поперечное магнитное поле, а другой — поперечное электрическое поле. Эти физически различные компоненты можно разделить, записывая подынтегральное выражение в (9.30) в виде суммы симметричной и антисимметричной по \mathbf{J} и \mathbf{x}' частей:

$$\frac{1}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} = \frac{1}{2c} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}'] + \frac{1}{2c} (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{n}. \quad (9.31)$$

Вторая, антисимметричная часть, очевидно, связана с намагниченностью, обусловленной током:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c} (\mathbf{x} \times \mathbf{J}). \quad (9.32)$$

Первый, симметричный член, как будет показано ниже, связан с электрическим квадрупольным моментом.

Рассматривая только магнитный член, получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = ik(\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{i\hbar r}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right), \quad (9.33)$$

где \mathbf{m} — магнитный дипольный момент

$$\mathbf{m} = \int \mathcal{M} d^3x = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{x} \times \mathbf{J}) d^3x. \quad (9.34)$$

Переходя к вычислению полей, заметим, что векторный потенциал (9.33) с точностью до множителя равен магнитному полю (9.18) электрического диполя, если \mathbf{m} заменить на \mathbf{p} . Поэтому магнитное поле магнитного диполя будет равно электрическому полю электрического диполя с заменой $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$. Таким образом, получаем

$$\mathbf{B} = k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{n} \frac{e^{i\hbar r}}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{i\hbar r}. \quad (9.35)$$

Аналогично электрическое поле магнитного диполя равно взятыму с обратным знаком магнитному полю электрического диполя:

$$\mathbf{E} = -k^2(\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{i\hbar r}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right). \quad (9.36)$$

Все выводы, относящиеся к поведению полей в ближней и дальней зонах, остаются теми же, что и для электрического дипольного источника, если только заменить $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$. Аналогично распределение излучения и полная излучаемая мощность для обоих диполей одинаковы. Единственное различие полей излучения связано с их поляризацией. Для электрического диполя электрический вектор лежит в плоскости, образованной векторами \mathbf{n} и \mathbf{p} , в то время как для магнитного диполя он перпендикулярен плоскости, проходящей через \mathbf{n} и \mathbf{m} .

Интеграл от симметричного члена в (9.31) после интегрирования по частям и некоторых преобразований приводится к виду

$$\frac{1}{2c} \int [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}'] d^3x' = -\frac{ik}{2} \int \mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (9.37)$$

Здесь $\operatorname{div} \mathbf{J}$ заменена на $i\omega\varrho$ согласно уравнению непрерывности (9.15). Так как этот интеграл содержит второй момент плотности заряда, то, следовательно, он соответствует электрическому квадрупольному источнику. Векторный потенциал имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{k^2}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \int \mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (9.38)$$

Выражения для полей в общем случае довольно сложны, и мы не будем их выписывать, ограничившись лишь рассмотрением полей в волновой зоне. Тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= ik\mathbf{n} \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= ik(\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Таким образом, для магнитного поля получаем

$$\mathbf{B} = -\frac{ik^3}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \int (\mathbf{n} \times \mathbf{x}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (9.40)$$

Используя определение (4.9) тензора квадрупольного момента

$$Q_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \varrho(\mathbf{x}) d^3x, \quad (9.41)$$

можно записать интеграл в (9.40) в виде

$$\mathbf{n} \times \int \mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{3} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n}), \quad (9.42)$$

где вектор $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ определяется соотношением

$$Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta. \quad (9.43)$$

Заметим, что его величина и направление зависят как от направления наблюдения, так и от свойств источника. В этих обозначениях магнитное поле запишется в виде

$$\mathbf{B} = -\frac{ik^3}{6} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n}), \quad (9.44)$$

а средняя мощность, излучаемая в единичный телесный угол,— в виде

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{288\pi} k^6 |\mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n})|^2. \quad (9.45)$$

Угловое распределение имеет довольно сложный характер. Однако полная мощность излучения вычисляется непосредственно.

Учитывая определение $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$, представим угловую зависимость в виде

$$\begin{aligned} |\mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n})|^2 &= \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q} - |\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}|^2 = \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} Q_{\alpha\beta}^* Q_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma - \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} Q_{\alpha\beta}^* Q_{\gamma\delta} n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Вычисление угловых интегралов от произведений прямоугольных составляющих \mathbf{n} дает

$$\begin{aligned} \int n_\beta n_\gamma d\Omega &= \frac{4\pi}{3} \delta_{\beta\gamma}, \\ \int n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta d\Omega &= \frac{4\pi}{15} (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}), \end{aligned} \quad (9.47)$$

откуда

$$\begin{aligned} \int |\mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n})|^2 d\Omega &= 4\pi \left\{ \frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta} |Q_{\alpha\beta}|^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{15} \left[\sum_{\alpha} Q_{\alpha\alpha}^* \sum_{\gamma} Q_{\gamma\gamma} + 2 \sum_{\alpha, \beta} |Q_{\alpha\beta}|^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Так как сумма элементов тензора $Q_{\alpha\beta}$, стоящих на главной диагонали, равна нулю, первый член в квадратных скобках тождественно обращается в нуль. Отсюда получается окончательное выражение для полной мощности излучения квадрупольного источника

$$P = \frac{ck^6}{360} \sum_{\alpha, \beta} |Q_{\alpha\beta}|^2. \quad (9.49)$$

При заданном квадрупольном моменте излучаемая мощность пропорциональна шестой степени частоты в отличие от дипольного излучения, где она пропорциональна четвертой степени частоты.

Простым примером квадрупольного источника является осциллирующее сфероидальное распределение зарядов. В этом случае недиагональные элементы $Q_{\alpha\beta}$ равны нулю, а диагональные элементы можно представить как

$$Q_{33} = Q_0, \quad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_0. \quad (9.50)$$

При этом угловое распределение излучаемой мощности будет иметь вид

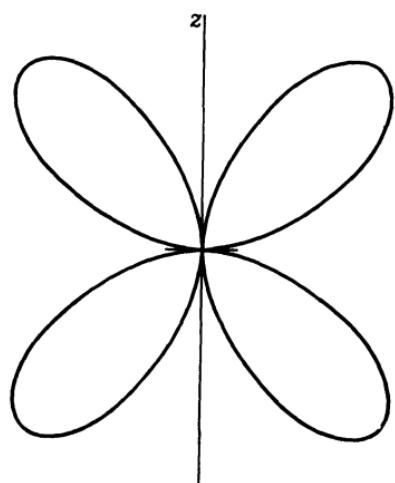
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^6}{128\pi} Q_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (9.51)$$

Соответствующая четырехлепестковая диаграмма излучения показана на фиг. 9.2. Ее максимумы расположены при $\theta = \pi/4$ и

$\theta = 3\pi/4$. Полная мощность излучения такого квадруполя равна

$$P = \frac{ck^6 Q_0^2}{240}. \quad (9.52)$$

Если мы продолжим наше рассмотрение разложения (9.8) и перейдем к высшим членам разложения векторного потенциала, то вычислительные трудности непомерно возрастут. Кроме того, такой подход обладает тем недостатком, что физически ясные члены, как,



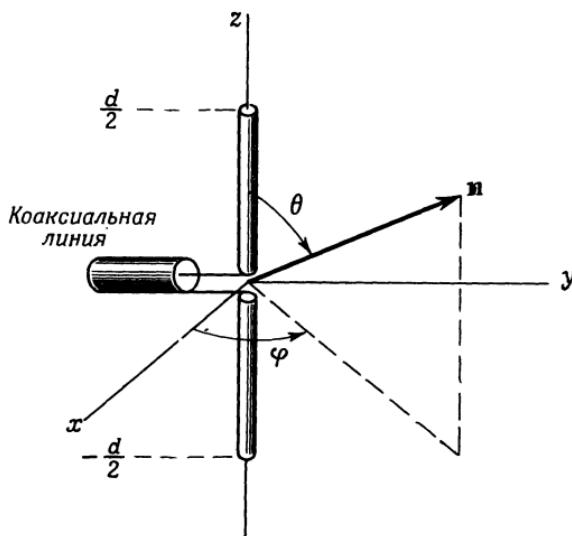
Фиг. 9.2. Угловое распределение излучения квадруполя.

например, поле магнитного диполя или электрического квадруполя, приходится искусственно выделять из отдельных слагаемых в (9.8). Наконец, развитый выше метод применим лишь для достаточно длинных волн. Систематический анализ мультипольного излучения будет дан в гл. 16. Для этого потребуется разработать специальный математический аппарат, что, однако, окупит себя впоследствии. Этот метод позволит единообразно рассмотреть все мультипольные члены, причем результаты применимы для любых длин волн, а физически различные электрические и магнитные мультиполи разделяются с самого начала.

§ 4. Линейная антенна с центральным возбуждением

Для ряда излучающих систем с достаточно простой геометрией распределение токов таково, что интеграл (9.3), определяющий векторный потенциал, может быть найден в сравнительно простой замкнутой форме. В качестве примера таких систем рассмотрим тонкую линейную антенну длиной d с коротким зазором в центре, на который подается возбуждающее напряжение. Пусть антenna

расположена вдоль оси z , а ее зазор находится в начале координат (фиг. 9.3). Если пренебречь затуханием, связанным с излучением, то ток вдоль антенны можно считать синусоидальным по времени и координате с волновым числом $k = \omega/c$ и симметричным в обоих



Ф и г. 9.3. Линейная антenna с возбуждением в центре.

плечах антенны. Поскольку ток должен обращаться в нуль на концах антенны, мы можем записать плотность тока в виде

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = I \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \delta(x) \delta(y) \mathbf{e}_3, \quad (9.53)$$

где $|z| < d/2$. Здесь δ -функции показывают, что ток течет только вдоль оси z , а I представляет собой максимальный ток в антенне, если $kd \geq \pi$. Ток в зазоре равен $I_0 = I \sin(kd/2)$.

При плотности тока, задаваемой соотношением (9.53), векторный потенциал направлен вдоль оси z и, согласно (9.7), в волновой зоне равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3 \frac{I e^{ikr}}{cr} \int_{-d/2}^{d/2} \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) e^{-ikz \cos\theta} dz. \quad (9.54)$$

Непосредственное интегрирование дает

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3 \frac{2I e^{ikr}}{ckr} \left[\frac{\cos[(kd/2) \cos\theta] - \cos(kd/2)}{\sin^2\theta} \right]. \quad (9.55)$$

Поскольку в волновой зоне магнитное поле определяется формулой $\mathbf{B} = ik \mathbf{n} \times \mathbf{A}$, то его абсолютная величина есть

$|\mathbf{B}| = k \sin \theta |A_3|$. Отсюда находим среднюю мощность, излучаемую в единичный телесный угол:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I^2}{2\pi c} \left| \frac{\cos[(kd/2) \cos \theta] - \cos(kd/2)}{\sin \theta} \right|^2. \quad (9.56)$$

Электрическое поле направлено вдоль составляющей \mathbf{A} , перпендикулярной к \mathbf{n} . Следовательно, излучение поляризовано в плоскости, проходящей через антенну и радиус-вектор точки наблюдения.

Характер углового распределения (9.56) зависит от величины kd . Легко видеть, что в случае длинных волн ($kd \ll 1$) мы приходим к распределению дипольного излучения (9.28). В частных случаях, когда $kd = \pi$ или $kd = 2\pi$, что соответствует одной или двум полуволнам тока в антенне, угловые распределения даются формулами

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I^2}{2\pi c} \begin{cases} \frac{\cos^2[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta}, & kd = \pi, \\ \frac{4 \cos^4[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta}, & kd = 2\pi. \end{cases} \quad (9.57)$$

Эти угловые зависимости показаны в гл. 16 (см. фиг. 16.4), где они сравниваются с мультипольными разложениями. Угловое распределение излучения полуволновой антенны очень похоже на диаграмму излучения диполя, а полноволновая антenna имеет существенно более острую направленность.

