

Глава 10

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА И ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

§ 1. Введение и основные понятия

Магнитогидродинамика и физика плазмы рассматривают поведение проводящей жидкости или газа в электромагнитных полях. Проводимость вещества связана с наличием свободных или почти свободных электронов, которые могут двигаться под действием приложенных полей. В твердом проводнике электроны фактически связаны, но за время между двумя столкновениями они могут сдвигаться на значительные по сравнению с атомными размерами расстояния внутри кристаллической решетки. При наложении полей в твердом теле проявляются такие динамические эффекты, как проводимость и эффект Холла, однако общего движения вещества не возникает. Действие приложенных полей на сами атомы сводится лишь к появлению напряжений в кристаллической решетке. Напротив, в жидкости или газе поля действуют как на электроны, так и на ионы, что приводит к движению всего вещества в целом. Движение вещества в свою очередь вызывает изменение электромагнитного поля. Следовательно, в этом случае мы должны рассматривать совместно взаимодействующую систему вещества и полей.

Между магнитогидродинамикой и физикой плазмы нет резкого различия. Тем не менее имеются определенные области применения идей и методов каждой из них. Для иллюстрации имеющегося различия можно рассмотреть способ вывода соотношения $J = \sigma E$ для проводящей среды. В простой модели, рассмотренной в гл. 7, § 8, мы считали, что приложенное поле ускоряет электроны, а столкновения изменяют направление их движения, так что движению электронов в направлении поля противодействует некоторая эффективная сила трения $vmtv$, где v — частота столкновений. Закон Ома как раз выражает баланс между приложенной силой и силой трения. Если частота приложенного поля сравнима с v , то электроны успевают ускоряться и тормозиться между двумя столкновениями. В этом случае существенна инерция электронов

и проводимость становится комплексной. К сожалению, для таких частот описание эффекта столкновений как тормозящей силы уже становится неприменимым, процесс здесь протекает более сложно. При частотах, значительно больших частоты столкновений, имеет место другое явление. Электроны и ионы, ускоряясь электрическим полем в противоположных направлениях, стремятся разделиться. При разделении зарядов появляются сильные электростатические поля, стремящиеся сблизить заряды, и возникают колебания плотности заряда. Эти высокочастотные колебания называются *плазменными колебаниями*. Они существенно отличаются от низкочастотных колебаний, связанных с перемещениями жидкости или газа, не сопровождающимися разделением зарядов. Низкочастотные колебания называются *магнитогидродинамическими волнами*.

В проводящих жидкостях и ионизованных газах большой плотности частота столкновений достаточно высока даже в случае хорошей проводимости, и поэтому в широкой области частот применим закон Ома в простой форме. Под действием приложенного поля электроны и ионы движутся таким образом, что, если отвлечься от высокочастотных колебаний, разделения зарядов не происходит. Электрическое поле появляется из-за движения жидкости или газа, что обусловливает электрические токи, или же из-за изменения во времени магнитного поля или распределений зарядов, внешних по отношению к рассматриваемой системе. Механическое движение системы может быть описано в этом случае как движение единой проводящей жидкости (газа) с помощью обычных гидродинамических переменных: плотности, скорости и давления. Для низких частот обычно можно пренебречь токами смещения. Такое приближение называется *магнитной гидродинамикой*.

В менее плотных ионизованных газах частота столкновений меньше. При этом еще может оставаться некоторая низкочастотная область, в которой уравнения магнитной гидродинамики применимы к квазистационарным процессам; в частности, это приближение обычно справедливо для астрофизических задач. Однако при больших частотах уже нельзя пренебречь разделением зарядов и токами смещения и при описании движения следует учитывать инерцию электронов и ионов. Эту область мы называем *физикой плазмы*. Здесь иногда применима двухжидкостная модель электронного и ионного газа, которая при выполнении некоторых физических условий дает приблизительно правильное описание ряда явлений. Однако для высоких температур и низких плотностей приходится учитывать наличие разброса скоростей частиц относительно их среднего значения. Корректное рассмотрение производится в этом случае с помощью уравнения Больцмана с учетом или без учета короткомасштабных корреляций. Мы не будем входить здесь в такие детали.

При еще более высоких температурах и низких плотностях электростатические возвращающие силы становятся настолько слабыми, что расстояние, характеризующее разделение зарядов, начинает существенно превосходить размеры системы. При этом уже нельзя говорить о коллективном поведении частиц, подразумеваемом в жидкостной модели. Мы приходим к системе быстро движущихся заряженных частиц, взаимодействующих благодаря кулоновским столкновениям. По определению, ионизованный газ называется плазмой, если некоторый размер, начиная с которого мелкомасштабное индивидуальное поведение частиц заменяется крупномасштабным коллективным поведением, мал по сравнению с характерным размером системы. Этот размер, называемый *дебаевским радиусом экранирования*, будет рассмотрен в § 10. Он численно равен $7,91(T/n)^{1/2}$ см, где T — абсолютная температура в градусах Кельвина, а n — число электронов в 1 см³. Обычно, за исключением случаев очень горячей или очень разреженной плазмы, дебаевский радиус много меньше 1 см.

§ 2. Уравнения магнитной гидродинамики

Начнем с рассмотрения поведения электрически нейтральной проводящей жидкости (газа) в электромагнитном поле. Предположим для простоты, что магнитная проницаемость жидкости μ равна единице. Введем плотность вещества $\rho(x, t)$, скорость $v(x, t)$, давление $p(x, t)$ (которое предполагается скалярным) и действительную проводимость σ . Гидродинамическими уравнениями являются уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0 \quad (10.1)$$

и уравнение движения

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_v + \rho g. \quad (10.2)$$

Кроме градиента давления и электромагнитной силы, мы включили вязкость и гравитационную силу. Для несжимаемой жидкости сила, обусловленная вязкостью, имеет вид

$$\mathbf{F}_v = \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (10.3)$$

где η — коэффициент вязкости. Следует подчеркнуть, что производная по времени от скорости в левой части равенства (10.2) является *материальной производной*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}, \quad (10.4)$$

определенной полную скорость изменения величины, движущейся с мгновенной скоростью \mathbf{v} .

В пренебрежении токами смещения электромагнитные поля в жидкости описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Условие $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, эквивалентное пренебрежению токами смещения, является следствием второго уравнения (10.5). В (10.5) опущены два уравнения для дивергенции полей. Из закона индукции Фарадея следует, что $(\partial/\partial t) \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, так что требование $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ можно принять в качестве начального условия. Поскольку мы пренебрегли токами смещения, то можно также не принимать во внимание закон Кулона, так как электрическое поле полностью определяется уравнениями (10.5) и законом Ома (см. ниже). Учет токов смещения в законе Ампера и уравнения непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi Q_e$ приводит к поправкам порядка v^2/c^2 . Для обычных магнитогидродинамических задач это пренебрежимо малая величина.

Для получения полной системы динамических уравнений необходимо установить связь между плотностью тока \mathbf{J} и полями \mathbf{E} и \mathbf{B} . Для обычной проводящей среды с проводимостью σ справедлив закон Ома, и плотность тока описывается обычным соотношением

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}', \quad (10.6)$$

где \mathbf{J}' и \mathbf{E}' измеряются в системе координат, покоящейся относительно среды. Если жидкость движется со скоростью \mathbf{v} относительно лабораторной системы координат, то мы должны преобразовать плотность тока и электрическое поле к неподвижной системе координат. Преобразование поля определяется уравнением (6.10). Плотность тока в лабораторной системе, очевидно, равна

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' + Q_e \mathbf{v}, \quad (10.7)$$

где Q_e — плотность заряда. Для однокомпонентной проводящей жидкости $Q_e = 0$. Следовательно, закон Ома принимает вид

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (10.8)$$

Иногда эффективную проводимость жидкости можно считать бесконечно большой. Тогда под действием полей \mathbf{E} и \mathbf{B} жидкость движется таким образом, что удовлетворяется соотношение

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (10.9)$$

Уравнения (10.1), (10.2), (10.5) и (10.8), дополненные уравнением состояния жидкости, составляют полную систему уравнений магнитной гидродинамики. В следующем параграфе мы рассмотрим некоторые простые следствия из этих уравнений и введем основные понятия магнитной гидродинамики.

§ 3. Магнитная диффузия, вязкость и давление

Поведение жидкости в электромагнитном поле в значительной мере определяется ее проводимостью; это относится как к электромагнитным, так и к механическим характеристикам. Начнем с электромагнитных эффектов. Как мы увидим ниже, в зависимости от величины проводимости поля ведут себя совершенно различным образом. Производную по времени от магнитного поля после исключения \mathbf{E} с помощью (10.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (10.10)$$

Здесь принято, что σ не зависит от координат. Для покоящейся жидкости (10.10) сводится к уравнению диффузии

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (10.11)$$

Отсюда следует, что начальные значения магнитного поля затухают с характерным временем диффузии

$$\tau = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2}, \quad (10.12)$$

где L — характерный размер пространственного изменения \mathbf{B} . Для медной сферы радиусом 1 см время τ имеет величину порядка 1 сек, для жидкого ядра Земли — порядка 10^4 лет, а для магнитного поля Солнца — порядка 10^{10} лет.

Для времен, малых по сравнению со временем диффузии τ [т. е. в тех случаях, когда проводимость столь велика, что вторым членом в (10.10) можно пренебречь], зависимость магнитного поля от времени определяется уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (10.13)$$

Используя (6.5), можно показать, что это уравнение эквивалентно утверждению о постоянстве во времени магнитного потока через произвольный контур, движущийся вместе с жидкостью. Таким образом, в этом случае силовые линии как бы «вморожены» в вещество и движутся вместе с ним. При бесконечной проводимости скорость \mathbf{w} силовых линий магнитного поля (которая, по опреде-

лению, перпендикулярна \mathbf{B}) равна, согласно (10.9),

$$\mathbf{w} = c \frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{B^2}. \quad (10.14)$$

Этот так называемый электрический дрейф жидкости вместе с силовыми линиями можно объяснить, исходя из свойств траекторий отдельных частиц (электронов и ионов) в скрещенных электрическом и магнитном полях (см. гл. 12, § 8).

Полезной величиной, позволяющей различать состояния, в которых происходит диффузия силовых линий относительно вещества, и состояния, в которых силовые линии вмороожены в вещество, является *магнитное число Рейнольдса* R_M . Если V — характерная скорость задачи, а L — характерная длина, то магнитное число Рейнольдса определяется как

$$R_M = \frac{V\tau}{L}, \quad (10.15)$$

где τ — время диффузии (10.12). Увлечение силовых линий жидкостью преобладает над диффузией при $R_M \gg 1$. Для таких жидкостей, как ртуть и натрий, в лабораторных условиях (за исключением случая очень больших скоростей) $R_M < 1$. Однако в геофизических и астрофизических приложениях R_M может быть очень большим по сравнению с единицей.

Механические свойства системы определяются уравнением движения (10.2). Подставляя в него выражение (10.8) для \mathbf{J} , получаем

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\sigma B^2}{c^2} (\mathbf{v}_\perp - \mathbf{w}), \quad (10.16)$$

где \mathbf{F} — сумма всех неэлектромагнитных сил, а \mathbf{v}_\perp — составляющая скорости, перпендикулярная \mathbf{B} . Из этого уравнения явно видно, что движение вдоль \mathbf{B} происходит под действием только неэлектромагнитных сил. Скорость же движения жидкости, перпендикулярная \mathbf{B} , со временем затухания порядка

$$\tau' = \frac{\rho c^2}{\sigma B^2} \quad (10.17)$$

стремится к стационарной величине

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{w} + \frac{c^2}{\sigma B^2} \mathbf{F}_\perp. \quad (10.18)$$

В пределе бесконечной проводимости, как и следовало ожидать, этот результат сводится к (10.14). Член в (10.16), пропорциональный B^2 , учитывает вязкость, или силу трения, тормозящую движение жидкости в направлении, перпендикулярном силовым линиям магнитного поля. Иногда ее называют магнитной вязкостью.