Распределение излучения полноволновой антенны можно представлять себе как суперпозицию полей двух полуволновых антенн, расположенных одна над другой и возбуждаемых в фазе. При $\theta = \pi/2$, где волны складываются алгебраически, интенсивность в 4 раза больше, чем для полуволновой антенны. В направлениях, отличных от $\theta = \pi/2$, волны интерферируют, что и сужает лепесток диаграммы. Если подходящим образом расположить систему базисных антенн, например полуволновых, и соответственно подобрать фазы токов в них, то можно сформировать произвольную диаграмму направленности. Интересующегося читателя мы отсылаем к электротехнической литературе, где такие антенные решетки рассмотрены достаточно подробно.

Для полуволновой и полноволновой антенн можно проинтегрировать угловое распределение по всем углам, что дает полную мощность излучения

$$P = \frac{I^2}{c} \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt, & kd = \pi, \\ 2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt - \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt, & kd = 2\pi. \end{cases} \quad (9.58)$$

Интегралы в (9.58) можно выразить через интегральный косинус

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad (9.59)$$

а именно

$$\int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt = \ln(\gamma x) - \text{Ci}(x), \quad (9.60)$$

где $\gamma = 1,781 \dots$ — постоянная Эйлера. Таблицы интегрального косинуса даны, например, в справочнике Янке и Эмде [54]. Численные значения мощности излучения составляют

$$P = \frac{I^2}{2c} \begin{cases} 2,44, & kd = \pi, \\ 6,70, & kd = 2\pi. \end{cases} \quad (9.61)$$

При данной амплитуде тока I полноволновая антенна с возбуждением в центре излучает примерно в 3 раза большую мощность, чем полуволновая антенна. Коэффициент при $I^2/2$ имеет размерность сопротивления и называется *сопротивлением излучения* $R_{изл}$ антенны. Его величина в омах получается из (9.61) умножением на 30 (этот множитель равен численной величине скорости света, деленной на 10 в соответствующей степени). Таким образом, полуволновая и полноволновая антенны имеют соответственно сопротивления излучения 73,2 и 201 ом.

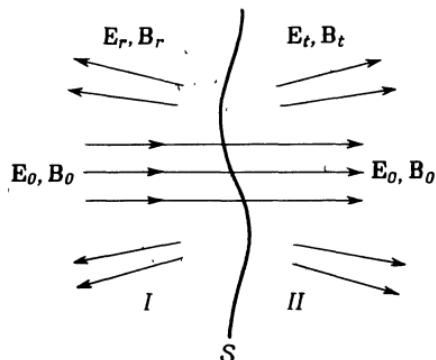
Следует оговориться, что идеализированный случай бесконечно тонкой линейной антенны с синусоидальным распределением тока является весьма упрощенной схемой реальных антенн. Конечные поперечные размеры, омические и радиационные потери, несинусоидальное распределение тока, конечная величина возбуждающего зазора и другие факторы существенно усложняют задачу. Эти важные для практических приложений проблемы подробно изложены в обширной литературе, посвященной расчету и конструированию антенн, к которой мы и отсылаем интересующегося читателя.

§ 5. Интеграл Кирхгофа

Общая задача дифракции рассматривает падение волны на одно или несколько препятствий или отверстий в поглощающих или проводящих поверхностях. Волна частично поглощается и рассеивается, что приводит к появлению волн, распространяющихся в различных направлениях, отличных от направления падающей волны. Расчетом излучения, распространяющегося от препятствия или отверстия, и занимается теория дифракции. Первая система-

тическая теория дифракции была дана Кирхгофом (1882 г.), который развел идею Гюйгенса о суперпозиции элементарных волн. В этом параграфе мы рассмотрим обычный метод Кирхгофа и остановимся на некоторых его недостатках, а в следующем выведем векторные теоремы, являющиеся векторным обобщением обычной скалярной теоремы Кирхгофа.

В теории дифракции обычно рассматривают две пространственные области I и II , разделенные граничной поверхностью S , как



Фиг. 9.4. Дифракционная система.

На поверхности S , в которой имеются отверстия, возникают отраженные и проходящие волны, налагающиеся на волны, которые существовали бы в областях I и II в отсутствие поверхности S .

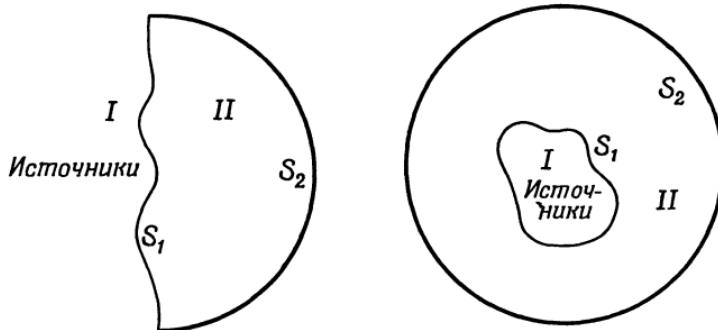
показано на фиг. 9.4. Поверхность S может быть, например, бесконечной металлической плоскостью с отверстиями. Волна, излучаемая источниками, расположенными в области I , падает на граничную поверхность S и дифрагирует на ней. При этом образуются рассеянные волны — проходящая вперед и отраженная. Обычно рассматривают только проходящую волну. Ее угловое распределение называется *дифракционной диаграммой* системы. Если падающая волна характеризуется полями \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 , отраженная волна — полями \mathbf{E}_r и \mathbf{B}_r , а проходящая волна — полями \mathbf{E}_t и \mathbf{B}_t , то полное поле в областях I и II будет $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_s$, где под s следует понимать соответственно r или t . Основной задачей теории дифракции является определение полей $(\mathbf{E}_t, \mathbf{B}_t)$ и $(\mathbf{E}_r, \mathbf{B}_r)$ при известных падающих полях $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ и известных свойствах граничной поверхности S . Поля в областях I и II связаны граничными условиями для \mathbf{E} и \mathbf{B} , которые должны удовлетворяться на S ; вид этих условий зависит от свойств поверхности S .

Задачи такого рода решаются обычно применением тождеств Грина к волновому уравнению (см. гл. 6). Рассмотрим скалярное поле $\psi(\mathbf{x}, t)$, определенное внутри и на замкнутой поверхности S и удовлетворяющее в этой области волновому уравнению без источников. Под $\psi(\mathbf{x}, t)$ можно понимать любую декартовую составляющую \mathbf{E} или \mathbf{B} . В гл. 6 мы показали, что значение ψ внутри S можно выразить через величину ψ и ее нормальную производную

на поверхности

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{R} \left[\operatorname{grad}' \psi(\mathbf{x}', t') - \frac{\mathbf{R}}{R^2} \psi(\mathbf{x}', t') - \frac{\mathbf{R}}{cR} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{\text{запазд}} \cdot \mathbf{n} da', \quad (9.62)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности и индекс указывает, что поля берутся в запаздывающий момент времени



Фиг. 9.5. Две возможные схемы дифракции.

Область I содержит источники излучения. В области II поля удовлетворяют условиям излучения.

$t' = t - R/c$. При гармонической зависимости от времени $e^{-i\omega t}$ интеграл (9.62) для $\psi(\mathbf{x}, t)$ можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{n} \cdot \left\{ \operatorname{grad}' \psi + ik \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \psi \right\} da'. \quad (9.63)$$

Чтобы применить соотношение (9.63) к дифракционным задачам, рассмотрим замкнутую поверхность S , состоящую из двух поверхностей S_1 и S_2 . Выбор поверхности S_1 определяется удобством решения данной конкретной задачи (например, ею может быть проводящий экран с отверстиями), а в качестве поверхности S_2 выберем сферу или полусферу очень большого радиуса (в пределе бесконечного) в области II, как показано на фиг. 9.5. Так как поля в области II являются проходящими и исходят из дифракционной области, то в окрестности S_2 они должны иметь вид уходящих волн. Отсюда следует, что поля, а следовательно, и $\psi(\mathbf{x})$ должны удовлетворять так называемым *условиям излучения*:

$$\psi \rightarrow f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow \left(ik - \frac{1}{r} \right). \quad (9.64)$$

Легко показать, что при выполнении этих условий интеграл в (9.63) по полусфере S_2 стремится к нулю как $1/R_s$ при стремлении радиуса

полусферы R_s к бесконечности. Таким образом, в пределе мы приходим к интегралу Кирхгофа для функции $\psi(x)$ в области II

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{n} \cdot \left[\operatorname{grad}' \psi + ik \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \psi \right] da', \quad (9.65)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к S_1 , направленный в область II.

Чтобы применить формулу Кирхгофа (9.65) к дифракционной задаче, необходимо знать величины ψ и $d\psi/dn$ на поверхности S_1 . Однако пока мы не решили точно соответствующую граничную задачу, эти значения нам не известны. Если, например, S_1 — плоский идеально проводящий экран с отверстием, а ψ — составляющая электрического поля, параллельная S_1 , то, очевидно, ψ равно нулю всюду на S_1 , за исключением отверстия. Значение же ψ в отверстии неизвестно. Поэтому без дополнительных исследований мы можем получить лишь приближенные решения, принимая определенные предположения о значениях ψ и $d\psi/dn$ на S_1 . *Приближение Кирхгофа* соответствует следующим допущениям:

1. Величины ψ и $d\psi/dn$ равны нулю на S_1 всюду, за исключением отверстий.
2. Величины ψ и $d\psi/dn$ в отверстиях равны соответствующим величинам в падающей волне в отсутствие каких-либо экранов или препятствий.

Все обычные дифракционные расчеты в классической оптике основаны на этом приближении Кирхгофа. Следует помнить, что полученные таким образом результаты справедливы лишь приближенно. Заметим, что сделанные допущения являются математически несовместными. Действительно, как было показано в гл. 1, § 9, для уравнения Лапласа решение внутри замкнутого объема однозначно определяется заданием на его поверхности либо только ψ (задача Дирихле), либо только $d\psi/dn$ (задача Неймана). Это же справедливо и для волнового уравнения Гельмгольца. Обе величины ψ и $d\psi/dn$ нельзя независимо задавать на поверхности. Приближение Кирхгофа дает хорошие результаты для очень малых длин волн, когда размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны. Однако даже в этом случае скалярная теория не учитывает эффектов, связанных с поляризацией дифрагирующей волны. Для промежуточных и длинных волн скалярное приближение вообще плохо применимо, не говоря уже об указанных выше сильных предположениях.

Так как задача о дифракции электромагнитных волн представляет собой граничную задачу для векторных полей, то можно надеяться, что мы добьемся существенно лучших результатов при использовании векторных эквивалентов интеграла Кирхгофа (9.65).

§ 6. Векторные эквиваленты интеграла Кирхгофа

Для получения векторной формулы, эквивалентной интегралу Кирхгофа (9.63), положим

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (9.66)$$

и запишем скалярную формулу (9.63) в виде

$$\psi(x) = \oint_S [G \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}' \psi - \psi \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}' G] da'. \quad (9.67)$$

Если написать такие соотношения для каждой декартовой составляющей электрического или магнитного поля и векторно сложить их, то получим векторную теорему для \mathbf{E}

$$\mathbf{E}(x) = \oint_S [G(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}') \mathbf{E} - \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}' G)] da' \quad (9.68)$$

и аналогичное выражение для \mathbf{B} . Этот результат не особенно удобен для вычислений, но его можно привести к более удобному виду, используя некоторые векторные преобразования. Во-первых, подынтегральное выражение в (9.68) можно представить как

$$[] = (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}') (G\mathbf{E}) - 2\mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}' G). \quad (9.69)$$

Далее, комбинируя векторные тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \operatorname{grad}' G) &= \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}' G) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad}' G, \\ \operatorname{grad}' G \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad}' G) - (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}' G) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (9.70)$$

можно исключить последний член в (9.69)

$$\begin{aligned} [] &= (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}') (G\mathbf{E}) - \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \operatorname{grad}' G) - \mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad}' G) - \\ &\quad - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad}' G - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \operatorname{grad}' G. \end{aligned} \quad (9.71)$$

Используем теперь формулу для ротора произведения вектора на скаляр, чтобы преобразовать второй член в (9.71), и учтем условие $\operatorname{div}' \mathbf{E} = 0$ при преобразовании третьего члена. В результате получим

$$\begin{aligned} [] &= (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}') (G\mathbf{E}) + \mathbf{n} \times \operatorname{rot}' (G\mathbf{E}) - \mathbf{n} \operatorname{div}' (G\mathbf{E}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad}' G - \\ &\quad - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \operatorname{grad}' G - G\mathbf{n} \times \operatorname{rot}' \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (9.72)$$

Преобразование двух членов (9.68) в шесть членов (9.72) может показаться не очень целесообразным, однако мы сейчас покажем, что поверхностные интегралы от первых трех членов в (9.72), содержащих произведение $G\mathbf{E}$, тождественно обращаются в нуль.

Для этого воспользуемся легко проверяемыми тождествами, связывающими поверхностные интегралы по замкнутой поверхности S с объемными интегралами по области, заключенной внутри S :

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da &= \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} d^3x, \\ \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) da &= \int_V \operatorname{rot} \mathbf{A} d^3x, \\ \oint_S \varphi \mathbf{n} da &= \int_V \operatorname{grad} \varphi d^3x. \end{aligned} \quad (9.73)$$

Здесь \mathbf{A} и φ — произвольные векторная и скалярная функции. С помощью этих тождеств поверхностный интеграл от первых трех членов в (9.72) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \oint_S [(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}')(G\mathbf{E}) + \mathbf{n} \times \operatorname{rot}'(G\mathbf{E}) - \mathbf{n} \operatorname{div}'(G\mathbf{E})] da' &= \\ = \int_V [\nabla'^2(G\mathbf{E}) + \operatorname{rot}' \operatorname{rot}'(G\mathbf{E}) - \operatorname{grad}' \operatorname{div}'(G\mathbf{E})] d^3x'. \end{aligned} \quad (9.74)$$

Так как $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A}$, то объемный интеграл тождественно равен нулю¹⁾.

Оставшиеся три члена в (9.72) дают еще одну возможную форму векторного соотношения Кирхгофа (9.68). Заменяя $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ на \mathbf{B} с помощью уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{B}$, можно привести формулу для электрического поля в произвольной точке объема, ограниченного поверхностью S , к виду

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\oint_S [ik(\mathbf{n} \times \mathbf{B})G + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \operatorname{grad}' G + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad}' G] da'. \quad (9.75)$$

Аналогично для магнитного поля имеем

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\oint_S [-ik(\mathbf{n} \times \mathbf{E})G + (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \times \operatorname{grad}' G + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) \operatorname{grad}' G] da'. \quad (9.76)$$

¹⁾ Читатель может усомниться в применимости тождеств (9.73) к векторной функции $(G\mathbf{E})$, имеющей особенность в точке $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. Однако эту особенность можно исключить, считая, что поверхность S состоит из внешней поверхности S' и малой сферы S'' вокруг точки $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. Можно показать, что вклад интеграла по S'' стремится к нулю при стремлении к нулю радиуса сферы S'' . Таким образом, формулы (9.74) остаются справедливыми, даже если функция G имеет особенность в интересующем нас объеме.

В интегралах (9.75) и (9.76) вектор \mathbf{n} , как обычно,— единичный вектор внешней нормали. Этим интегралам можно дать наглядную интерпретацию, введя эквивалентные источники (заряды и токи). Нормальную составляющую \mathbf{E} в (9.75) можно, очевидно, рассматривать как эффективную плотность поверхностного заряда. Аналогично в соответствии с (8.14) тангенциальную составляющую магнитного поля $(\mathbf{n} \times \mathbf{B})$ можно рассматривать как эффективный поверхностный ток. Оставшиеся члены $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})$ и $(\mathbf{n} \times \mathbf{E})$ интерпретируются соответственно как эффективные поверхностные *магнитные заряды* и *токи*.

Векторные формулы (9.75) и (9.76) являются векторными аналогами скалярной теоремы Гюйгенса — Кирхгофа (9.63). Если поля \mathbf{E} и \mathbf{B} удовлетворяют на бесконечности условиям излучения (9.64) и, кроме того, векторному соотношению $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times (\mathbf{r}/r)$, то легко показать, что интеграл по бесконечно удаленной части поверхности S равен нулю. Поэтому в обозначениях фиг. 9.5 электрическое поле (9.75) запишется в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{S_1} [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \operatorname{grad}' G + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{grad}' G + ik(\mathbf{n} \times \mathbf{B})G] da', \quad (9.77)$$

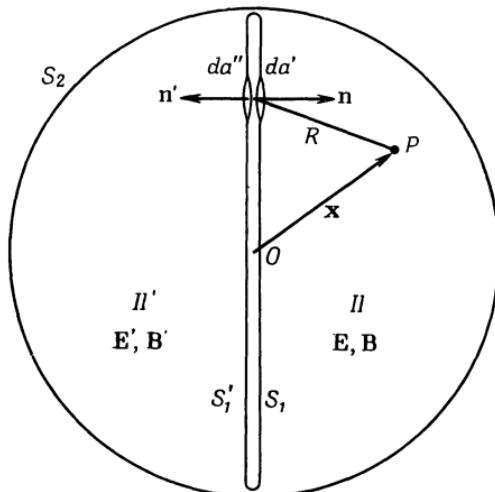
где S_1 — поверхность соответствующей дифракционной системы, а нормаль \mathbf{n} направлена теперь *внутрь* области наблюдения.

Векторная теорема (9.77) является важным обобщением скалярного выражения (9.65). В ней полностью учтен векторный характер электромагнитного поля. Однако для расчета дифрагированных полей и здесь необходимо знать величины \mathbf{E} и \mathbf{B} на поверхности S_1 . Для достаточно коротких волн применимо приближение Кирхгофа, описанное в предыдущем параграфе. Резкий скачок \mathbf{E} и \mathbf{B} от невозмущенных величин в освещенной области поверхности S_1 до нуля в теневой области может быть математически скомпенсирован линейными токами, текущими по границам отверстий¹⁾.

Из соотношения (9.77) можно получить очень удобную формулу для частного случая плоской граничной поверхности S_1 . Представим себе, что поверхность S_1 , охватывающая источники и изображенная в правой части фиг. 9.5, изменена по форме так, что представляет собой большой плоский диск, показанный на фиг. 9.6. Область «проходящих» волн II разбивается теперь на области II и II' , соединяющиеся только посредством кольцевого отверстия на бесконечности. Обозначим стороны диска через S_1 и S'_1 . Единичные векторы \mathbf{n} и $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ направлены соответственно в области II и II' . Найдем интегральное выражение для полей в области II через поля на *правой* поверхности S_1 . Этот случай аналогичен изо-

¹⁾ Вопрос о линейных токах дискутируется в книгах Стрэттона [106] и Сильвера [95], гл. 57.

браженному в левой части фиг. 9.5. Величины полей в области II' нас не интересуют. Поэтому можно подобрать гипотетические источники внутри диска, чтобы окончательные выражения для дифрагированных полей в области II были особенно удобны. Получив желаемое выражение для полей в области II в виде интеграла по поверхности S_1 [см. соотношение (9.82)], мы можем забыть о способе его вывода и не интересоваться левой частью фиг. 9.6.



Фиг. 9.6.

Для нас представляет интерес лишь дифрагированное поле в области II , определяемое отверстиями или препятствиями, расположенными на плоской поверхности S_1 .

Если поля в областях II и II' соответственно равны E, B и E', B' , то, как видно из фиг. 9.6, при стремлении толщины диска к нулю интеграл (9.77) можно записать в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{S_1} \{ [\mathbf{n} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}')] \times \operatorname{grad}' G + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E}') \operatorname{grad}' G + \\ + ik\mathbf{n} \times (\mathbf{B} - \mathbf{B}') G \} da'. \quad (9.78)$$

Поле $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ в левой части равенства — это либо \mathbf{E} , либо \mathbf{E}' в зависимости от того, где находится точка x ; интеграл же берется только по правой стороне поверхности S_1 .

Наиболее часто встречается случай проводящей поверхности с отверстиями. Границные условия на идеально проводящей поверхности имеют вид $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$, однако $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{n} \times \mathbf{B} \neq 0$. При вычислении поверхностного интеграла (9.78) было бы желательно интегрировать только по отверстиям, а не по всей поверхности. Первый член в (9.78) в случае идеально проводящего экрана отличен

от нуля только на отверстиях. Попытаемся выбрать поля в области II' так, чтобы оставшиеся члены обращались в нуль на всей поверхности S_1 . Очевидно, следует потребовать выполнения соотношений

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}')_{S'_1} &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})_{S_1}, \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{B}')_{S'_1} &= (\mathbf{n} \times \mathbf{B})_{S_1}. \end{aligned} \quad (9.79)$$

Конечно, поля \mathbf{E}' , \mathbf{B}' должны удовлетворять уравнениям Максвелла и условиям излучения в области II' , если \mathbf{E} , \mathbf{B} удовлетворяют им в области II . Легко видеть, что требования (9.79) на поверхностях S_1 и S'_1 удовлетворяются, если \mathbf{E} и \mathbf{B} связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}'(\mathbf{x}') &= -\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{x}') &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{n} \times \mathbf{B}'(\mathbf{x}') &= \mathbf{n} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}'(\mathbf{x}') &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (9.80)$$

где точка \mathbf{x}' является зеркальным изображением точки \mathbf{x} в плоскости S_1 . При переходе от точек \mathbf{x} к зеркально сопряженным точкам \mathbf{x}' знак тангенциальной составляющей электрического поля и нормальной составляющей магнитного поля меняется на обратный, а знак нормальной составляющей магнитного поля и тангенциальной составляющей магнитного поля остается прежним.

Подставляя (9.80) в (9.78), мы приходим к простому выражению для поля $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ через интеграл по плоскости S_1 , ограничивающей область II^1 :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 2 \int_{S_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \operatorname{grad}' G da', \quad (9.81)$$

где $(\mathbf{n} \times \mathbf{E})$ — тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности S_1 (\mathbf{n} — единичный вектор нормали, направленный внутрь области II), а G — функция Грина (9.66). Поскольку $\operatorname{grad}' G = -\operatorname{grad} G$, соотношение (9.81) может быть представлено и в другой форме:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 2 \operatorname{rot} \int_{S_1} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') da'. \quad (9.82)$$

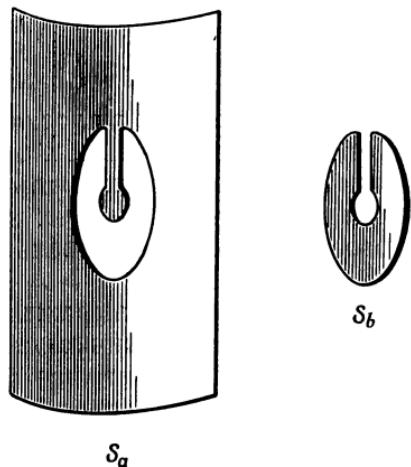
Для дифракционной системы, представляющей собой идеально проводящий экран с отверстиями, интеграл по S_1 сводится к интегралам только по площади отверстий. Формулы (9.81) и (9.82) будут точ-

¹⁾ Эта формула для плоских экранов была впервые получена Смайтом [101] методом двойного токового слоя в отличие от применяемого здесь метода токов Грина.