Если обычная вязкость, входящая в \mathbf{F} , сравнима с магнитной вязкостью, то время затухания τ' уменьшается на очевидный множитель, содержащий отношение обеих вязкостей.

Выше было показано, что при большой проводимости силовые линии магнитного поля вмороожены в жидкость и движутся вместе с ней. Отклонения от этого состояния движения быстро исчезают. При обсуждении механических эффектов мы рассматривали электромагнитные величины как заданные, а при рассмотрении электромагнитных эффектов считали заданными механические величины. В действительности, конечно, уравнения движения и уравнения поля взаимосвязаны. В случае предельно большой проводимости плотность тока в уравнении движения удобно выразить с помощью закона Ампера через магнитное поле \mathbf{B} , а из закона Фарадея с помощью (10.9) исключить \mathbf{E} , что приводит к (10.13). При этом магнитная сила в (10.2) записывается в виде

$$\frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (10.19)$$

С помощью векторного тождества

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (10.20)$$

можно преобразовать равенство (10.19) к виду

$$\frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\operatorname{grad} \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B}. \quad (10.21)$$

Это соотношение показывает, что магнитная сила эквивалентна гидростатическому магнитному давлению

$$p_M = \frac{B^2}{8\pi} \quad (10.22)$$

плюс еще одно слагаемое, которое можно интерпретировать как натяжение вдоль силовых линий. Выражение (10.21) можно также получить из максвелловского тензора натяжений (см. гл. 6, § 9).

Если пренебречь влиянием вязкости и ввести потенциал ψ гравитационных сил ($\mathbf{g} = -\operatorname{grad} \psi$), то уравнение движения (10.2) примет вид

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad}(p + p_M + \varrho\psi) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B}. \quad (10.23)$$

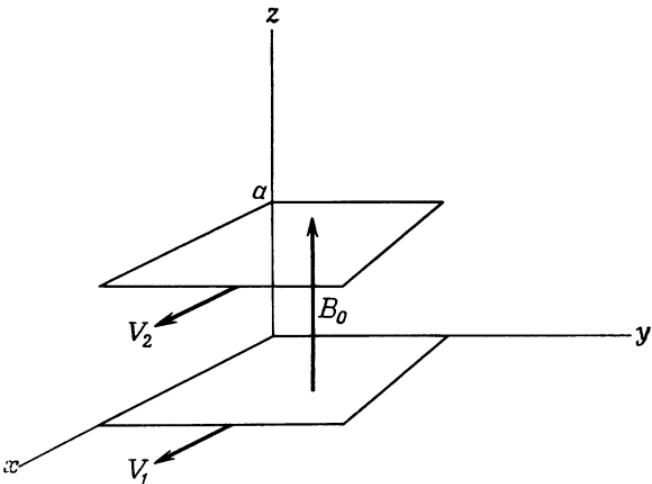
В некоторых простейших случаях, например, когда поле \mathbf{B} имеет только одну декартову составляющую, последний член, связанный с магнитным натяжением, обращается в нуль. В этом случае уравнение статики имеет интеграл

$$p + p_M + \varrho\psi = \text{const.} \quad (10.24)$$

Отсюда следует, что если не учитывать гравитационных эффектов, то любые изменения гидростатического давления должны быть сбалансированы изменениями магнитного давления. Если, например, жидкость должна быть локализована внутри некоторого объема, так что p быстро спадает до нуля вне этого объема, то магнитное давление должно столь же быстро возрастать к периферии. На этом основан пинч-эффект, рассмотренный в § 5.

§ 4. Магнитогидродинамический поток между границами в скрещенных электрическом и магнитном полях

Для иллюстрации конкурирующего влияния эффектов вмораживания силовых линий и диффузии поперек силовых линий, а также влияния граничных условий на электрический дрейф рассмотрим несжимаемую вязкую проводящую жидкость, движущуюся вдоль оси x между двумя непроводящими плоскостями $z = 0$ и $z = a$ (фиг. 10.1). Граничные плоскости движутся со скоростями V_1 и V_2 в x -направлении. Однородное магнитное поле B_0



Фиг. 10.1. Течение вязкой проводящей жидкости в магнитном поле между двумя плоскостями, движущимися с различными скоростями.

направлено вдоль оси z . В x - и y -направлениях система считается бесконечной. Будем искать стационарное решение для потока, направленного вдоль оси x , причем все переменные зависят только от z .

Если поля не меняются во времени, то из уравнений Maxwella (10.5) следует, что электрическое поле является электростатическим потенциальным полем и полностью определяется граничными

условиями, т. е. представляет собой произвольное внешнее поле. Из выражения (10.14) для скорости силовых линий при бесконечной проводимости σ следует, что должно существовать электрическое поле, направленное вдоль оси y . Если мы предположим, что имеется только одна эта составляющая поля E , то она должна быть постоянной; обозначим ее через E_0 . Поскольку движущаяся жидкость увлекает силовые линии, мы вправе ожидать, что наряду с z -составляющей B_0 магнитного поля появится также и его x -составляющая $B_x(z)$.

Для несжимаемой жидкости уравнение непрерывности имеет вид $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Оно удовлетворяется автоматически, если скорость направлена вдоль оси x и зависит только от z . Если пренебречь силой тяжести, то уравнение движения для стационарного течения имеет вид

$$\operatorname{grad} p = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (10.25)$$

Отлична от нуля только одна составляющая \mathbf{J} , а именно

$$J_y(z) = \sigma \left[E_0 - \frac{1}{c} B_0 v(z) \right], \quad (10.26)$$

где v — скорость вдоль оси x . Выпишем уравнение (10.25) для каждой из его составляющих:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\sigma B_0}{c} \left(E_0 - \frac{B_0}{c} v \right) + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= - \frac{\sigma B_0}{c} \left(E_0 - \frac{B_0}{c} v \right). \end{aligned} \quad (10.27)$$

В z -направлении градиент давления полностью уравновешивается магнитной силой. Предположим, что в x -направлении отсутствует перепад давления, тогда первое из этих уравнений примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \left(\frac{M}{a} \right)^2 v = \left(\frac{M}{a} \right)^2 \frac{c E_0}{B_0}, \quad (10.28)$$

где

$$M = \left(\frac{\sigma B_0^2 a^2}{\eta c^2} \right)^{1/2} \quad (10.29)$$

называется *числом Гартмана*. Как видно из (10.17), величина M^2 равна отношению магнитной вязкости к обычной. Решение уравнения (10.28), удовлетворяющее граничным условиям $v(0) = V_1$ и

$v(a) = V_2$, легко может быть найдено

$$v(z) = \frac{V_1}{\operatorname{sh} M} \operatorname{sh} \left(M \frac{a-z}{a} \right) + \frac{V_2}{\operatorname{sh} M} \operatorname{sh} \left(M \frac{z}{a} \right) + \\ + \frac{cE_0}{B_0} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \left(M \frac{a-z}{a} \right) + \operatorname{sh} \left(M \frac{z}{a} \right)}{\operatorname{sh} M} \right]. \quad (10.30)$$

В пределе $B_0 \rightarrow 0$, $M \rightarrow 0$ получаем известное решение для ламинарного потока

$$v(z) = V_1 + (V_2 - V_1) \frac{z}{a}. \quad (10.31)$$

В другом предельном случае $M \gg 1$ следует ожидать, что преобладающей будет магнитная вязкость и что течение должно почти полностью определяться электрическим дрейфом. Для $z \ll a$ и $M \gg 1$ получаем

$$v(z) \approx \frac{cE_0}{B_0} + \left(V_1 - \frac{cE_0}{B_0} \right) e^{-Mz/a}. \quad (10.32)$$

Отсюда видно, что скорость $v(z)$, равная V_1 на поверхности $z = 0$, быстро (на интервале порядка a/M) достигает дрейфовой скорости cE_0/B_0 . Вблизи поверхности $z = a$ выражение для $v(z)$ получается из (10.32) заменой V_1 на V_2 и z на $a - z$. Профили скоростей для обоих предельных случаев (10.31) и (10.32) показаны на фиг. 10.2.

Магнитное поле $B_x(z)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} J_y = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(E_0 - \frac{1}{c} B_0 v \right). \quad (10.33)$$

Чтобы сформулировать граничные условия для B_x при $z = 0$ и $z = a$, необходимо либо знать предысторию процесса установления стационарного течения, либо исходить из определенных условий симметрии. Мы можем лишь связать разность значений B_x с полным током вдоль оси y , приходящимся на единицу длины вдоль оси x :

$$B_x(a) - B_x(0) = \frac{4\pi}{c} \int_0^a J_y(z) dz. \quad (10.34)$$

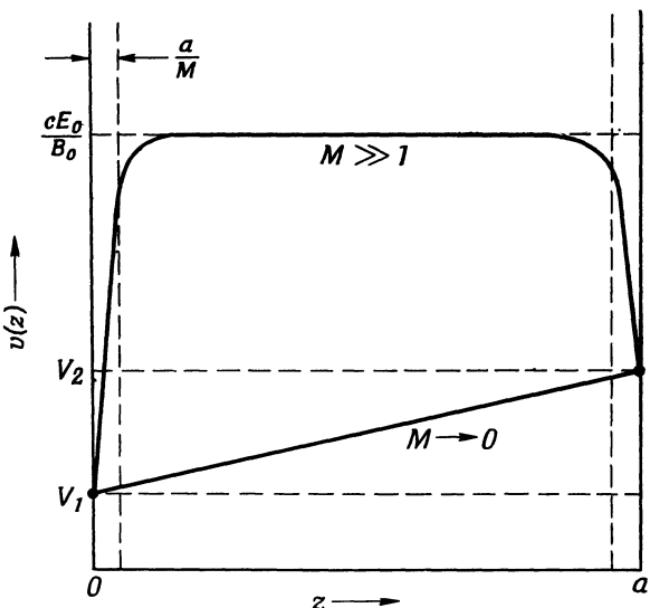
Такая неопределенность свойственна одномерным задачам. Ограничимся для простоты расчетом магнитного поля лишь для случая, когда полный ток по оси y равен нулю¹⁾. В этом случае мы можем

¹⁾ Это условие означает, что $cE_0/B_0 = 1/2(V_1 + V_2)$.

принять, что B_x обращается в нуль при $z = 0$ и $z = a$. С учетом (10.30) уравнение (10.33) дает

$$B_x(z) = B_0 \left[\left(\frac{4\pi\sigma a^2}{c^2} \right) \left(\frac{V_2 - V_1}{2a} \right) \right] \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{M}{2} - \operatorname{ch} \left(\frac{M}{2} - \frac{Mz}{a} \right)}{M \operatorname{sh}(M/2)} \right\}. \quad (10.35)$$

Безразмерный коэффициент в квадратных скобках в (10.35) можно отождествить с магнитным числом Рейнольдса (10.15), поскольку



Фиг. 10.2. Профили скоростей для больших и малых чисел Гартмана M . При $M \rightarrow 0$ течение становится ламинарным. При $M \gg 1$ скорость потока равна скорости электрического дрейфа, за исключением областей, непосредственно примыкающих к границам.