ными, если в них подставить правильное значение тангенциальной составляющей \mathbf{E} в отверстии экрана. Однако практически подставляется некоторое приближенное значение поля в отверстии. Для плоского проводящего экрана нужно аппроксимировать только тангенциальную составляющую электрического поля, причем граничные условия на экране выполняются автоматически [как можно проверить, исходя непосредственно из (9.82)].

§ 7. Принцип Бабине для дополнительных экранов

Прежде чем переходить к рассмотрению отдельных примеров дифракции, установим одно полезное соотношение, так называемый *принцип Бабине*. Принцип Бабине связывает дифракционные поля для некоторого экрана с полями для дополнительного экрана.



Фиг. 9.7. Дифракционный экран S_a и дополнительный к нему экран S_b .

Рассмотрим сначала этот принцип, ограничиваясь скалярным приближением Кирхгофа. Дифракционный экран предполагается расположенным на некоторой поверхности S , разделяющей пространство на области I и II так же, как и в § 5. Пусть экран занимает всю поверхность S , за исключением некоторых отверстий. Дополнительным экраном называется экран, получающийся из первоначального заменой отверстий на экран, а экрана на отверстия. Обозначим поверхность исходного экрана через S_a , а дополнительного — через S_b , тогда $S_a + S_b = S$, как схематически показано на фиг. 9.7.

Если внутри S (в области I) имеются источники поля $\psi(\mathbf{x})$, то в отсутствие каких-либо экранов это поле в области II дается интегралом Кирхгофа (9.65), где интегрирование производится по всей поверхности S . Если же на поверхности S расположен экран S_a , то поле $\psi_a(\mathbf{x})$ в области II в приближении Кирхгофа дается интегралом (9.65), в подынтегральном выражении которого стоит

то же поле ψ , но интеграл берется только по S_b (по отверстиям). Аналогично для дополнительного экрана поле $\psi_b(x)$ в том же приближении дается интегралом по S_a . Отсюда очевидно следующее соотношение между дифрагированными полями ψ_a и ψ :

$$\psi_a + \psi_b = \psi. \quad (9.83)$$

Это и есть принцип Бабине, как его обычно формулируют в оптике. Если, например, ψ представляет собой падающую плоскую волну, то, согласно принципу Бабине, дифракционная картина в направлениях, отличных от направления прямого падения, одинакова для взаимно дополнительных экранов.

Полученная формулировка принципа Бабине неудовлетворительна в двух отношениях: во-первых, она относится к скалярным полям и, во-вторых, основана на приближении Кирхгофа. Второй недостаток можно устранить, если мы обобщим определение дополнительности и при замене экрана на дополнительный экран введем и дополнительные граничные условия (т. е. условия Дирихле заменим на условия Неймана, и наоборот) для скалярных полей. Однако, поскольку нас в основном интересуют электромагнитные поля, мы не будем больше останавливаться на скалярной задаче.

Строгую формулировку принципа Бабине для электромагнитных волн можно получить для случая тонкого плоского идеально проводящего экрана и дополнительного к нему экрана¹⁾. Пусть поля E_0, B_0 , падают на экран с металлической поверхностью S_a (см. фиг. 9.7), расположенный в свободном пространстве. Вследствие наличия экрана образуются проходящие и отраженные волны, как показано на фиг. 9.4. В дальнейшем в тех случаях, когда нам не потребуется более детального разделения, мы будем объединять проходящие и отраженные волны под общим названием рассеянных волн E_s, B_s . В случае идеально проводящего экрана поверхностный ток K , индуцируемый падающей волной, должен быть таким, чтобы во всех точках поверхности экрана S_a выполнялось равенство $n \times E_s = -n \times E_0$. Для тонкой плоской поверхности из симметрии задачи следует, что тангенциальные составляющие рассеянных магнитных полей на поверхности должны быть равны и противоположно направлены. Согласно (5.90), имеем

$$n \times H_t = \frac{2\pi}{c} K = -n \times H_r, \quad (9.84)$$

где нормаль n направлена в сторону области II . С помощью тех же рассуждений, что и при выводе (9.80) из (9.79), можно показать,

¹⁾ Для электромагнитного поля принцип дополнительности был сформулирован впервые советским ученым А. А. Пистолькорсом [ЖТФ, 14, 693, (1944)] и в более корректной формулировке — М. А. Леоновичем [ЖЭТФ, 16, 475 (1946)]. — Прим. ред.

что для любой точки x в области II и ее зеркального изображения x' в области I рассеянные поля удовлетворяют следующим условиям симметрии:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{E}_r(x') &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}_t(x), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_r(x') &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_t(x), \\ \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r(x') &= -\mathbf{n} \times \mathbf{B}_t(x), \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_r(x') &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_t(x).\end{aligned}\quad (9.85)$$

Заметим, что эти соотношения отличаются от (9.80) заменой знаков $\mathbf{E}_r(x')$ и $\mathbf{B}_r(x')$ на обратные. Как показано в книге Смайта [100], поля (9.80) соответствуют двойному токовому слою, тогда как поля (9.85) обладают симметрией, характерной для простого плоского токового слоя, излучающего в обоих направлениях.

Мы можем написать выражение для рассеянного магнитного поля в виде интеграла по поверхностным токам \mathbf{K} . Поскольку \mathbf{B} есть ротор векторного потенциала, то

$$\mathbf{B}_s = \text{rot} \frac{4\pi}{c} \int_{S_a} \mathbf{K} G da', \quad (9.86)$$

где G — функция Грина (9.66), а интегрирование производится по металлической поверхности экрана S_a . Подставляя \mathbf{K} из (9.84), мы можем записать магнитное поле в области II в виде

$$\mathbf{B}_t(x) = 2 \text{rot} \int_{S_a} \mathbf{n} \times \mathbf{B}_t(x') G(x, x') da. \quad (9.87)$$

Этот результат аналогичен (9.82) с той разницей, что

- 1) поля \mathbf{E} и \mathbf{B} поменялись местами;
- 2) здесь интегрирование производится только по поверхности экрана, тогда как в (9.82) — только по площади отверстий;
- 3) в выражение (9.82) входит полное электрическое поле, тогда как в (9.87) входит только рассеянное поле.

Сопоставление (9.87) с (9.82) позволяет сформулировать принцип Бабине. Запишем соотношение (9.82) для экрана, дополнительного к рассматриваемому экрану с металлической поверхностью

$$\mathbf{E}'(x) = 2 \text{rot} \int_{S_a} \mathbf{n} \times \mathbf{E}'(x') G(x, x') da'. \quad (9.88)$$

Здесь интеграл берется только по поверхности S_a , поскольку она соответствует отверстиям в дополнительном экране. В области II поле \mathbf{E}' представляется суммой

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 + \mathbf{E}'_i, \quad (9.89)$$

где \mathbf{E}'_0 — падающее электрическое поле в дополнительной дифракционной задаче, а \mathbf{E}'_t — соответствующее проходящее, или дифрагированное, поле. Очевидно, выражения (9.87) и (9.88) переходят одно в другое при замене

$$\mathbf{B}_t \rightarrow \pm (\mathbf{E}'_0 + \mathbf{E}'_t). \quad (9.90)$$

Легко показать, что справедливо также соотношение

$$\mathbf{E}_t \rightarrow \mp (\mathbf{B}'_0 + \mathbf{B}'_t). \quad (9.91)$$

Отличие в знаках объясняется тем, что в обоих случаях поля должны представлять собой уходящие волны. Поскольку мы могли принять в качестве исходного дополнительный экран, то соотношения (9.90) и (9.91) должны быть справедливы и при замене штрихованных величин на нештрихованные и наоборот. Сравнение получающейся системы равенств с первоначальной показывает, что падающие поля в исходной и дополнительной дифракционных задачах должны быть связаны соотношениями

$$\mathbf{E}'_0 = -\mathbf{B}_0, \quad \mathbf{B}'_0 = \mathbf{E}_0. \quad (9.92)$$

Дополнительная задача соответствует не только дополнительному экрану, но также и дополнительным падающим полям, в которых \mathbf{E} и \mathbf{B} меняются местами.

Таким образом, принцип Бабине формулируется следующим образом: пусть дифракционная система состоит из источников, создающих поля \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 , падающие на тонкий плоский идеально проводящий экран с отверстиями. Дополнительная к ней дифракционная система состоит из источников, дающих поля $\mathbf{E}'_0 = -\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}'_0 = \mathbf{E}_0$, падающие на дополнительный экран. Если проходящие (дифрагированные) поля за экраном (со стороны, противоположной источникам) равны \mathbf{E}_t , \mathbf{B}_t для основной системы и \mathbf{E}'_t , \mathbf{B}'_t для дополнительной, то имеют место следующие соотношения:

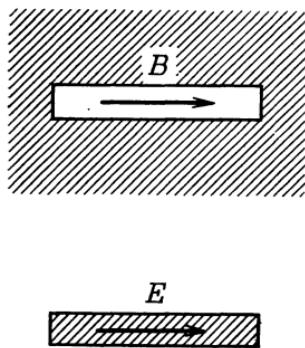
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t + \mathbf{B}'_t &= -\mathbf{E}_0 = -\mathbf{B}'_0, \\ \mathbf{B}_t - \mathbf{E}'_t &= -\mathbf{B}_0 = \mathbf{E}'_0. \end{aligned} \quad (9.93)$$

Эти соотношения являются векторным аналогом скалярного принципа Бабине (9.83). Для плоской волны, падающей на дифракционный экран, из принципа Бабине следует, что в направлениях, отличных от направления падения, интенсивности дифракционного поля для экрана и его дополнения одинаковы, а сами поля связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= -\mathbf{B}'_t, \\ \mathbf{B}_t &= \mathbf{E}'_t. \end{aligned} \quad (9.94)$$

Поляризация падающей волны для дополнительного экрана должна быть, конечно, изменена согласно (9.92).

Строгая векторная формулировка принципа Бабине очень полезна для микроволновых задач. Рассмотрим, например, узкую щель, прорезанную в бесконечной плоской проводящей пластине, на которую падает волна с магнитным полем, направленным вдоль щели, и с электрическим полем, перпендикулярным щели, как



Фиг. 9.8. Эквивалентные излучающие системы в соответствии с принципом Бабине.

показано на фиг. 9.8. Диаграмма излучения этой щели будет такая же, как и для тонкой линейной антенны, электрическое поле в которой направлено вдоль антенны (см. § 2 и 4). Поляризация излучения в этих двух системах будет различной: электрическому вектору в одной системе будет соответствовать магнитный вектор в другой. Таким путем можно рассчитать antennную решетку типа волновода со щелями на его боковых сторонах¹⁾.