$(V_2 - V_1)/2$ является характерной скоростью задачи, а a — характерной длиной. В предельных случаях $M \ll 1$ и $M \gg 1$ выражение (10.35) принимает вид

$$B_x(z) \approx R_M B_0 \begin{cases} \frac{z}{a} \left(1 - \frac{z}{a} \right) & \text{для } M \ll 1, \\ \frac{1}{M} [1 - (e^{-Mz/a} + e^{-M(a-z)/a})] & \text{для } M \gg 1. \end{cases} \quad (10.36)$$

На фиг. 10.3 показан вид силовых линий в этих предельных случаях. Заметное увлечение силовых линий наблюдается только при больших R_M , а при заданном R_M увлечение тем меньше, чем большее число Гартмана.

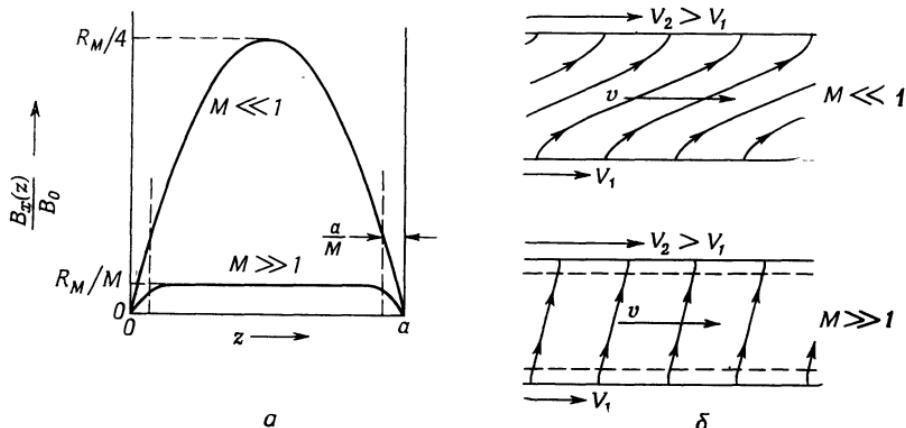
Для ртути при комнатной температуре

$$\sigma = 9,4 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1},$$

$$\eta = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ пуз},$$

$$\rho = 13,5 \text{ г/см}^3.$$

Время диффузии τ [см. (10.12)] равно $1,31 \cdot 10^{-4} L^2$ сек, если размер L выражен в сантиметрах. Число Гартмана M [см. (10.29)] равно $2,64 \cdot 10^{-2} aB_0$, если поле B_0 выражено в гауссах, а a — в сантиметрах. При $L \approx a \approx 1$ см магнитное число Рейнольдса R_M



Фиг. 10.3. Продольная составляющая магнитного поля между граничными поверхностями при больших и малых числах Гартмана (а) и увлечение силовых линий магнитного поля в направлении потока (б).

примерно равно $10^{-4} V$. Следовательно, если скорости потока не слишком велики, то в лабораторных экспериментах со ртутью не происходит сколь-нибудь значительного увлечения силовых линий. Если же магнитное поле B_0 имеет величину порядка 10^4 гаусс, то $M \sim 250$ и скорость потока почти полностью определяется электрическим дрейфом (10.14). В геомагнитных процессах в земном ядре и в астрофизических задачах параметры (например, характерный размер) таковы, что R_M часто много больше единицы и, следовательно, увлечение силовых линий весьма существенно.

§ 5. Пинч-эффект

Удержание плазмы или проводящей жидкости ее собственным магнитным полем представляет значительный интерес для проблемы управляемых термоядерных реакций, а также для других приложений. Для примера рассмотрим бесконечный цилиндр проводящей жидкости, по которому течет продольный ток с плотностью

$J_z = J(r)$, создающий азимутальное магнитное поле $B_\varphi = B(r)$. Для простоты будем считать, что плотность тока, магнитное поле, давление и т. п. зависят только от расстояния r от оси цилиндра, а вязкость и гравитационные эффекты пренебрежимо малы. Рассмотрим сначала, возможно ли стационарное состояние, при котором плазма удерживается в основном внутри цилиндра с некоторым радиусом $r = R$ за счет своего собственного магнитного поля. Для стационарного состояния с $v = 0$ уравнение движения жидкости (10.23) принимает вид

$$0 = -\frac{dp}{dr} - \frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{B^2}{4\pi r}. \quad (10.37)$$

Закон Ампера в интегральной форме связывает $B(r)$ с током, протекающим по окружности радиусом r :

$$B(r) = \frac{4\pi}{cr} \int_0^r r J(r) dr. \quad (10.38)$$

Целый ряд результатов можно получить без конкретизации вида зависимости $J(r)$, используя лишь такие физические требования, как конечность и т. п. Из закона Ампера следует, что если жидкость находится почти целиком внутри цилиндра $r = R$, то магнитное поле вне жидкости равно

$$B(r) = \frac{2I}{cr}, \quad (10.39)$$

где величина

$$I = \int_0^R 2\pi r J(r) dr$$

представляет собой полный ток, протекающий внутри цилиндра. Уравнение (10.37) можно переписать в виде

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{8\pi r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) \quad (10.40)$$

или в проинтегрированном виде

$$p(r) = p_0 - \frac{1}{8\pi} \int_0^r \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) dr. \quad (10.41)$$

Здесь p_0 — давление жидкости на оси цилиндра ($r = 0$). Если вещество сосредоточено в цилиндре $r = R$, то при $r = R$ давление равно нулю. Следовательно, давление p_0 на оси запишется сле-

дующим образом:

$$p_0 = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) dr. \quad (10.42)$$

Верхний предел интеграла можно заменить на бесконечность, поскольку, согласно (10.39), подынтегральное выражение при $r \geq R$ равно нулю. Подставляя (10.42) в (10.41), получаем

$$p(r) = \frac{1}{8\pi} \int_r^R \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) dr. \quad (10.43)$$

При произвольной зависимости $p(r)$ давления от радиуса среднее давление внутри цилиндра можно связать с полным током I и радиусом цилиндра R . Действительно, интегрируя по частям выражение для среднего давления

$$\langle p \rangle = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R r p(r) dr \quad (10.44)$$

и используя (10.40), получаем соотношение

$$\langle p \rangle = \frac{I^2}{2\pi R^2 c^2}, \quad (10.45)$$

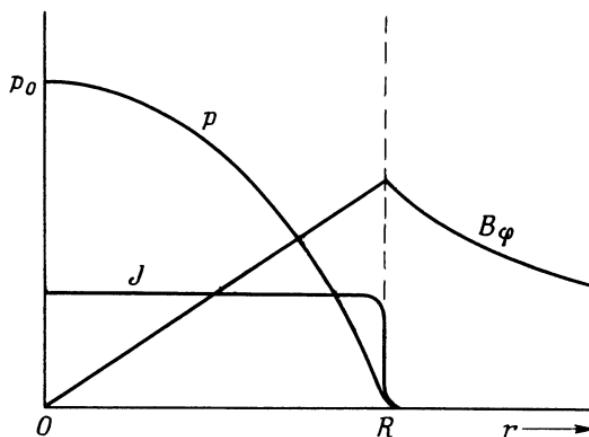
связывающее среднее давление, полный ток и радиус цилиндра жидкости или плазмы, удерживаемой собственным магнитным полем. Заметим, что среднее давление вещества оказывается равным магнитному давлению $B^2/8\pi$ на поверхности цилиндра. В термоядерных исследованиях рассматривается горячая плазма с температурой порядка 10^8 К ($kT \sim 10$ кэВ) и плотностью частиц порядка 10^{15} см⁻³. При этих условиях давление приближенно равно $10^{15} \cdot 10^8 k \approx 1,4 \cdot 10^7$ дин/см², или 14 атм. Для удержания такой плазмы требуется магнитное поле на поверхности порядка $19 \cdot 10^3$ гаусс, что соответствует току $9 \cdot 10^4 R$ а. Отсюда видно, что для удержания горячей плазмы необходимы очень большие токи.

До сих пор мы не рассматривали радиального распределения характеристик жидкости. Мы ограничимся для иллюстрации двумя простыми примерами. Пусть сначала плотность тока $J(r)$ постоянна при $r < R$. Тогда $B(r) = 2Ir/cR^2$ при $r < R$ и выражение (10.43) приводит к параболическому распределению давления в зависимости от радиуса

$$p(r) = \frac{I^2}{\pi c^2 R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (10.46)$$

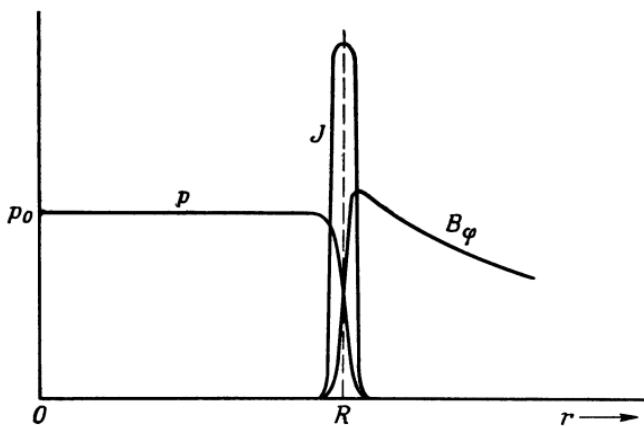
При этом давление p_0 на оси равно удвоенному среднему давлению $\langle p \rangle$. Радиальные зависимости этих величин схематически показаны на фиг. 10.4.

В качестве второго примера рассмотрим цилиндр с током, текущим в очень тонком поверхностном слое, что соответствует жидкости или плазме с большой проводимостью. Магнитное поле вне



Фиг. 10.4. Радиальная зависимость азимутального магнитного поля и давления в цилиндрическом плазменном столбе при однородной плотности продольного тока.

цилиндра определяется выражением (10.39), а внутри цилиндра равно нулю. В этом случае давление внутри вещества постоянно и равно значению (10.45). Соответствующие распределения показаны на фиг. 10.5.

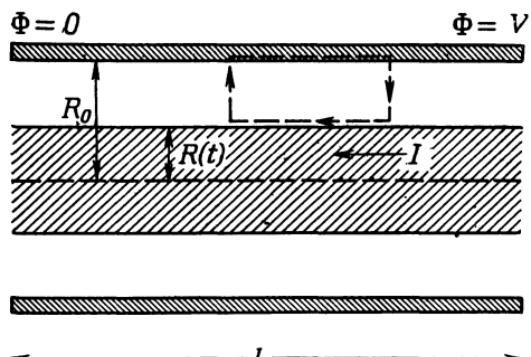


Фиг. 10.5. Радиальная зависимость азимутального магнитного поля и давления в цилиндрическом плазменном столбе с поверхностным током.

§ 6. Динамическая модель пинч-эффекта

Простое рассмотрение, проведенное в § 5 настоящей главы, применимо в статическом или квазистатическом случае. В действии

тельности такие условия не реализуются. Обычно сначала давление плазмы слишком мало, чтобы противостоять внешнему магнитному давлению. Из-за этого радиус плазменного цилиндра уменьшается, т. е. происходит сжатие плазменного столба (пинч-эффект). Таким образом достигается желаемый результат — отжатие плазмы от ограничивающих ее стенок. Если бы сжатый плазменный столб был устойчив в течение достаточно длительного времени, то плазму можно было бы нагреть до очень высокой температуры, не повредив при этом стенок камеры.



Фиг. 10.6. Плазменный столб внутри полого цилиндрического проводника.

Розенблют предложил простую модель процесса сжатия, учитывающую его динамический характер. Предположим, что плазма создана в полом проводящем цилиндре радиусом R_0 и длиной L . К концам цилиндра приложена разность потенциалов V , так что по плазме течет ток I . Ток создает азимутальное магнитное поле B_φ , заставляющее плазму сжиматься. Радиус плазменного столба в момент времени $t > 0$ мы обозначим через $R(t)$. Проводимость плазмы будем считать бесконечной. При этом ток течет по поверхности плазмы, а магнитное поле

$$B_\varphi = \frac{2I}{cr} \quad (10.47)$$

имеется только в области между $r = R(t)$ и $r = R_0$. В соответствии с предположением о бесконечной проводимости электрическое поле на поверхности плазмы в движущейся системе отсчета, в которой эта поверхность покоятся, обращается в нуль

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (10.48)$$

Применяя закон индукции Фарадея к показанному пунктирными линиями на фиг. 10.6 контуру, внутренняя сторона которого движется вместе с поверхностью плазмы, мы видим, что вклад в ли-

нейный интеграл от \mathbf{E} дает только внешняя сторона контура, находящаяся в проводящей стенке. Таким образом,

$$-\frac{V}{L} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{R(t)}^{R_0} B_\phi dr = -\frac{2}{c^2} \frac{d}{dt} \left(I \ln \frac{R_0}{R} \right). \quad (10.49)$$

Это уравнение выражает обычную индуктивную связь между током, напряжением и размерами, определяющими индуктивность. Его интеграл имеет вид

$$I \ln \frac{R_0}{R} = \frac{c^2}{2} E_0 \int_0^t f(t) dt, \quad (10.50)$$

где $E_0 f(t) = V/L$ — приложенное электрическое поле. Функция $f(t)$ считается известной и нормируется таким образом, чтобы величина E_0 была равна максимальному значению приложенного поля. Чтобы продвинуться дальше, мы должны найти динамическую связь между током I и радиусом плазмы R .

Необходимая зависимость получается из уравнения баланса импульсов, т. е. из второго закона Ньютона. Однако прежде необходимо сделать некоторые предположения относительно плазмы. Если бы длина свободного пробега между столкновениями была мала по сравнению с радиусом, то динамическое поведение плазмы определялось бы гидродинамическими ударными волнами. Однако для горячей и разреженной плазмы длина свободного пробега обычно сравнима или даже больше радиуса. В этом случае более подходящей является модель частиц, свободно движущихся внутри плазмы.

Если скорость границы плазмы \dot{R} значительно больше тепловых скоростей, то в системе отсчета, где эта граница неподвижна, каждая частица движется к границе со скоростью \dot{R} . Частица, проникнувшая во внешнюю область, под действием магнитного поля поворачивает обратно и покидает поверхность со скоростью $-\dot{R}$. Поэтому каждая частица, столкнувшаяся с границей плазмы, приобретает импульс $2M\dot{R}$. Число столкновений на единицу поверхности в единицу времени равно $N\dot{R}$, где N — начальное число частиц в единице объема. Следовательно, скорость изменения импульса (т. е. давление) дается выражением

$$p = 2NM\dot{R}^2 = 2\varrho\dot{R}^2, \quad (10.51)$$

где ϱ — начальная плотность. На границу плазмы действует магнитное давление $B^2/8\pi$, обусловленное скачком магнитного поля от нуля внутри плазмы до величины B вне плазмы. Оно должно уравновешивать давление плазмы. Это позволяет с учетом (10.47)

найти связь тока со скоростью границы плазмы:

$$I^2 = 4\pi Q c^2 R^2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2. \quad (10.52)$$

При выводе (10.52) мы весьма упрощенно считали, что каждая частица сталкивается с границей раздела только один раз. В действительности скорость границы раздела все время растет, так что поверхность догоняет также и ранее отразившиеся от нее частицы и снова нагревает их. Этот эффект можно приближенно учесть с помощью модели «снегоочистителя», в которой предполагается, что поверхность раздела увлекает с собой все вещество, на которое она надвигается по мере движения. При этом магнитное давление и скорость изменения импульса связаны уравнением

$$\frac{d}{dt} [M(R) \dot{R}] = -2\pi R \frac{B^2}{8\pi}, \quad (10.53)$$

в котором $M(R)$ — масса, увлекаемая «снегоочистителем»:

$$M(R) = \pi Q (R_0^2 - R^2). \quad (10.54)$$

Отсюда получается соотношение между током и радиусом

$$I^2 = -\pi Q c^2 R \frac{d}{dt} \left[(R_0^2 - R^2) \frac{dR}{dt} \right]. \quad (10.55)$$

В начальной стадии, когда $R \ll R_0$, модель «снегоочистителя» и модель свободных частиц приводят к одинаковым зависимостям тока от радиуса, различающимся лишь множителем 2^1). По порядку величины обе модели дают один и тот же результат и для более поздних моментов времени.

Уравнение движения для $R(t)$ можно получить, подставляя I^2 из (10.52) или из (10.55) в соотношение (10.50). Выбирая для примера модель свободных частиц, находим

$$2R \ln \left(\frac{R_0}{R} \right) \frac{dR}{dt} = -\frac{c E_0}{V 4\pi Q} \int_0^t f(t') dt'. \quad (10.56)$$

Здесь знак квадратного корня определяется требованием $\dot{R} < 0$. Для решения этого уравнения необходимо знать $E_0(t)$. Некоторые свойства решения можно определить, перейдя к безразмерным

¹⁾ Разница в 2 раза объясняется тем, что в модели свободных частиц частицы отражаются упруго и изменение их скорости равно $2\dot{R}$, в то время как в другой модели столкновение частиц с границей раздела считается неупругим, так что изменение скорости равно \dot{R} .

переменным

$$\tau = \left(\frac{c^2 E_0^2}{4\pi Q} \right)^{1/4} \frac{t}{R_0},$$

$$x = \frac{R}{R_0}.$$
(10.57)

Тогда (10.56) запишется в виде

$$2x \ln x \frac{dx}{d\tau} = \int_0^\tau f(\tau') d\tau'. \quad (10.58)$$

Для модели «снегоочистителя» соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1-x^2) \frac{dx}{d\tau} \right] = -\frac{1}{x (\ln x)^2} \left[\int_0^\tau f(\tau') d\tau' \right]^2. \quad (10.59)$$

Даже не решая этих уравнений, можно сказать, что x существенно изменяется на интервале $\tau \sim 1$. Это означает, что по порядку величины радиальная скорость сжатия равна

$$|\dot{R}| \sim v_0 \equiv \left(\frac{c^2 E_0^2}{4\pi Q} \right)^{1/4}. \quad (10.60)$$

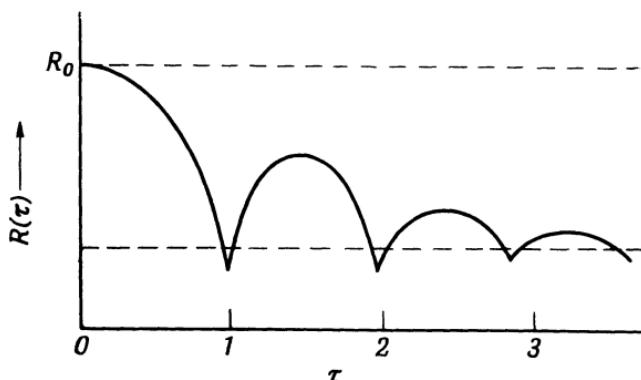
Такой результат получается при любой динамической модели, в том числе гидродинамической. Для «быстрых пинчей» в небольших установках с водородной и дейтериевой плазмой типичные значения приложенного электрического поля составляют около 10^3 в/см, а начальной плотности — около 10^{-8} г/см³ ($\sim 3 \cdot 10^{15}$ дейtronов в 1 см³). При этом v_0 оказывается величиной порядка 10^7 см/сек, а протекающий ток, согласно (10.52) или (10.55), равен

$$I = \frac{c^2 R_0 E_0}{v_0} F \left(x, \frac{dx}{d\tau} \right), \quad (10.61)$$

где F — безразмерная функция порядка единицы. Для трубки радиусом 10 см при описанных выше условиях ток составляет 10^5 — 10^6 а.

Предыдущее рассмотрение пинч-эффекта, очевидно, применимо только для короткого интервала времени после включения тока. Наша упрощенная модель показывает, что за время порядка R_0/v_0 радиус плазменного столба обращается в нуль. Ясно, однако, что, прежде чем это случится (даже приближенно), характер процесса изменится. В гидродинамическом приближении радиальные ударные волны, вызванные сжатием, отразятся от оси и, распространяясь обратно, будут замедлять движение границы или даже изменять направление ее движения на обратное. Это — так называемая

пульсация плазменного столба. Она, очевидно, имеет место и в модели свободных частиц. Поэтому общая зависимость радиуса



Фиг. 10.7. Изменение радиуса плазменного столба со временем с момента включения тока.

Характерная скорость сжатия определяется выражением (10.60).

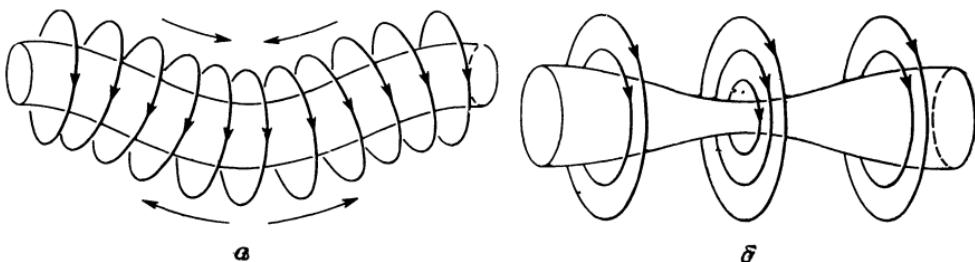
R от времени будет иметь вид, изображенный на фиг. 10.7. Хотя для последующих пульсаций соответствующий анализ не проведен, естественно предположить, что радиус приближается к некоторому стационарному значению, меньшему чем R_0 .

§ 7. Неустойчивости сжатого плазменного столба

Получить в лабораторных условиях долгоживущий сжатый плазменный столб чрезвычайно трудно. Поведение плазмы качественно соответствует описанному в § 6 только во время первого сжатия. Затем плазменный столб быстро разрушается. Причиной этого разрушения является развитие неустойчивостей. Плазменный столб неустойчив по отношению к отклонениям от цилиндрической симметрии. Малые возмущения быстро нарастают и приводят к разрушению плазменной конфигурации за очень короткие времена. Детальный анализ неустойчивостей весьма сложен, поэтому мы ограничимся только качественным рассмотрением, причем остановимся лишь на двух простейших возмущениях, приводящих к неустойчивости.

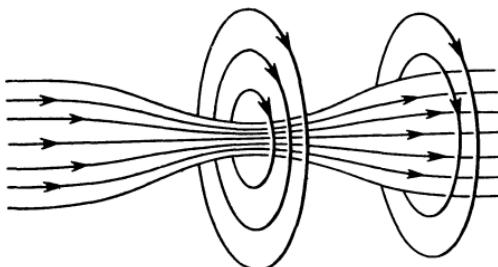
Первое — это так называемая *неустойчивость изгиба*, показанная на фиг. 10.8, а. При изгибе плазменного столба вниз силовые линии азимутального магнитного поля сгущаются на верхней стороне плазменного цилиндра и расходятся на нижней. Очевидно, изменение магнитного давления таково, что оно приводит к дальнейшему росту возмущения. Поэтому такое возмущение оказывается неустойчивым.

Другой тип неустойчивости называется неустойчивостью относительно *перетяжек*, или *шееек*, и показан на фиг. 10.8, б. В окрестности перетяжки азимутальное магнитное поле возрастает и магнитное давление становится больше, чем в других местах. Это ведет к возрастанию существующего возмущения.



Фиг. 10.8. Неустойчивость изгиба (а) и неустойчивость типа перетяжки (б).

Развитию обоих типов неустойчивости может помешать продольное магнитное поле внутри плазменного цилиндра. При образовании перетяжки силовые линии продольного магнитного поля сгущаются в месте перетяжки, что приводит к возрастанию внутреннего



Фиг. 10.9. Стабилизация неустойчивости типа перетяжки с помощью внутреннего продольного магнитного поля.