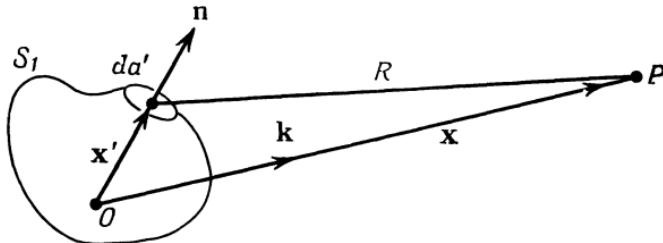
§ 8. Дифракция на круглом отверстии

Начиная с основополагающих работ Кирхгофа, теория дифракции интенсивно развивалась как в оптике, где обычно достаточно ограничиться скалярной теорией, основанной на выражении (9.65), так и в применении к микроволновому излучению, где необходимо более строгое рассмотрение. Целый ряд монографий посвящен исключительно вопросам дифракции и рассеяния волн. Мы рассмотрим здесь несколько примеров, иллюстрирующих применение скалярной и векторной теорем (9.65) и (9.82), и сравним точность различных приближенных методов расчета.

Дифракционные явления принято разделять на дифракцию Френеля и дифракцию Фраунгофера в зависимости от расстояния точки наблюдения от дифракционной системы. Обычно дифракционная система (например, отверстие в непрозрачном экране) имеет размеры, сравнимые с длиной волны или превышающие ее. При этом точка наблюдения может находиться в близкой зоне, т. е. на расстоянии меньше длины волны от дифракционной системы. Поля в ближ-

¹⁾ См., например, [95], гл. 9.

ней зоне имеют весьма сложную структуру и не представляют особого интереса. Точки, находящиеся на таком расстоянии от дифракционной системы, которое во много раз больше длины волны, но все же меньше или порядка собственных размеров системы, считаются находящимися во френелевской зоне. Область же, расположенная на расстоянии, которое велико как по сравнению с размерами дифракционной системы, так и по сравнению с длиной волны, называется фраунгоферовой зоной¹⁾. Она соответствует



Ф и г. 9.9.

волновой зоне, определенной в § 1 этой главы. Дифракционные картины в зонах Френеля и Фраунгофера существенно различаются, поскольку в дифракции Френеля наибольшую роль играют участки дифракционной системы, ближайшие к точке наблюдения, в то время как в дифракцию Фраунгофера вносит свой вклад вся система в целом. Мы будем рассматривать только фраунгоферову дифракцию; примеры дифракции Френеля будут даны в задачах в конце главы.

Если точка наблюдения находится далеко от дифракционной системы, то мы можем воспользоваться разложением (9.6) для $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Сохраняя только члены низшего порядка по $1/kR$, представим скалярный интеграл Кирхгофа (9.65) в виде

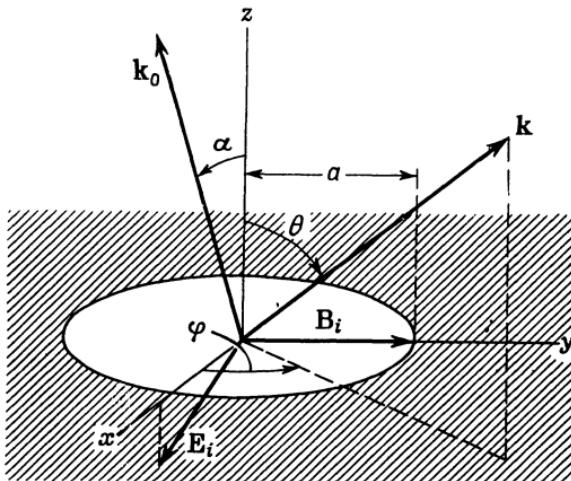
$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_{S_1} e^{-ik \cdot \mathbf{x}'} [\mathbf{n} \cdot \text{grad}' \psi(\mathbf{x}') + ik \cdot \mathbf{n} \psi(\mathbf{x}')] d\mathbf{a}', \quad (9.95)$$

где \mathbf{x}' — координата элемента поверхности $d\mathbf{a}'$, r — длина вектора \mathbf{x} , соединяющего начало координат O с точкой наблюдения P , а $\mathbf{k} = k\mathbf{x}/r$ — волновой вектор, направленный в точку наблюдения (фиг. 9.9). Для плоской поверхности векторное выражение (9.82) в этом приближении принимает вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{ie^{ikr}}{2\pi r} \mathbf{k} \times \int_{S_1} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}') e^{-ik \cdot \mathbf{x}'} d\mathbf{a}'. \quad (9.96)$$

¹⁾ Данное здесь автором определение зон Френеля и Фраунгофера не вполне точно. Зона Френеля соответствует таким расстояниям от дифракционной системы, отношение которых к размерам дифракционной системы порядка отношения этих размеров к длине волны. Зона Фраунгофера соответствует много большим расстояниям.— Прим. ред.

Рассмотрим в качестве примера дифракцию плоской волны, падающей под углом α на тонкий идеально проводящий экран с круглым отверстием радиусом a . Пусть вектор поляризации падающей волны лежит в плоскости падения. Используемая система координат показана на фиг. 9.10. Экран расположен в плоскости xy , а центр отверстия находится в начале координат. Волна падает снизу, так что области дифракционных полей соответствует $z > 0$.



Фиг. 9.10. Дифракция на круглом отверстии радиусом a .

Плоскость падения мы выберем в качестве плоскости xz . Электрическое поле падающей волны представляется в явном виде в декартовых составляющих следующим образом:

$$\mathbf{E}_i = E_0 (\mathbf{e}_1 \cos \alpha - \mathbf{e}_3 \sin \alpha) e^{ik(z \cos \alpha + x \sin \alpha)}. \quad (9.97)$$

При расчете дифракционных полей с помощью (9.95) или (9.96) мы примем обычное предположение о том, что точное поле в поверхностном интеграле можно заменить падающим полем. Для расчета с помощью векторного соотношения (9.96) нужно знать величину

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i)_{z=0} = E_0 \mathbf{e}_2 \cos \alpha e^{ik x \sin \alpha}. \quad (9.98)$$

Вводя полярные координаты для интегрирования по отверстию, получаем

$$\mathbf{E}(x) = \frac{i e^{ikr} E_0 \cos \alpha}{2\pi r} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_2) \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\beta e^{ik\rho [\sin \alpha \cos \beta - \sin \theta \cos(\phi - \beta)]}, \quad (9.99)$$

где θ и φ — угловые координаты вектора \mathbf{k} . Если ввести угловую функцию

$$\xi = (\sin^2 \theta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \theta \sin \alpha \cos \varphi)^{1/2}, \quad (9.100)$$

то интеграл по углам запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta' e^{-ik\rho\xi} \cos \beta' = J_0(k\rho\xi). \quad (9.101)$$

После этого интеграл по радиусу легко вычисляется. В результате получим электрическое поле в векторном приближении Кирхгофа

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{ie^{ikr}}{r} a^2 E_0 \cos \alpha (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_2) \frac{J_1(ka\xi)}{ka\xi}. \quad (9.102)$$

Средняя мощность, излучаемая в единичный телесный угол, равна

$$\frac{dP}{d\Omega} = P_i \cos \alpha \frac{(ka)^2}{4\pi} (\cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) \left| \frac{2J_1(ka\xi)}{ka\xi} \right|^2, \quad (9.103)$$

где величина

$$P_i = \frac{cE_0^2}{8\pi} \pi a^2 \cos \alpha \quad (9.104)$$

представляет собой полную мощность, *падающую* на отверстие. Если отверстие велико по сравнению с длиной волны ($ka \gg 1$), то множитель $[2J_1(ka\xi)/ka\xi]^2$ имеет острый максимум при $\xi = 0$, равный единице, и быстро падает до нуля (с маленькими вторичными максимумами) в области $\Delta\xi \sim 1/ka$ в обе стороны от направления $\xi = 0$. Это значит, что поле в основном проходит через отверстие в соответствии с законами геометрической оптики; дифракционные эффекты очень слабы. При $ka \sim 1$ бесселева функция сравнительно медленно меняется с углом, и проходящая волна распространяется в направлениях, весьма отличных от направления падения. При $ka \ll 1$ угловое распределение полностью определяется множителем $(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_2)$ в (9.102). Но в этом предельном случае замена истинного поля в отверстии невозмущенным является слишком грубым приближением.

Полная проходящая мощность получается интегрированием выражения (9.103) по всем углам в верхней полусфере. Отношение проходящей мощности к падающей называется *коэффициентом прохождения*

$$T = \frac{\cos \alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) \left| \frac{J_1(ka\xi)}{\xi} \right|^2 \sin \theta d\theta. \quad (9.105)$$

В предельных случаях $ka \gg 1$ и $ka \ll 1$ коэффициенты прохождения стремятся к значениям

$$T \rightarrow \begin{cases} \cos \alpha, & ka \gg 1, \\ \frac{1}{3}(ka)^2 \cos \alpha, & ka \ll 1. \end{cases} \quad (9.106)$$

Предельное значение для случая длинных волн ($ka \ll 1$) в силу сделанных допущений представляется сомнительным, но во всяком случае из него следует, что коэффициент прохождения для малых отверстий весьма мал. Для случая нормального падения ($\alpha = 0$) коэффициент прохождения (9.105) можно записать в виде

$$T = \int_0^{\pi/2} J_1^2(ka \sin \theta) \left(\frac{2}{\sin \theta} - \sin \theta \right) d\theta. \quad (9.107)$$

С помощью интегральных соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} J_n^2(z \sin \theta) \frac{d\theta}{\sin \theta} &= \int_0^{2z} J_{2n}(t) \frac{dt}{t}, \\ \int_0^{\pi/2} J_n^2(z \sin \theta) \sin \theta d\theta &= \frac{1}{2z} \int_0^{2z} J_{2n}(t) dt \end{aligned} \quad (9.108)$$

и рекуррентных формул (3.87) и (3.88) коэффициент прохождения можно представить в следующих эквивалентных формах:

$$T = \begin{cases} 1 - \frac{1}{ka} \sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(2ka), \\ 1 - \frac{1}{2ka} \int_0^{2ka} J_0(t) dt. \end{cases} \quad (9.109)$$

При увеличении ka коэффициент прохождения в среднем возрастает с небольшими колебаниями. При $ka \gg 1$ из второго выражения (9.109) можно получить асимптотическое выражение

$$T \approx 1 - \frac{1}{2ka} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{(ka)^{3/2}} \sin \left(2ka - \frac{\pi}{4} \right) + \dots, \quad (9.110)$$

из которого явно видны малые колебания T . Приближенные выражения (9.109) и (9.110) для коэффициента прохождения характеризуют его общее поведение в зависимости от ka , однако они не могут претендовать на достаточную точность. Для круглого отверстия был произведен точный расчет, а также развиты более аккуратные приближенные методы. Их сравнение друг с другом проведено

в книге Кинга и У Тай-цзуня [59]. Корректное асимптотическое разложение для коэффициента прохождения не содержит члена $1/2ka$, а коэффициент перед $(ka)^{-3/2}$ в 2 раза больше.