магнитного давления, противодействующего давлению азимутального поля, как схематически показано на фиг. 10.9. Легко видеть, что в случае резкой границы плазмы приращения соответствующих магнитных давлений определяются соотношениями

$$\frac{\Delta p_\Phi}{p_\Phi} = \frac{2x}{R}, \quad \frac{\Delta p_z}{p_z} = \frac{4x}{R}, \quad (10.62)$$

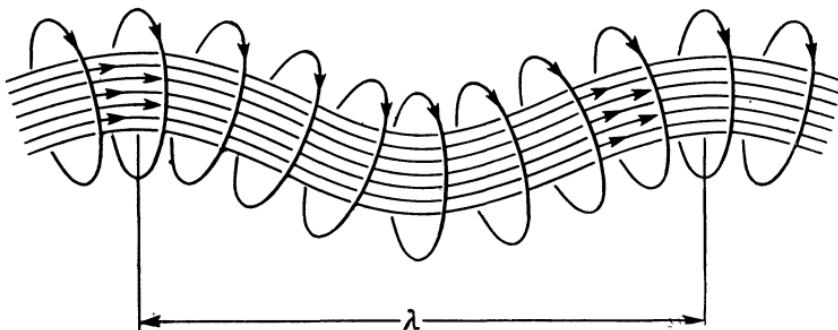
где x — малое смещение. Следовательно, при

$$B_z^2 > \frac{1}{2} B_\Phi^2 \quad (10.63)$$

плазменный цилиндр становится устойчивым относительно перетяжек.

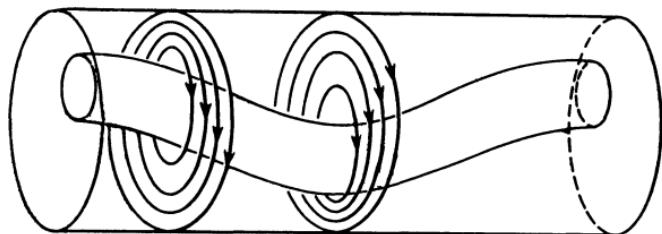
При изгибе силовые линии продольного магнитного поля не сгущаются, а растягиваются. Однако результат остается прежним:

возрастание натяжения силовых линий внутреннего магнитного поля противодействует внешним силам и способствует стабилизации плазменного столба. Фиг. 10.10 показывает, что при заданной



Ф и г. 10.10. Стабилизация неустойчивости изгиба за счет натяжения силовых линий внутреннего продольного магнитного поля.

величине бокового смещения коротковолновый изгиб приводит к большему натяжению силовых линий, чем длинноволновый. Таким образом, при данном отношении внутреннего продольного поля к внешнему азимутальному полю должны в первую очередь



Ф и г. 10.11. Стабилизация длинноволновых изгибов с помощью внешнего проводящего экрана.

стабилизироваться коротковолновые изгибы, а достаточно длинноволновые будут оставаться неустойчивыми. Расчет показывает, что при приблизительно равных полях возмущения такого типа стабилизируются для длин волн $\lambda < 14R$.

Длинноволновые изгибы могут быть стабилизированы с помощью внешнего проводящего экрана. При этом радиус плазменного цилиндра должен быть не слишком мал по сравнению с радиусом экрана. Силовые линии азимутального магнитного поля зажаты между экраном и границей плазмы, как показано на фиг. 10.11. Если плазма приближается к стенке, то силовые линии в промежутке между плазмой и экраном сгущаются, магнитное давление возрастает и возникает возвращающая сила.

Качественно ясно, что, используя подходящее сочетание вмешанного продольного поля и проводящего экрана, можно создать устойчивую плазменную конфигурацию, по крайней мере для очень хорошо проводящей плазмы с резкой границей. Детальные расчеты ([85, 89, 108]; см. также [19, 109]) подтверждают этот качественный вывод и позволяют установить соответствующие количественные критерии. Оказывается существенным, чтобы внешнее продольное магнитное поле было возможно меньше, а радиус плазменного столба был порядка $1/2$ или $1/3$ радиуса экрана. При достаточно большом продольном поле вне плазмы в результате комбинации полей B_z и B_ϕ возникают винтовые силовые линии, что способствует развитию винтовой неустойчивости, которая особенно существенна при тороидальной геометрии плазмы. Если, однако, продольное поле вне плазмы будет очень большим, то шаг винта силовой линии настолько возрастает, что на конечной длине плазменного цилиндра силовая линия сделает лишь малую часть одного оборота. При этом опять возможна устойчивость. Стабилизация с помощью сильных продольных полей, создаваемых внешними токами, используется в некоторых термоядерных установках, например в стеллараторах.

Идеализированную конфигурацию плазмы с резкой границей трудно осуществить экспериментально. Даже будучи созданной, она разрушается из-за диффузии плазмы поперек силовых линий за время порядка $4\pi R^2/c^2$ (см. § 3). Для водородной плазмы с энергией 1 эВ на частицу это время имеет величину порядка 10^{-4} сек при $R \sim 10$ см, однако для плазмы с энергией 10 кэВ оно становится уже порядка 10^2 сек. Ясно, что в термоядерных экспериментах следует с самого начала пытаться создать возможно более горячую плазму с начальным временем диффузии, достаточно большим, чтобы обеспечить возможность дальнейшего ее нагревания.

§ 8. Магнитогидродинамические волны

В обычной гидродинамике возможен только один тип волн малой амплитуды, а именно продольные (звуковые) волны сжатия. Они распространяются со скоростью s , определяемой производной давления по плотности при постоянной энтропии

$$s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0. \quad (10.64)$$

Если принять адиабатический закон $p = K\rho^\gamma$, то $s^2 = \gamma p_0/\rho_0$, где γ — отношение удельных теплоемкостей. В магнитной гидродинамике возможен также и другой тип волнового движения, связанный с поперечными смещениями силовых линий магнитного поля. При натяжении силовых линий появляется возвращающая

сила, стремящаяся вернуть их в прежнее «более прямолинейное» положение, так что в результате возникают поперечные колебания. По аналогии со звуковыми волнами, которые распространяются со скоростью порядка корня квадратного из отношения гидростатического давления к плотности, следует ожидать, что эти магнитогидродинамические волны, называемые *альфеновскими волнами*, будут иметь скорость порядка

$$v_A \sim \left(\frac{B_0^2}{8\pi Q_0} \right)^{1/2}, \quad (10.65)$$

где $B_0^2/8\pi$ — магнитное давление.

Рассмотрим сжимаемую невязкую идеально проводящую жидкость в магнитном поле при отсутствии гравитационных сил. Ее движение описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} \rho = 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (10.66)$$

К ним следует добавить еще уравнение состояния, связывающее давление и плотность. Предположим, что в равновесном состоянии скорость равна нулю и имеется пространственно однородное статическое магнитное поле \mathbf{B}_0 , пронизывающее однородную жидкость постоянной плотности Q_0 . Введем малые отклонения от равновесных величин

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t), \\ \rho &= Q_0 + Q_1(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (10.67)$$

Линеаризируя уравнения (10.66) по этим малым возмущениям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial t} + Q_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 &= 0, \\ Q_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + s^2 \operatorname{grad} Q_1 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_1 &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) &= 0, \end{aligned} \quad (10.68)$$

где s^2 — квадрат звуковой скорости (10.64). Эти уравнения можно скомбинировать таким образом, чтобы получилось одно уравнение для \mathbf{v}_1 :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} - s^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_A \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_A) = 0. \quad (10.69)$$

Здесь через v_A обозначена векторная альфеновская скорость:

$$\mathbf{v}_A = \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (10.70)$$

Волновое уравнение (10.69) для \mathbf{v}_1 довольно сложно, но оно допускает простые решения для волн, распространяющихся параллельно и перпендикулярно магнитному полю ¹⁾. Если искать решение для $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t)$ в виде плоской волны с волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_1 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (10.71)$$

то уравнение (10.69) примет вид

$$-\omega^2 \mathbf{v}_1 + (s^2 + v_A^2) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k} [(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_A] = 0. \quad (10.72)$$

Если волновой вектор \mathbf{k} *перпендикулярен* скорости \mathbf{v}_A , то последний член в (10.72) равен нулю. В этом случае решением для \mathbf{v}_1 будут *продольные* магнитозвуковые волны (\mathbf{v}_1 параллельно \mathbf{k}), имеющие фазовую скорость

$$u_{\parallel} = \sqrt{s^2 + v_A^2}. \quad (10.73)$$

Отметим, что эти волны распространяются со скоростью, которая с точностью до множителя порядка единицы определяется суммой гидростатического и магнитного давлений. При \mathbf{k} , *параллельном* \mathbf{v}_A , уравнение (10.72) принимает вид

$$(k^2 v_A^2 - \omega^2) \mathbf{v}_1 + \left(\frac{s^2}{v_A^2} - 1 \right) k^2 (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_A = 0. \quad (10.74)$$

В этом случае возможны два типа волн. Имеется обычная продольная волна (скорость \mathbf{v}_1 параллельна \mathbf{k} и \mathbf{v}_A) с фазовой скоростью, равной звуковой скорости s . Но имеется также и *поперечная* волна ($\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_A = 0$) с фазовой скоростью, равной альфеновской скорости v_A . Эта альфеновская волна является чисто магнитогидродинамической и зависит только от магнитного поля (натяжение) и плотности (инерция).

Для ртути при комнатной температуре альфеновская скорость равна $B_0/13,1$ см/сек, а звуковая скорость составляет $1,45 \cdot 10^5$ см/сек. При обычных напряженностях поля в лабораторных условиях альфеновская скорость много меньше скорости звука. Наоборот, в астрономических проблемах альфеновская скорость может быть очень большой из-за весьма малых плотностей. В солнечной фотосфере, например, плотность имеет величину порядка 10^{-7} г/см³ ($6 \cdot 10^{16}$ атомов водорода в 1 см³), так что $v_A \approx 10^3 B_0$ см/сек. Солн-

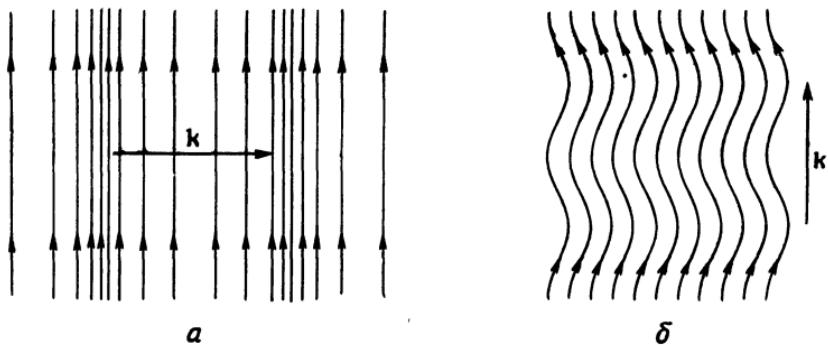
¹⁾ Определение характеристик волн при произвольном направлении распространения рассмотрено в задаче 10.3.

нечные магнитные поля имеют порядок 1—2 гаусс на поверхности и много большую величину в районе солнечных пятен. Для сравнения отметим, что скорость звука как в фотосфере, так и в хромосфере составляет около 10^6 см/сек .

Возмущения магнитного поля для различных типов волн можно определить из третьего уравнения (10.68):

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} \frac{k}{\omega} v_1 \mathbf{B}_0 & \text{для } \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \\ 0 & \text{для продольной волны с } \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0, \\ -\frac{k}{\omega} B_0 \mathbf{v}_1 & \text{для поперечной волны с } \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0. \end{cases} \quad (10.75)$$

Магнитозвуковые волны, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю \mathbf{B}_0 , приводят к сгущению и разрежению силовых



Фиг. 10.12. Магнитогидродинамические волны.

линий без изменения их направления (фиг. 10.12, а). Альфвеновские волны, параллельные \mathbf{B}_0 , вызывают периодические колебания силовых линий (фиг. 10.12, б). В обоих случаях силовые линии заморожены и движутся вместе с жидкостью.

Если проводимость жидкости не бесконечна или же проявляется вязкость, то в результате диссипативных процессов колебания затухают. В этом случае ко второму и третьему уравнениям (10.68) добавляются диссипативные члены:

$$\begin{aligned} Q_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -s^2 \operatorname{grad} Q_1 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_1 + \eta \nabla^2 \mathbf{v}_1, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}_1; \end{aligned} \quad (10.76)$$

здесь η — вязкость ¹⁾, а σ — проводимость. Оба добавочных члена

¹⁾ Использование простого выражения (10.3) для вязкой силы в сжимаемой жидкости в действительности незаконно. Однако можно полагать, что оно дает правильное качественное описание.

приводят к дисперсии фазовой скорости, и их влияние проще всего проследить, если искать решение уравнений (10.76) в виде плоской волны. Легко видеть, что уравнения (10.76) эквивалентны для плоских волн следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} Q_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{-s^2 \operatorname{grad} Q_1 - (1/4\pi) \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_1}{1 + i\eta k^2/Q_0\omega}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} &= \frac{\operatorname{rot} (v_1 \times \mathbf{B}_0)}{1 + i c^2 k^2 / 4\pi\sigma\omega}. \end{aligned} \quad (10.77)$$

Соответственно уравнение (10.72), связывающее k и ω , также изменяется: во-первых, s^2 и ω^2 умножаются на $(1 + i c^2 k^2 / 4\pi\sigma\omega)$; во-вторых, ω^2 умножается на $(1 + i \eta k^2 / Q_0\omega)$.

Для важного случая альфвеновской волны, распространяющейся параллельно полю, соотношение между ω и k принимает вид

$$k^2 v_A^2 = \omega^2 \left(1 + i \frac{c^2 k^2}{4\pi\sigma\omega} \right) \left(1 + i \frac{\eta k^2}{Q_0\omega} \right). \quad (10.78)$$

Если члены, содержащие сопротивление и вязкость, можно считать малыми, то волновое число определяется приближенным выражением

$$k \approx \frac{\omega}{v_A} + i \frac{\omega^2}{2v_A^3} \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} + \frac{\eta}{Q_0} \right). \quad (10.79)$$

Это выражение показывает, что затухание быстро растет с повышением частоты (или волнового числа) и уменьшается при возрастании напряженности магнитного поля. Если отвлечься от эффекта вязкости, то влияние мнимой части волнового вектора таково, что за время диффузии (см. § 3) интенсивность волны уменьшается в e раз [если в (10.12) за характерную длину принять длину волны]. В противоположном предельном случае, когда члены, содержащие сопротивление и вязкость, являются преобладающими, волновое число можно определить, приравнивая нулю выражения в скобках в правой части (10.78). При этом k имеет одинаковые действительную и мнимую части, и волна быстро затухает независимо от величины магнитного поля.

Проведенное выше рассмотрение магнитогидродинамических волн применимо только для сравнительно низких частот, поскольку мы пренебрегли токами смещения в законе Ампера. Очевидно, что при очень высоких частотах мы должны перейти к описанному в гл. 7, § 9, поведению, характерному для ионосферы, когда определяющую роль играют эффекты, связанные с разделением зарядов. Однако если даже в магнитогидродинамическом описании пренебречь эффектом разделения зарядов, токи смещения все же будут влиять на распространение альфвеновских и магнитозвуковых

вых волн. Закон Ампера с учетом токов смещения имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (10.80)$$

где электрическое поле \mathbf{E} исключено с помощью приближения бесконечной проводимости (10.9). Отсюда находим плотность тока, входящую в уравнение движения жидкости:

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \left[\operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right]. \quad (10.81)$$

Второе из уравнений линеаризованной системы (10.68) при этом обобщении примет вид

$$\mathbf{Q}_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_A \times \left(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \times \mathbf{v}_A \right) \right] = -s^2 \operatorname{grad} \mathbf{q}_1 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_1. \quad (10.82)$$

Отсюда получаем следующее волновое уравнение для \mathbf{v}_1 :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\mathbf{v}_1 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_A (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1) \right] - s^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_A \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_A) = 0. \quad (10.83)$$

Его исследование показывает, что если скорость \mathbf{v}_1 параллельна \mathbf{v}_A (т. е. параллельна \mathbf{B}_0), то результаты не отличаются от предыдущих. Однако для поперечной скорости \mathbf{v}_1 (для магнитозвуковых волн с волновым вектором \mathbf{k} , перпендикулярным \mathbf{B}_0 , или для альфвеновских волн с \mathbf{k} , параллельным \mathbf{B}_0) квадрат частоты умножается на величину $(1 + v_A^2/c^2)$. Таким образом, фазовая скорость альфвеновских волн становится равной

$$u_A = \frac{v_A c}{\sqrt{c^2 + v_A^2}}. \quad (10.84)$$

В обычных условиях, когда $v_A \ll c$, эта скорость близка к v_A и токи смещения несущественны. Но если $v_A \gg c$, то фазовая скорость становится равной скорости света. Если рассматривать поперечные альфвеновские волны как электромагнитные волны, то их можно интерпретировать как волны в среде с показателем преломления, определяемым соотношением

$$n_A = \frac{c}{u_A}. \quad (10.85)$$

Отсюда

$$n^2 = 1 + \frac{c^2}{v_A^2} = 1 + \frac{4\pi Q_0 c^2}{B_1^2}. \quad (10.86)$$

При использовании этого соотношения для характеристики распространения электромагнитных волн в плазме необходимо соблюдать осторожность, поскольку оно применимо только для частот, при которых несущественны эффекты, связанные с разделением зарядов.

§ 9. Высокочастотные плазменные колебания

Магнитогидродинамическое приближение, рассмотренное в предыдущих параграфах, основано на представлении о взаимодействии между однокомпонентной электрически нейтральной жидкостью со скалярной проводимостью σ и электромагнитным полем. Однако, как указывалось во введении к настоящей главе, плазма является в действительности многокомпонентной жидкостью, состоящей из электронов и одного или нескольких сортов ионов. При низких частотах или больших длинах волн описание с помощью одножидкостной модели применимо, поскольку частота столкновений v достаточно велика (средний свободный пробег достаточно мал), чтобы все время сохранялась локальная электронейтральность, несмотря на среднее движение электронов и ионов в противоположных направлениях под действием электрического поля, согласно закону Ома. При более высоких частотах одножидкостная модель становится уже непригодной. Электроны и ионы начинают двигаться независимо, и происходит разделение зарядов. Это разделение зарядов ведет к появлению больших возвращающих сил, и, следовательно, возникают колебания электростатического типа. При наличии магнитного поля появляются и другие эффекты. Электроны и ионы стремятся двигаться в магнитном поле по круговым или винтовым орбитам с угловой частотой

$$\omega_B = \frac{eB}{mc}. \quad (10.87)$$

При достаточно сильных полях или достаточно низких плотностях, когда угловая частота сравнима с частотой столкновений, представление о скалярной проводимости становится уже неприменимым, и величина тока начинает зависеть от его направления относительно магнитного поля (см. задачу 10.5). При еще больших частотах ионы, обладающие большой инерцией, не в состоянии следовать за быстрыми изменениями полей, и поэтому в движении принимают участие только электроны. Ионы же просто создают однородный фон положительных зарядов и обеспечивают электрическую нейтральность в среднем. Представление об однородном фоне зарядов и об электронной жидкости можно использовать только в том случае, когда характерные длины велики, по крайней мере по сравнению с расстоянием между частицами ($l \gg n_0^{-1/3}$). В действительности имеется и другая ограничивающая длина — дебаевский радиус экранирования,

которая при обычных температурах плазмы больше чем $n_0^{-1/3}$. Она-то и является реальной границей между мелкомасштабным индивидуальным движением отдельных частиц и коллективным движением жидкости (см. § 10).

Чтобы избежать излишних осложнений, мы рассмотрим только высокочастотные колебания плазмы, пренебрегая движением ионов. Мы будем также пренебречь и влиянием столкновений. Электроны, имеющие заряд e и массу m , описываются плотностью $n(\mathbf{x}, t)$ и средней скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Равновесные плотности зарядов ионов и электронов равны $\mp en_0$. Уравнения движения электронной жидкости запишем в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \frac{1}{mn} \operatorname{grad} p, \quad (10.88)$$

где тепловая кинетическая энергия электронов учитывается электронным давлением p (которое предполагается скалярным). Плотности заряда и тока соответственно описываются соотношениями

$$Q_e = e(n - n_0), \\ \mathbf{J} = en\mathbf{v}, \quad (10.89)$$

и, следовательно, уравнения Максвелла можно записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e(n - n_0), \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi en}{c} \mathbf{v}. \quad (10.90)$$

Предположим теперь, что в невозмущенном состоянии электронная жидкость покоятся, ее плотность равна $n = n_0$, а поля отсутствуют, и рассмотрим малые отклонения от этого состояния, обусловленные некоторыми начальными возмущениями. Система линеаризованных уравнений включает уравнения

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{1}{mn_0} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_0 \operatorname{grad} n = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi en = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi en_0}{c} \mathbf{v} = 0 \quad (10.91)$$

и два однородных уравнения Максвелла. Здесь $n(x, t)$ и $\mathbf{v}(x, t)$ — отклонения от равновесных величин. В том случае, когда внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 отлично от нуля, во второе уравнение (10.91) следует добавить член $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)/c$ (см. задачу 10.7). Поскольку флукутационное поле \mathbf{B} является величиной первого порядка малости, то произведение $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ имеет второй порядок малости и должно быть отброшено. Первое уравнение (10.91) фактически не является независимым и может быть получено из третьего и четвертого.