Сравним теперь наши результаты для *векторного* приближения Кирхгофа с обычной скалярной теорией, основанной на выражении (9.95). Для волны, которая падает не по нормали к экрану, сразу возникает вопрос о том, с чем следует отождествить скалярную функцию $\psi(x)$. Наиболее разумно, по-видимому, выбрать в качестве ψ величину электрического или магнитного поля. При этом интенсивность излучения будет пропорциональной квадрату абсолютной величины (9.95). Выбрав в качестве ψ составляющую E или B , мы должны дальше решить, будем ли мы сохранять или отбрасывать радиальные составляющие дифрагированных полей при расчете мощности. Полагая функцию ψ равной величине электрического поля E и вычисляя интеграл в (9.95), получаем скалярный эквивалент соотношения (9.102):

$$\psi(x) = -ik \frac{e^{ikr}}{r} a^2 E_0 \left(\frac{\cos \alpha + \cos \theta}{2} \right) \frac{J_1(ka\xi)}{ka\xi}. \quad (9.111)$$

Мощность, излучаемая в единицу телесного угла, равна в *скалярном* приближении Кирхгофа

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx P_i \frac{(ka)^2}{4\pi} \cos \alpha \left(\frac{\cos \alpha + \cos \theta}{2 \cos \alpha} \right)^2 \left| \frac{2J_1(ka\xi)}{ka\xi} \right|^2, \quad (9.112)$$

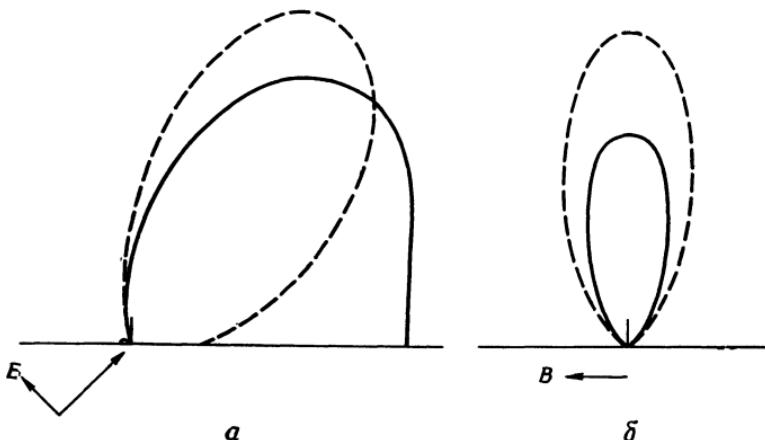
где P_i определяется выражением (9.104).

Сравнение результатов векторного приближения Кирхгофа (9.103) с (9.112) обнаруживает как сходство, так и различие между ними. Обе формулы содержат одинаковый дифракционный множитель $[J_1(ka\xi)/ka\xi]^2$ и дают одинаковую зависимость от волнового числа. Однако скалярное выражение в отличие от векторного не имеет азимутальной зависимости (кроме содержащейся в ξ). Азимутальное изменение обусловлено поляризацией поля и поэтому в скалярном приближении отсутствует. Для нормального падения ($\alpha = 0$) и больших отверстий ($ka \gg 1$) поляризационная зависимость становится несущественной. В этом случае дифрагированные поля сосредоточены в очень малом телесном угле вокруг направления падения и как скалярное, так и векторное приближения приводят к общему выражению

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx P_i \frac{(ka)^2}{\pi} \left| \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right|^2. \quad (9.113)$$

На фиг. 9.11 векторное и скалярное приближения Кирхгофа сравниваются для угла падения 45° и диаметра отверстия, равного длине волны ($ka = \pi$). Показано угловое распределение мощности излучения в плоскости падения (содержащей вектор электриче-

ского поля падающей волны) и в перпендикулярной плоскости. Сплошная кривая дает векторное приближение для каждого случая, пунктирная — скалярное; из кривых видно, что при $ka = \pi$



Фиг. 9.11. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии диаметром в одну длину волны в тонком плоском проводящем экране.

Плоская волна падает на экран под углом 45° . Сплошные линии соответствуют векторному приближению Кирхгофа, пунктирные — скалярному приближению.
а — распределение интенсивности в плоскости падения (E — плоскость); б — распределение интенсивности (увеличенное в 2,5 раза) в плоскости, перпендикулярной плоскости падения (B — плоскость).

между этими двумя приближениями имеется значительное различие. Есть основания считать, что результаты векторного приближения Кирхгофа близки к точным, несмотря на то что при $ka \ll 1$ приближение уже становится некорректным. Векторное приближение для прямоугольного отверстия удивительно хорошо согласуется с точным расчетом вплоть до $ka \sim 1^1$.

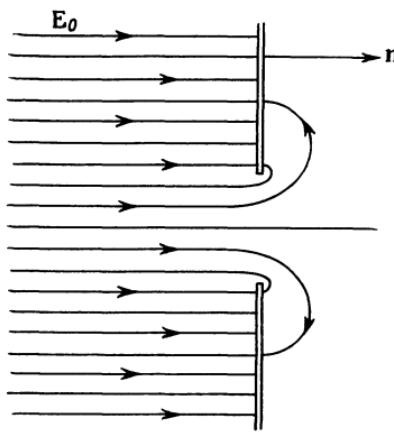
§ 9. Дифракция на малых отверстиях

Как мы видели, для больших апертур или коротких волн дифрагированные поля хорошо описываются приближенным методом, в котором тангенциальная составляющая электрического поля в отверстии заменяется ее невозмущенным значением для падающего поля.

Для больших длин волн это приближение дает гораздо менее удовлетворительные результаты. В том случае, когда размеры отверстия малы по сравнению с длиной волны, необходим совершенный другой подход.

¹⁾ См. работу [107]. Ряд графиков, где сравнивается векторное приближение Кирхгофа с точными расчетами, приведен в статье [76].

Рассмотрим тонкую плоскую идеально проводящую пластину с малым отверстием в ней. Будем считать, что размеры отверстия очень малы по сравнению с длиной волны электромагнитного поля, имеющегося с одной стороны от пластины. Нашей задачей является нахождение дифрагированного поля по другую сторону пластины. Поскольку пластина плоская, то применима простая векторная теорема (9.82). Очевидно, для решения задачи достаточно определить электрическое поле в плоскости отверстия.



Ф и г. 9.12.

Бете (1942 г.) заметил, что поля в окрестности малого отверстия могут быть получены статическими или квазистатическими методами. В отсутствие отверстия электромагнитное поле вблизи проводящей плоскости на одной ее стороне имеет только нормальную составляющую электрического поля E_0 и тангенциальную составляющую магнитного поля B_0 , тогда как на другой стороне полей вообще нет. Употребляя выражение «вблизи проводящей плоскости», мы подразумеваем расстояния, которые малы по сравнению с длиной волны. Если теперь прорезать в плоскости небольшое отверстие, то поля в окрестности отверстия изменятся и будут проникать через него на другую сторону. Однако на больших расстояниях от отверстия (больших по сравнению с его размерами) поля «вблизи проводящей плоскости» будут такими же, как и в отсутствие отверстия, а именно E_0 будет перпендикулярно, а B_0 — параллельно к плоскости. Линии электрического поля будут иметь вид, показанный на фиг. 9.12. Так как поля E и B отличаются от их невозмущенных значений E_0 и B_0 только в области, размеры которой малы по сравнению с длиной волны, то задача определения E и B вблизи отверстия сводится к задаче электростатики или магнитостатики (если отвлечься от синусоидальной зависимости

сти от времени вида $e^{-i\omega t}$). Для электрического поля это стандартная задача нахождения распределения потенциала при известной «асимптотической» величине \mathbf{E} на обеих сторонах идеально проводящей пластины, служащей эквипотенциальной поверхностью. Аналогично магнитное поле \mathbf{B} должно быть найдено по заданным асимптотическим величинам, равным \mathbf{B}_0 на одной стороне и нулю на другой стороне поверхности, и условию отсутствия нормальной составляющей на поверхности. После этого можно определить электрическое поле, обусловленное изменением во времени магнитного поля \mathbf{B} , и, сложив его с «электростатическим» электрическим полем, найти полное электрическое поле вблизи отверстия.

Например, для случая круглого отверстия радиусом a , малым по сравнению с длиной волны, тангенциальная составляющая электрического поля в плоскости отверстия оказывается равной

$$\mathbf{E}_{||} = E_0 \frac{\mathbf{q}}{\pi \sqrt{a^2 - q^2}} + \frac{2ik}{\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0) \sqrt{a^2 - q^2}, \quad (9.114)$$

где $E_0 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}$ — амплитуда нормальной составляющей электрического поля в отсутствие отверстия, \mathbf{B}_0 — тангенциальная составляющая магнитного поля в отсутствие отверстия, \mathbf{n} — единичный вектор нормали, направленный в дифракционную область [как в (9.82)], а \mathbf{q} — радиус-вектор в плоскости отверстия, проведенный из его центра. Найденное в статическом приближении поле (9.114) позволяет сразу определить дифракционные поля с помощью формулы (9.82). Этот расчет для круглого отверстиянесен нами к задачам в конце главы (см. задачи 9.10 и 9.11).

§ 10. Рассеяние коротких волн проводящей сферой

Другим типом дифракционных задач является расчет рассеяния волн на препятствиях. Мы рассмотрим рассеяние плоской электромагнитной волны на идеально проводящем препятствии, размеры которого велики по сравнению с длиной волны. Для тонкого плоского препятствия можно применить метод, изложенный в § 8, возможно, в сочетании с принципом Бабине. Однако для препятствий иной формы необходимо исходить из векторной теоремы (9.77). Если мы ограничимся лишь полями в волновой зоне ($kr \gg 1$), то выражение (9.77) для рассеянного поля \mathbf{E}_s примет вид

$$\mathbf{E}_s \approx \frac{e^{ikr}}{4\pi ir} \int_{S_1} [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s) \times \mathbf{k} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_s) \mathbf{k} - k(\mathbf{n} \times \mathbf{B}_s)] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} da', \quad (9.115)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор рассеянной волны, а S_1 — поверхность

препятствия. Несколько проще рассчитывается магнитное поле $\mathbf{B}_s = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_s)/k$:

$$\mathbf{B}_s \approx \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \mathbf{k} \times \int_{S_1} \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s) \times \frac{\mathbf{k}}{k} - \mathbf{n} \times \mathbf{B}_s \right] e^{-ik \cdot \mathbf{x}'} da'. \quad (9.116)$$

Поскольку мы не знаем точных значений полей \mathbf{E}_s и \mathbf{B}_s на поверхности препятствия, приходится делать некоторые допущения. Для малых по сравнению с размерами препятствия длин волн поверхность можно приближенно разделить на *освещенную* и *теневую* области¹⁾. Граница между этими областями является резкой только в предельном случае геометрической оптики. Можно показать, что переходная область имеет ширину порядка $(2/kR)^{1/3}R$, где R — характерный радиус кривизны поверхности. Так как R имеет величину порядка размеров препятствия, то для достаточно коротких волн приближенно выполняются условия применимости геометрической оптики. В области тени рассеянное поле у поверхности должно быть почти равно по величине и противоположно по направлению падающему полю. В освещенной области тангенциальная составляющая электрического поля и нормальная составляющая магнитного поля на поверхности должны быть равны и противоположно направлены по отношению к соответствующим составляющим падающего поля (чтобы удовлетворялись граничные условия на поверхности идеально проводящего препятствия). С другой стороны, тангенциальная составляющая \mathbf{B}_s и нормальная составляющая \mathbf{E}_s в освещенной области должны быть приближенно равны соответствующим составляющим в падающей волне (как и в случае бесконечной плоской проводящей пластины) в силу принятого предположения о малости длины волны по сравнению с радиусом кривизны поверхности. Таким образом, мы получаем следующие приближенные значения рассеянных полей на поверхности препятствия:

Теневая область

$$\mathbf{E}_s \approx -\mathbf{E}_i,$$

$$\mathbf{B}_s \approx -\mathbf{B}_i,$$

Освещенная область

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_s = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_i,$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{B}_s \approx \mathbf{n} \times \mathbf{B}_i,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_s \approx \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i,$$

где \mathbf{E}_i и \mathbf{B}_i — поля падающей волны. Используя эти граничные значения, мы можем следующим образом записать выражение

¹⁾ Очень похожая трактовка рассеяния скалярных волн на сфере дана в книге Морса и Фешбаха [77].

(9.116) для магнитного поля:

$$\mathbf{B}_s \approx \frac{e^{ikr}}{4\pi i r} \mathbf{k} \times (\mathbf{F}_{\text{тн}} + \mathbf{F}_{\text{осв}}). \quad (9.117)$$

Здесь

$$\mathbf{F}_{\text{тн}} = \int_{\text{тн}} \left[\frac{\mathbf{k}}{k} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i) + \mathbf{n} \times \mathbf{B}_i \right] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} da' \quad (9.118)$$

и

$$\mathbf{F}_{\text{осв}} = \int_{\text{осв}} \left[\frac{\mathbf{k}}{k} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i) - \mathbf{n} \times \mathbf{B}_i \right] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} da' \quad (9.119)$$

соответственно интегралы по теневой и освещенной областям.

Если падает плоская волна с волновым вектором \mathbf{k}_0 , т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}}, \\ \mathbf{B}_i(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{k}_0}{k_0} \times \mathbf{E}_i(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (9.120)$$

то интегралы по теневой и освещенной областям поверхности препятствия принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{тн}} &= \frac{1}{k} \int_{\text{тн}} [(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{k}_0] e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}'} da'. \\ \mathbf{F}_{\text{осв}} &= \frac{1}{k} \int_{\text{осв}} [(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{k}_0] e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}'} da'. \end{aligned} \quad (9.121)$$

Эти интегралы по-разному зависят от угла рассеяния. В предельном случае коротких волн величины $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'$ и $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}'$ велики по сравнению с единицей. Поэтому экспоненциальные множители в (9.121) быстро меняются, и, следовательно, средние значения подынтегральных выражений очень малы для всех направлений, кроме $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0$. В направлении $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0$ вторые члены в $\mathbf{F}_{\text{тн}}$ и $\mathbf{F}_{\text{осв}}$ несущественны, поскольку рассеянное поле (9.117) пропорционально $\mathbf{k} \times \mathbf{F}$. Таким образом, поведение рассеянного поля, по крайней мере в прямом направлении, определяется первыми членами выражения (9.121). Мы видим, что $\mathbf{F}_{\text{тн}}$ и $\mathbf{F}_{\text{осв}}$ пропорциональны соответственно $(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)$, поэтому интеграл по области тени конечен, а интеграл по освещенной области стремится к нулю. При отклонении угла рассеяния от направления падающей волны интеграл по области тени быстро стремится к нулю как из-за экспоненциального множителя, так и из-за векторного множителя в подынтегральном выражении. Наборот, интеграл по освещенной области мал в прямом направлении; по-видимому, он должен быть малым и для всех других направлений благодаря тому, что экспоненциальный и векторный множи-

тели меняются в противоположных направлениях. Очевидно, интеграл по области тени дает дифрагированное поле, а интеграл по освещенной области дает отраженную волну.

Чтобы продвинуться дальше, мы должны конкретизировать форму препятствия. Пусть препятствием является идеально проводящая сфера радиусом a . Так как интеграл по области тени имеет заметную величину только в направлении падения волны, мы при его вычислении положим приближенно $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ всюду, кроме показателя экспоненты. Отбрасывая второй член в (9.121) и используя сферические координаты на поверхности сферы, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{тн}} \approx -2E_0 a^2 \int_0^{\pi/2} da \sin \alpha \cos \alpha \exp [ika(1 - \cos \theta) \cos \alpha] \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\beta \exp [-ika \sin \theta \sin \alpha \cos(\beta - \varphi)]. \end{aligned} \quad (9.122)$$

Углы θ , φ и α , β — сферические угловые координаты векторов \mathbf{k} и \mathbf{n} , отсчитываемые от направления \mathbf{k}_0 . Экспоненту, содержащую в показателе множитель $(1 - \cos \theta)$, можно для малых углов θ положить равной единице. В результате интегрирования по β получаем $2\pi J_0(ka \sin \theta \sin \alpha)$. Следовательно,

$$\mathbf{F}_{\text{тн}} \approx -4\pi a^2 E_0 \int_0^{\pi/2} J_0(ka \theta \sin \alpha) \cos \alpha \sin \alpha da, \quad (9.123)$$

где $\sin \theta$ приближенно заменен на θ . Интеграл по α легко берется, так как

$$\int_0^{ka\theta} x J_0(x) dx = ka\theta J_1(ka\theta).$$

Таким образом, для интеграла по области тени получаем

$$\mathbf{F}_{\text{тн}} \approx -4\pi^2 a E_0 \frac{J_1(ka\theta)}{ka\theta}. \quad (9.124)$$

Мы видим, что рассеянное поле, по существу, совпадает с дифракционным полем для круглого отверстия [см. (9.102)].

Несколько сложнее вычисляется интеграл по освещенной области, дающий отраженное поле. Здесь мы должны рассматривать произвольные углы рассеяния, поскольку усиления в прямом направлении теперь не происходит. Интеграл содержит сравнительно медленно меняющуюся векторную функцию, умноженную на быстро меняющуюся экспоненту. Как известно, основной вклад

в такой интеграл дает область интегрирования, в которой фаза экспоненты стационарна. Эта фаза равна

$$f(a, \beta) = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}' = ka [(1 - \cos \theta) \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \cos(\beta - \varphi)]. \quad (9.125)$$

Легко видеть, что точка экстремума фазы соответствует углам

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}, \\ \beta_0 &= \varphi. \end{aligned} \quad (9.126)$$

Это, очевидно, углы отражения от сферы по законам геометрической оптики. В точке экстремума единичный вектор \mathbf{n} направлен вдоль $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$. Разложение фазы в окрестности $a = a_0$, $\beta = \beta_0$ имеет вид

$$f(a, \beta) = -2ka \sin \frac{\theta}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \dots \right], \quad (9.127)$$

где $x = a - a_0$, $y = \beta - \beta_0$. Для расчета интеграла (9.121) можно приближенно в предэкспоненциальном множителе положить $a = a_0$, $\beta = \beta_0$; тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{осв}} &\approx a^2 \sin \theta [2\mathbf{n}_0(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0] \exp \left(-2ika \sin \frac{\theta}{2} \right) \times \\ &\times \int dx \exp \left[i \left(ka \sin \frac{\theta}{2} \right) x^2 \right] \int dy \exp \left[i \left(ka \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) y^2 \right]; \end{aligned} \quad (9.128)$$

здесь \mathbf{n}_0 — единичный вектор в направлении $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$. При не слишком малом θ члены с экспонентами очень быстро осциллируют при больших x и y . Поэтому мы не сделаем существенной ошибки, если в обоих интегралах будем интегрировать по бесконечному интервалу от $-\infty$ до $+\infty$. Используя формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2} dx = \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^{1/2} e^{i\pi/4}, \quad (9.129)$$

получаем

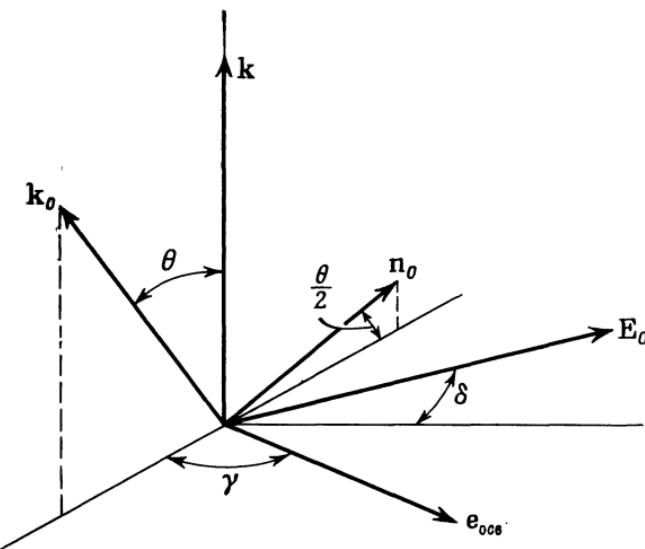
$$\mathbf{F}_{\text{осв}} \approx i \frac{2\pi a}{k} e^{-2ika \sin(\theta/2)} [2(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{n}_0 - \mathbf{E}_0]. \quad (9.130)$$

После некоторых преобразований вклад в рассеянное поле от интеграла по освещенной части сферы можно представить в виде

$$\mathbf{E}_s^{(\text{осв})} \approx -\frac{a}{2} \mathbf{E}_0 \frac{e^{ikr}}{r} e^{-2ika \sin(\theta/2)} \mathbf{e}_{\text{осв}}. \quad (9.131)$$

Направление вектора поляризации $\mathbf{e}_{\text{осв}}$ показано на фиг. 9.13. Если вектор поляризации падающей волны \mathbf{E}_0 образует угол δ

с нормалью к плоскости, содержащей волновые векторы \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 , то азимутальный угол γ вектора $\mathbf{e}_{\text{осв}}$, отсчитываемый от плоскости, содержащей \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 , равен $\gamma = (\pi/2) - \delta$. Заметим, что амплитуда отраженного поля (9.131) не зависит от угла отражения, хотя его фаза — быстро меняющаяся функция угла.



Фиг. 9.13. Поляризация отраженной волны по отношению к падающей.

Рассеянное электрическое поле, обусловленное интегрированием по области тени, согласно (9.124) и (9.117), запишется как

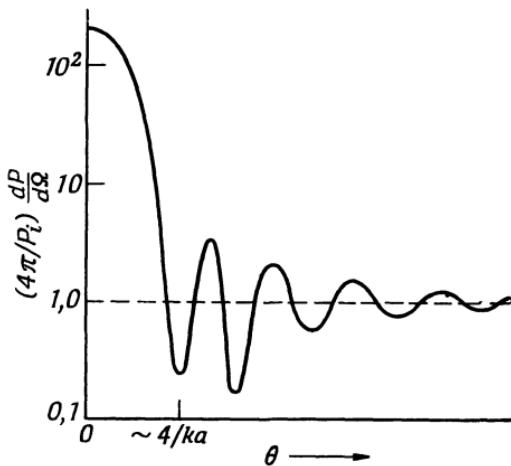
$$\mathbf{E}_s^{\text{TH}} \approx ika^2 \frac{J_1(ka\theta)}{ka\theta} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \times \mathbf{k}}{k^2}. \quad (9.132)$$

Сравнение выражений (9.131) и (9.132) показывает, что в прямом направлении «теневое» поле больше в $ka \gg 1$ раз. Однако для углов $\theta \gg 1/ka$ «теневое» поле становится очень малым, и доминирующим оказывается изотропное отраженное поле. Мощность, рассеиваемую в единицу телесного угла, можно представить в виде

$$\frac{dP_s}{d\Omega} \approx P_i \begin{cases} \frac{(ka)^2}{4\pi} \left| \frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta} \right|^2, & \theta \ll \frac{1}{ka}, \\ \frac{1}{4\pi}, & \theta \gg \frac{1}{ka}, \end{cases} \quad (9.133)$$

где $P_i = cE_0^2a^2/8$ — поток мощности падающей волны, приходящийся на сечение сферы πa^2 . При малых углах рассеяния мы имеем типичную дифракционную картину [см. (9.113)]. При больших углах рассеяние изотропно. При промежуточных значениях углов рассеяния происходит интерференция обоих полей и возникают

резкие минимумы рассеянной мощности, так что в некоторых направлениях мощность оказывается значительно меньше, чем в изотропной области (фиг. 9.14). Характер интерференционной картины зависит от ориентации вектора поляризации падающей волны по отношению к плоскости наблюдения, содержащей \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 . В том случае, когда вектор \mathbf{E}_0 лежит в этой плоскости, интерференция выражена значительно сильнее, чем в случае, когда вектор \mathbf{E}_0 перпендикулярен ей¹⁾.