Поскольку уравнение движения в системе (10.91) не содержит магнитного поля, то следует ожидать, что существуют решения чисто электростатической природы с $\mathbf{B} = 0$. Комбинируя уравнение непрерывности и уравнение движения, мы получаем волновое уравнение для флукутаций плотности

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right) n - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_0 \nabla^2 n = 0. \quad (10.92)$$

С другой стороны, дифференцируя по времени уравнение Ампера и уравнение движения и комбинируя их, мы приходим к следующему уравнению для полей:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right) \mathbf{E} - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_0 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = c \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (10.93)$$

Структура левых частей уравнений (10.92) и (10.93), по существу, одинакова. Поэтому мы вполне можем положить, не опасаясь несовместности уравнений, что $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$. Поскольку статические поля уже исключены, то мы пришли к случаю $\mathbf{B} = 0$. При $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ из закона Фарадея вытекает, что $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ и, следовательно, поле \mathbf{E} равно градиенту скалярного потенциала. Каждая составляющая поля \mathbf{E} , очевидно, удовлетворяет тому же уравнению (10.92), что и флукутации плотности. В пренебрежении электронным давлением в (10.92) плотность, скорость и электрическое поле колеблются с плазменной частотой

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m}. \quad (10.94)$$

Если же член с давлением существен, то мы получаем следующее дисперсионное соотношение для частоты:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{1}{m} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_0 k^2. \quad (10.95)$$

Определение коэффициента при k^2 требует известной аккуратности. Мы можем считать, что p и n связаны адиабатическим соотношением $p = p_0 (n/n_0)^\gamma$, но обычная акустическая величина $\gamma = 5/3$, соответствующая газу частиц с тремя внешними степенями свободы, но без внутренних степеней свободы, неприменима. Это

объясняется тем, что частота рассматриваемых колебаний плотности в противоположность акустическому случаю много больше частоты столкновений. Поэтому колебания плотности имеют существенно одномерную природу и, следовательно, определяются величиной γ , соответствующей одной трансляционной степени свободы. Поскольку $\gamma = (m + 2)/m$, где m — число степеней свободы, то мы получаем, что для нашего случая $\gamma = 3$ и

$$\frac{1}{m} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_0 = 3 \frac{p_0}{mn_0}. \quad (10.96)$$

Используя соотношение $p_0 = n_0KT$ и определяя средний квадрат составляющей скорости в одном направлении (параллельном электрическому полю) соотношением

$$m \langle u^2 \rangle = KT, \quad (10.97)$$

мы можем записать дисперсионное соотношение (10.95) в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3 \langle u^2 \rangle k^2. \quad (10.98)$$

Это соотношение является приближенным. Оно справедливо для случая длинных волн и в действительности представляет собой два первых члена в разложении по моментам распределения скоростей электронов (см. задачу 10.6). Записанное в форме (10.98) дисперсионное соотношение имеет более широкую область применимости, чем рассмотренный при его выводе случай идеального газа. Оно применимо, например, также к плазменным колебаниям в вырожденном электронном ферми-газе, в котором заполнены все ячейки в пространстве скоростей, лежащие внутри сферы с радиусом, равным скорости Ферми V_F . При этом среднее значение квадрата составляющей скорости будет

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{5} V_F^2. \quad (10.99)$$

Квантовые эффекты входят явно в дисперсионное соотношение только в членах более высокого порядка в разложении по k^2 .

Колебания, описанные выше, являются продольными электростатическими колебаниями, при которых колеблющихся магнитных полей нет. Это означает, что они не могут возбудить излучение в неограниченной плазме. Однако в плазме существуют и другие типы колебаний, которые представляют собой поперечные электромагнитные волны. Для нахождения различных возможных плазменных колебаний мы предположим, что все величины изменяются как $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$, и определим характеристическое соотношение между ω и \mathbf{k} , как это было сделано для магнитогидродинамических волн в § 8. При таком предположении линеаризованные уравнения (10.91) и два однородных уравнения Максвелла

примут вид

$$\begin{aligned} n &= \frac{n_0}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}, \\ \mathbf{v} &= \frac{ie\mathbf{E}}{m\omega} + \frac{3\langle u^2 \rangle}{\omega} \frac{n}{n_0} \mathbf{k}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= -i 4\pi en, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c} \mathbf{E} - i \frac{4\pi en_0}{c} \mathbf{v}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (10.100)$$

Из уравнений Максвелла можно выразить \mathbf{v} через \mathbf{k} и \mathbf{E} :

$$\mathbf{v} = \frac{ie}{m\omega} \frac{1}{\omega_p^2} [(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E} + c^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k}]. \quad (10.101)$$

Далее, используя уравнение движения и уравнение непрерывности для \mathbf{E} , исключим \mathbf{v} и получим уравнение, содержащее только \mathbf{E} :

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) \mathbf{E} + (c^2 - 3\langle u^2 \rangle) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} = 0. \quad (10.102)$$

Если представить \mathbf{E} в виде суммы составляющих, параллельной и перпендикулярной \mathbf{k} ,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{||} + \mathbf{E}_{\perp}, \\ \mathbf{E}_{||} &= \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}}{k^2} \right) \mathbf{k}, \end{aligned} \right\} \quad (10.103)$$

где

то (10.102) запишется в виде двух уравнений

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_p^2 - 3\langle u^2 \rangle k^2) \mathbf{E}_{||} &= 0, \\ (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_{\perp} &= 0. \end{aligned} \quad (10.104)$$

Первое из этих уравнений показывает, что продольные волны удовлетворяют дисперсионному соотношению (10.98), рассмотренному выше, а из второго уравнения следует существование двух поперечных волн (с различными поляризациями), дисперсионное соотношение для которых имеет вид

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (10.105)$$

Соотношение (10.105) совпадает с дисперсионным соотношением для поперечных электромагнитных волн, описанных с другой точки зрения в гл. 7, § 9. В отсутствие внешних полей электростатические колебания и поперечные электромагнитные колебания не связаны друг с другом. Однако при наличии, например, внешнего маг-

нитного поля уравнение движения имеет дополнительный член, содержащий магнитное поле, и поэтому колебания становятся связанными (см. задачу 10.7).

§ 10. Коротковолновые плазменные колебания. Дебаевский радиус экранирования

При рассмотрении плазменных колебаний мы до сих пор не уточняли верхнего предела волновых чисел, выше которого уже неприменимо представление о коллективных колебаниях. Очевидно, одним верхним пределом для волновых чисел является $n_0^{1/3}$. Чтобы составить более точное представление о верхнем пределе, следует обратиться к соотношению (10.98) для продольных колебаний. Для длинных волн частота колебаний очень близка к $\omega = \omega_p$. Существенное отклонение частоты от ω_p имеет место только для волновых чисел, сравнимых с *дебаевским волновым числом* k_D

$$k_D^2 = \frac{\omega_p^2}{\langle u^2 \rangle}. \quad (10.106)$$

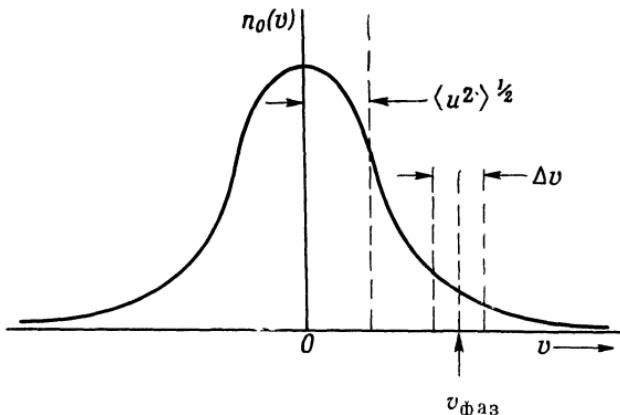
Для волновых чисел $k \ll k_D$ фазовая и групповая скорости продольных плазменных колебаний выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{\text{фаз}} &\approx \frac{\omega_p}{k}, \\ v_{\text{grp}} &\approx \frac{3 \langle u^2 \rangle}{v_{\text{фаз}}}. \end{aligned} \quad (10.107)$$

Из определения k_D видно, что для волновых чисел $k \ll k_D$ фазовая скорость много больше, а групповая скорость много меньше среднеквадратичной тепловой скорости $\langle u^2 \rangle^{1/2}$. При возрастании волнового числа до k_D фазовая скорость уменьшается от большой величины до $\langle u^2 \rangle^{1/2}$. Следовательно, при волновых числах порядка k_D волна движется со столь малой скоростью, что имеются значительные группы электронов, движущихся быстрее волны, медленнее волны и приблизительно вместе с волной. Иными словами, фазовая скорость лежит на склоне кривой теплового распределения. То обстоятельство, что скорость волны сравнима с тепловыми скоростями электронов, и является причиной возникновения механизма передачи энергии, который приводит к разрушению колебательного движения. Этот механизм состоит в захвате частиц движущейся волной, в результате чего энергия передается от движущейся волны к частицам. Обусловленное этим затухание волны называется *затуханием Ландау*.

Детальный расчет затухания Ландау выходит за рамки данной книги. Однако мы можем качественно описать механизм этого

явления. На фиг. 10.13 показано распределение электронных скоростей с некоторым среднеквадратичным разбросом и максвелловским хвостом на высоких скоростях. При малых k фазовая скорость лежит далеко на хвосте распределения, и затухание пренебрежимо мало. Но если $k \rightarrow k_D$, то фазовая скорость оказывается на склоне распределения, как показано на фиг. 10.13, и значительное количество электронов имеют тепловые скорости, сравнимые с $v_{\text{фаз}}$. При этом вокруг $v = v_{\text{фаз}}$ имеется интервал скоростей Δv , где



Фиг. 10.13. Распределение тепловых скоростей электронов.

электроны движутся столь медленно относительно волны, что они могут быть захвачены в потенциальную яму и увлечены волной, движущейся со скоростью $v_{\text{фаз}}$. Если в интервале Δv число частиц со скоростью $v < v_{\text{фаз}}$, т. е. двигавшихся сначала медленней волны, больше числа частиц со скоростями $v > v_{\text{фаз}}$ (как показано на фиг. 10.13), то процесс захвата ведет в среднем к возрастанию энергии частиц и потере энергии волны. В этом и состоит механизм затухания Ландау. Детальный расчет показывает, что при $k \ll k_D$ это затухание соответствует мнимой части частоты, равной

$$\text{Im } \omega \approx -\omega_p \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{k_D}{k} \right)^3 e^{-k_D^2/2k^2}. \quad (10.108)$$

При выводе формулы (10.108) предполагается максвелловское распределение скоростей. При $k \geq k_D$ постоянная затухания больше значения, определяемого формулой (10.108), и быстро становится намного больше действительной части частоты (10.98).

Формула Ландау (10.108) показывает, что при $k \ll k_D$ продольные плазменные колебания почти не затухают. Но затухание становится существенным при $k \sim k_D$ (даже для $k = 0,5k_D$ мы имеем $\text{Im } \omega \approx -\omega_p/6$). При волновых числах, превышающих дебаевское волновое число, затухание столь велико, что уже не имеет смысла говорить об упорядоченных колебаниях.

Можно привести другое рассмотрение, которое совершенно отлично от вышеизложенного, но дает то же самое предельное дебаевское волновое число в качестве границы колективных колебаний. Мы знаем, что электронная плазма представляет собой систему электронов и однородного фона положительных зарядов. В мелком масштабе ее поведение должно описываться как последовательность множества двухчастичных кулоновских столкновений. Однако в больших масштабах поведение электронов становится колективным. Если где-либо появляется локальный излишек положительных зарядов, то электроны стремятся быстро нейтрализовать его. Такой колективный отклик на флуктуации заряда и приводит к крупномасштабным плазменным колебаниям. Но помимо этих колективных колебаний, или, лучше сказать, благодаря этим колебаниям, колективный отклик электронов препятствует дальнодействующему характеру кулоновского взаимодействия между частицами. Отдельный электрон можно рассматривать как флуктуацию плотности заряда. Окружающие электроны отталкиваются таким образом, что стремятся заэкранировать кулоновское поле рассматриваемого электрона, превращая кулоновское взаимодействие в короткомасштабное. Собственно этого и следовало ожидать, если учесть, что единственным источником электростатического взаимодействия являются кулоновские силы, действующие между частицами. Если исключить ту часть, которая вызывает длинноволновые колективные плазменные колебания, то остаются короткомасштабные взаимодействия между частицами.

Нестрогий вывод описанного выше экранирующего эффекта был впервые дан Дебаем и Хюккелем в их теории электролитов. Предположим, что мы имеем плазму, электроны которой находятся в тепловом равновесии в поле с электростатическим потенциалом Φ . При этом функция их распределения пропорциональна множителю Больцмана $e^{-e\Phi/kT}$, где H — функция Гамильтона для электронов. Поэтому пространственная плотность электронов описывается выражением

$$n(x) = n_0 e^{-e\Phi/kT}. \quad (10.109)$$

Пусть пробный заряд Ze , расположенный в начале координат, внесен в объем, где находятся эти электроны и однородный фон положительных ионов (с плотностью заряда $-en_0$). Результирующий потенциал Φ определится уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi Ze\delta(x) - 4\pi en_0(e^{-e\Phi/kT} - 1). \quad (10.110)$$

Если предположить, что величина $e\Phi/kT$ мала, то, линеаризуя это уравнение, мы получаем

$$\nabla^2 \Phi - k_D^2 \Phi \approx -4\pi Ze\delta(x), \quad (10.111)$$

где

$$k_D^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{KT}, \quad (10.112)$$

что является другой формой записи соотношения (10.106). Уравнение (10.111) имеет сферически симметричное решение

$$\Phi(r) = Ze \frac{e^{-k_D r}}{r}, \quad (10.113)$$

которое показывает, что электроны перераспределяются таким образом, что кулоновское поле пробного заряда экранируется на расстоянии порядка k_D^{-1} . Величина радиуса экранирования определяется соотношением между тепловой кинетической энергией и электростатической энергией. Численно величина k_D^{-1} выражается следующим образом:

$$k_D^{-1} = 6,91 \left(\frac{T}{n_0} \right)^{1/2} \text{ см}, \quad (10.114)$$

где T — температура в градусах Кельвина, а n_0 — число электронов в 1 см³. Для типичного случая горячей плазмы с $T = 10^6$ °К и $n_0 = 10^{15}$ см⁻³ получим $k_D^{-1} \approx 2,2 \cdot 10^{-4}$ см.

Для вырожденного электронного газа при низких температурах дебаевское волновое число k_D заменяется волновым числом Ферми k_F

$$k_F \sim \frac{\omega_p}{V_F}, \quad (10.115)$$

где V_F — скорость на поверхности ферми-сферы. Такая величина радиуса экранирования может быть получена из обобщения теории Дебая — Хюкеля, данного Ферми и Томасом. Она, естественно, согласуется с дисперсионным соотношением (10.98) с учетом среднего квадрата скорости (10.99).

Радиус экранирования Дебая — Хюкеля является естественной границей между короткомасштабными парными столкновениями и крупномасштабными коллективными эффектами, такими, как колебания плазмы. К счастью, как можно показать независимо, плазменные колебания с более короткими длинами волн не могут существовать из-за сильного затухания.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Количество литературы по магнитной гидродинамике и физике плазмы быстро растет. Значительная часть вышедших книг представляет собой сборники статей, представленных на конференции и симпозиумы. Эти книги интересны для специалистов, но не годятся для начинающих. Можно указать две книги по магнитной гидродинамике, в которых дано цельное изложение интересующего нас вопроса,— это книги Альфвена [4] и Каулинга [34].

Краткое изложение магнитогидродинамики дано в книге Ландау и Лифшица [64], гл. 8. Монографии Чандрасекара [26], Линхарта [67], Саймона [96] и Спитцера [104] посвящены в основном физике плазмы.

Проблема управляемых термоядерных реакций и значительный материал по основам физики плазмы излагаются в книгах Глесстона и Ловертона [45], а также Роуза и Кларка [84].

Дополнение редактора. Прекрасным введением в физику плазмы в применении к проблеме управляемой термоядерной реакции может служить книга Арцимовича [121]. Для более детального ознакомления с этим кругом вопросов можно рекомендовать серию сборников под общим названием «Вопросы теории плазмы» [123].

ЗАДАЧИ

10.1. Бесконечно длинный твердый круглый металлический цилиндр имеет радиус $R/2$ и проводимость σ . Вокруг него расположен тесно примыкающий, но изолированный от него полый цилиндр из того же материала с внутренним радиусом $R/2$ и внешним радиусом R . Под действием внешнего напряжения вдоль внешнего и внутреннего цилиндров текут равные, но противоположно направленные токи, однородно распределенные по поперечному сечению цилиндров. При $t = 0$ приложенное напряжение снимается.

а) Найти распределение магнитного поля внутри цилиндров, существовавшее до момента $t = 0$.

б) Найти зависимость магнитного поля от времени после момента $t = 0$, пренебрегая токами смещения.

в) Каково поведение магнитного поля в функции от времени на большом интервале времени? Определить, что следует понимать под большим интервалом времени.

10.2. Сравнительно устойчивый самосжатый плазменный столб можно получить, создавая внутри плазмы перед ее сжатием продольное магнитное поле. Пусть в начальный момент плазма заполняет проводящую трубу радиусом R_0 , внутри которой имеется однородное продольное магнитное поле B_{z0} . Затем вдоль трубы прикладывается напряжение, так что начинает течь продольный ток, создающий азимутальное магнитное поле.

а) Показать, что, применяя условия равновесия, можно получить следующее уравнение баланса давлений:

$$\left[p(r) + \frac{B_z^2}{8\pi} + \frac{B_\Phi^2}{8\pi} \right] r_1 + \frac{1}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{B_\Phi^2}{r} dr = 0.$$

б) Пусть плазма имеет резкую границу и столь большую проводимость, что ток течет только в тонком поверхностном слое. Показать, что при этих условиях радиус плазменного столба $R(t)$ в квазистатическом приближении описывается уравнением

$$\frac{R_0}{R} \ln \frac{R_0}{R} = \frac{1}{t_0} \int_0^t f(t) dt,$$

где

$$t_0 = \frac{B_{z0} R_0}{c E_0},$$

а $E_0 f(t)$ — приложенное электрическое поле.

в) Пусть начальное продольное магнитное поле равно 100 гаусс, а приложенное электрическое поле в начальный момент равно 1 в/см и спадает почти линейно до нуля за 1 мсек. Определить конечный радиус, если начальный радиус равен 50 см. Эти условия приблизительно соответствуют английской тороидальной установке «Зета», но из-за внешних индуктивностей достигнутое в ней сжатие меньше расчетного (см. [24]).

10.3. Рассмотреть магнитогидродинамические волны в сжимаемой невязкой идеально проводящей жидкости в однородном статическом магнитном поле \mathbf{B}_0 . Если направление распространения не параллельно и не перпендикулярно \mathbf{B}_0 , то волны не разделяются на чисто продольные (магнитозвуковые) и поперечные (альфвеновские). Пусть угол между направлением распространения, характеризуемым волновым вектором \mathbf{k} , и полем \mathbf{B}_0 равен θ .

а) Показать, что имеются три различные волны, фазовые скорости которых определяются формулами

$$u_1^2 = (v_A \cos \theta)^2,$$

$$u_{2,3}^2 = \frac{1}{2} (s^2 + v_A^2) \pm \frac{1}{2} [(s^2 + v_A^2)^2 - 4s^2 v_A^2 \cos^2 \theta]^{1/2},$$

где s — скорость звука в жидкости, а $v_A = (B_0^2/4\pi Q_0)^{1/2}$ — альфвеновская скорость.

б) Найти волновые векторы этих трех волн и убедиться, что первая (альфвеновская) волна всегда поперечна, в то время как другие две волны не являются ни продольными, ни поперечными.

в) Определить фазовые скорости и волновые векторы смешанных волн в предположении, что $v_A \gg s$. Показать, что для одной из этих волн единственная существенная составляющая скорости параллельна магнитному полю, а для другой единственная составляющая скорости перпендикулярна полю и лежит в плоскости, содержащей \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 .

10.4. Несжимаемая невязкая идеально проводящая жидкость с постоянной плотностью Q_0 находится в однородном статическом магнитном поле \mathbf{B}_0 и на нее действует гравитационное поле с потенциалом ψ .

а) Показать, что существуют магнитогидродинамические волны произвольной амплитуды и формы $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, которые описываются уравнениями

$$(\mathbf{B}_0 \cdot \text{grad}) \mathbf{B}_1 = \pm \sqrt{4\pi Q_0} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t},$$

$$\mathbf{B}_1 = \pm \sqrt{4\pi Q_0} \mathbf{v},$$

$$\rho + Q_0 \psi + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)^2 = \text{const.}$$

б) Пусть при $t = 0$ в жидкости существует некоторое возмущение поля $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}, 0)$, удовлетворяющее этим уравнениям с верхним знаком. Определить поведение такого возмущения в функции от времени.

10.5. Уравнение движения для электронной плазмы, в которое включен феноменологический член, описывающий столкновения, но не учитывается гидростатическое давление (приближение нулевой температуры), имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \mathbf{v} \mathbf{v},$$

где v — частота столкновений.

а) Показать, что при наличии однородных внешних статического и магнитного полей линеаризованное выражение закона Ома для стационарных токов имеет вид

$$J_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k,$$

где тензор проводимости

$$\sigma_{ik} = \frac{\omega_p^2}{4\pi v (1 + \omega_B^2/v^2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\omega_B}{v} & 0 \\ -\frac{\omega_B}{v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\omega_B^2}{v^2} \end{pmatrix},$$

а ω_p и ω_B — соответственно электронная плазменная и лармортская частоты. Направление \mathbf{B} выбрано вдоль оси z .

б) Пусть при $t = 0$ внезапно включается внешнее электрическое поле \mathbf{E} , направленное вдоль оси x и перпендикулярное магнитному полю \mathbf{B} , направленному вдоль оси z . Пусть, далее, при $t = 0$ ток равен нулю. Найти выражения для составляющих тока в произвольный момент времени, в том числе и в период установления.

10.6. Влияние конечной температуры плазмы может быть приближенно описано с помощью кинетического уравнения Больцмана без учета столкновений (уравнение Власова). Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ является функцией распределения для электронов (с зарядом e и массой m) однокомпонентной плазмы. Уравнение Власова имеет вид

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}_x f + \mathbf{a} \cdot \text{grad}_v f = 0,$$

где grad_x и grad_v — градиенты в пространстве координат и скоростей, а \mathbf{a} — ускорение частицы. Для случая электростатических колебаний плазмы $\mathbf{a} = e\mathbf{E}/m$, где \mathbf{E} — макроскопическое электрическое поле, удовлетворяющее уравнению

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e \left[\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v - n_0 \right].$$

Пусть $f_0(\mathbf{v})$ — нормированная равновесная функция распределения электронов:

$$n_0 \int f_0(\mathbf{v}) d^3v = n_0.$$

а) Показать, что дисперсионное соотношение для малых продольных плазменных колебаний имеет вид

$$\frac{k^2}{\omega_p^2} = \int \frac{\mathbf{k} \cdot \text{grad}_v f_0}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d^3v.$$

б) Предполагая, что фазовая скорость волн велика по сравнению с тепловыми скоростями, показать, что это дисперсионное соотношение приводит к следующему разложению:

$$\frac{\omega^2}{\omega_p^2} \approx 1 + 2 \frac{\langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle}{\omega} + 3 \frac{\langle (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \rangle}{\omega^2} + \dots,$$

где знак $\langle \rangle$ означает усреднение по равновесному распределению $f_0(v)$. Сравнить этот результат с соответствующим выражением в тексте главы для модели электронной жидкости.

в) С чем связана особенность дисперсионного соотношения при $k \cdot v = \omega$?

10.7. Рассмотреть задачу о волнах в электронной плазме в присутствии внешнего магнитного поля B_0 . Использовать при этом модель электронной жидкости, пренебрегая членами, описывающими давление и столкновения.

а) Написать линеаризованные уравнения движения и уравнения Максвелла, предполагая, что все переменные изменяются пропорционально $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$.

б) Показать, что дисперсионное соотношение между частотами различных типов колебаний и волновыми числами можно записать в виде

$$\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2) (\omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2)^2 = \omega_B^2 (\omega^2 - k^2 c^2) [\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2) + \omega_p^2 c^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{b})^2],$$

где \mathbf{b} — единичный вектор в направлении B_0 , ω_p и ω_B — соответственно плазменная и ларморовская частоты.

в) Предполагая, что $\omega_B \ll \omega_p$, найти приближенное поведение корней для случаев, когда вектор \mathbf{k} параллелен \mathbf{b} и перпендикулярен \mathbf{b} . Построить зависимость ω^2 от k^2 для этих двух случаев.