Фиг. 9.14. Диаграмма рассеяния на проводящей сфере.

Видны максимум в прямом направлении, обусловленный рассеянием в области тени, изотропное распределение отраженного излучения и интерференционные максимумы и минимумы.

Полная рассеянная мощность получается интегрированием по всем углам. Если пренебречь интерференционными членами, то полная рассеянная мощность складывается из интеграла по дифракционному максимуму и интеграла от изотропно отраженной части. Легко видеть, что эти интегралы одинаковы по величине, так что

$$P_s = P_i + P_i = 2P_i. \quad (9.134)$$

Этот результат часто формулируют следующим образом: эффективная поверхность сферы (т. е. сечение рассеяния) равна $2\pi a^2$. Одно слагаемое πa^2 обусловлено прямым отражением, а другое связано с дифракционным рассеянием, приводящим к образованию тени за препятствием.

Рассеяние электромагнитных волн на проводящей сфере, в частности для случая длинных волн, рассматривается другим методом в гл. 16, § 9.

¹⁾ Диаграммы рассеяния на сфере в функции ka приведены в книге Кинга и У Тай-цзуня [59].

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Простая теория излучения электромагнитных волн источниками, занимающими ограниченную область, рассматривается во всех современных учебниках. Изложение, аналогичное нашему, можно найти в книгах Пановского и Филиппс [78], гл. 13, и Стрэттона [106], гл. 8. Более полные сведения об антенах и антенных системах имеются в технической литературе, в частности в книгах Джордана [57], Крауса [60], Щелкунова [90] и Силвера [95].

Теории дифракции посвящена весьма обширная литература. Исчерпывающее рассмотрение как скалярной, так и векторной теории Кирхгофа с множеством примеров и отличных рисунков дано в книге Борна и Вольфа [16], гл. 8, 9, 11. Более элементарное изложение скалярной теории можно найти в книге Слэтера и Франка [98], гл. 13, 14.

Математические методы решения дифракционных задач рассмотрены в книгах Бекера и Консона [7] и Морса и Фешбаха [77], гл. 11. Векторные теоремы, использованные в § 6—10 настоящей главы, имеются в книгах Морса и Фешбаха [77], гл. 13, Силвера [95], гл. 5, Стрэттона [106], гл. 8. Монография Кинга и У Тай-цзуня [59] специально посвящена рассеянию электромагнитных волн на препятствиях, причем большое внимание уделяется получению полезных численных результатов.

ЗАДАЧИ

9.1. Рассмотреть поток мощности и энергию поля электрического диполя (9.18), выразив их через комплексный вектор Пойнтинга $S = (c/8\pi)(E \times B^*)$ и среднюю по времени плотность энергии $u = (1/16\pi)(E \cdot E^* + B \cdot B^*)$. Действительная часть S дает истинную мощность активных потерь, а мнимая часть представляет собой циркулирующую реактивную мощность.

а) Показать, что действительная часть вектора S направлена по радиусу и дается выражением (9.23), умноженным на r^{-2} .

б) Показать, что мнимая часть S имеет следующие составляющие по r и θ :

$$\operatorname{Im} S_r = \frac{ck}{8\pi r^5} |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta,$$

$$\operatorname{Im} S_\theta = -\frac{ck |\mathbf{p}|^2}{4\pi r^5} (1 + k^2 r^2) \sin \theta \cos \theta.$$

Изобразить схему циркуляции потока мощности с помощью соответственно направленных стрелок, длины которых пропорциональны величине $\operatorname{Im} S$ в данной точке.

в) Вычислить среднюю по времени плотность энергии:

$$u = \frac{1}{16\pi} \frac{|3n(n \cdot p) - p|^2}{r^6} + \frac{k^2 |n \cdot p|^2}{4\pi r^4} + \frac{k^4 |n \times p|^2}{8\pi r^2}.$$

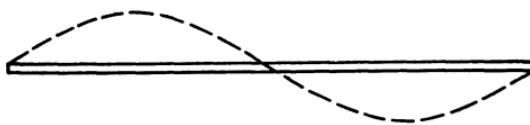
г) Вывести теорему Пойнтинга для комплексного вектора Пойнтинга. Чему равна мнимая часть от $\operatorname{div} S$? Удовлетворяют ли полученному соотношению результаты, найденные в п. «б» и «в».

9.2. Излучающий квадруполь представляет собой квадрат со стороной a , в углах которого последовательно размещены заряды q и $-q$. Квадрат вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр. Рассчитать квадрупольный момент,

излучаемые поля, угловое распределение излучения и полную мощность излучения в приближении длинных волн.

9.3. Две полусферические идеально проводящие металлические оболочки радиусом R разделены очень тонким изолирующим промежутком. К ним приложено переменное напряжение, так что потенциалы полусфер равны $\pm V \cos \omega t$. В приближении длинных волн найти поля излучения, угловое распределение излучаемой мощности и полную мощность, излучаемую сферой.

9.4. Тонкая линейная антenna длиной d возбуждается таким образом, что на ее длине укладывается полный период синусоиды тока, как показано на фиг. 9.15.



Ф и г. 9.15.

а) Произвести точный расчет мощности, излучаемой в единичный телесный угол, и построить график углового распределения излучения.

б) Определить полную мощность излучения и найти численную величину сопротивления излучения.

9.5. Рассмотреть линейную antennу задачи 9.4, используя метод разложения по мультипольям в приближении длинных волн.

а) Рассчитать мультипольные моменты (электрический дипольный, магнитный дипольный и электрический квадрупольный).

б) Сравнить угловое распределение для низшего неисчезающего мультиполя с точным распределением, полученным в задаче 9.4.

в) Определить полную мощность излучения для низшего мультиполя и соответствующее сопротивление излучения.

9.6. Идеально проводящий плоский экран занимает половину плоскости xy (именно $x < 0$). Плоская волна с интенсивностью I_0 и волновым числом k падает вдоль z из области $z < 0$. Рассмотреть величину дифрагированных полей в плоскости $z = Z > 0$, параллельной плоскости xy . Пусть координаты точки наблюдения будут $(X, 0, Z)$.

а) Показать, что обычное скалярное приближение Кирхгофа для $Z \gg X$ приводит к дифрагированному полю

$$\psi(X, 0, Z) \approx I_0^{1/2} e^{ikZ - i\omega t} \left(\frac{1+i}{2i} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\xi}^{\infty} e^{it^2} dt,$$

где $\xi = (k/2Z)^{1/2}X$.

б) Показать, что интенсивность можно записать в виде

$$I = |\psi|^2 = \frac{I_0}{2} \left[\left(C(\xi) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(S(\xi) + \frac{1}{2} \right)^2 \right],$$

где $C(\xi)$ и $S(\xi)$ — так называемые интегралы Френеля. Найти асимптотическое поведение I для больших положительных ξ (освещенная область) и больших отрицательных ξ (область тени). Чему равна величина I при $X = 0$? Построить графики зависимости I от X при фиксированном Z .

в) С помощью векторной формулы (9.82) получить результаты, эквивалентные п. «а». Сравнить оба полученных выражения.

9.7. Линейно поляризованная плоская волна с амплитудой E_0 и волновым числом k падает на круглое отверстие радиусом a в идеально проводящем плоском экране. Волновой вектор падающей волны образует угол α с нормалью к экрану. Волна поляризована перпендикулярно плоскости падения.

а) Рассчитать дифрагированное поле и мощность проходящего излучения в единице телесного угла с помощью векторной формулы Кирхгофа (9.82), предполагая, что тангенциальное электрическое поле в отверстии равно невозмущенному падающему полю.

б) Сравнить результат п. «а» с обычным скалярным приближением Кирхгофа и с результатами § 8, относящимися к случаю, когда плоскость поляризации совпадает с плоскостью падения.

9.8. В плоском идеально проводящем листе, расположеннном в плоскости xy , имеется прямоугольное отверстие со сторонами a и $b \geq a$, ограниченное прямыми $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$. Вектор поляризации нормально падающей плоской волны направлен под углом β к длинной стороне отверстия.

а) Рассчитать дифракционное поле и мощность излучения в единице телесного угла с помощью векторного соотношения Кирхгофа (9.82), полагая, что тангенциальное электрическое поле в отверстии равно падающему невозмущенному полю.

б) Получить соответствующий результат с помощью скалярного приближения Кирхгофа.

в) Для случая $a = b$, $\beta = 45^\circ$, $ka = 4\pi$ вычислить в векторном и скалярном приближениях зависимость мощности излучения в единице телесного угла от угла θ при $\phi = 0$. Построить графики и сравнить оба полученных результата.

9.9. Осью цилиндрической коаксиальной линии с внутренним радиусом a и внешним радиусом b является отрицательная ось z . Внутренний и внешний проводники обрываются при $z = 0$, причем внешний цилиндр соединен с бесконечным плоским фланцем, занимающим всю плоскость xy (за исключением круга радиусом b с центром в начале координат). В этой коаксиальной линии возбуждается его основная волна типа ТЕМ с частотой ω и с амплитудой напряжения между цилиндрами V . С помощью векторного приближения Кирхгофа рассчитать поля излучения, угловое распределение излучения и полную излучаемую мощность.

9.10. Рассмотреть дифракцию на малом круглом отверстии радиусом a в плоском идеально проводящем экране в предположении, что $ka \ll 1$.

а) Пусть поле вблизи экрана со стороны падающей волны имеет нормальную составляющую электрического поля $E_0 e^{-i\omega t}$ и тангенциальную составляющую магнитного поля $B_0 e^{-i\omega t}$. Показать, что дифрагированное электрическое поле во фраунгоферовой зоне описывается выражением

$$E = \frac{e^{i\omega r - i\omega t}}{3\pi r} k^2 a^3 \left[2 \frac{k}{k} \times B_0 + \frac{k}{k} \times \left(E_0 \times \frac{k}{k} \right) \right],$$

где k — волновой вектор в направлении наблюдения.

б) Определить угловое распределение дифрагированного излучения и показать, что полная мощность, проходящая через отверстие, равна

$$P = \frac{c}{54\pi^2} k^4 a^6 (4B_0^2 + E_0^2).$$

9.11. Ограничим условия задачи 9.10 случаем дифракции плоской волны на малом круглом отверстии, рассмотреть общий случай наклонного падения под углом α к нормали при поляризации, параллельной и перпендикулярной плоскости падения.

а) Рассчитать угловое распределение дифрагированного излучения и сравнить его с результатами векторного приближения Кирхгофа в § 8 и в задаче 9.7 в предельном случае $ka \ll 1$.

б) Показать, что коэффициенты прохождения [см. (9.105)] для обеих поляризаций имеют соответственно вид

$$T_{\parallel} = \frac{64}{27\pi^2} (ka)^4 \frac{4 + \sin^2 \alpha}{4 \cos \alpha},$$

$$T_{\perp} = \frac{64}{27\pi^2} (ka)^4 \cos \alpha.$$

Заметим, что эти коэффициенты отличаются малым множителем $(ka)^2$ от коэффициентов, получающихся из векторного приближения Кирхгофа для этого случая.