

## *Глава 11*

# **СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Специальной теории относительности посвящено большое количество книг. Ее история тесно переплетается с историей электромагнетизма. Можно сказать, что формулировка уравнений Максвелла, объединивших электричество, магнетизм и оптику в единую теорию, подготовила почву для создания специальной теории относительности. Фундамент специальной теории относительности был заложен Лоренцом в его работах по электродинамике. Но наиболее определяющие принципы теории были сформулированы Эйнштейном, подвергшим критике ряд основных классических понятий. Хотя специальная теория относительности и ведет свое происхождение от электромагнетизма и оптики, в настоящий момент считают, что она применима и ко всем другим типам взаимодействий, за исключением, конечно, крупномасштабных гравитационных явлений. В современной физике эта теория служит пробным камнем при оценке правильности представлений о виде взаимодействия между элементарными частицами. Рассматриваются лишь те гипотезы о формах взаимодействий, которые согласуются со специальной теорией относительности, что является весьма существенным ограничением. Так как экспериментальные основы и развитие теории детально описаны во многих книгах, мы ограничимся лишь кратким изложением узловых пунктов.

### ***§ 1. Исторические предпосылки и основные эксперименты***

Последнее сорокалетие девятнадцатого века ознаменовалось триумфальным шествием волновой теории, основанной на уравнениях Максвелла. Эта теория позволила дать единое описание электрических, магнитных и оптических явлений. Из всего

предыдущего опыта, накопленного при изучении волнового движения, следовало, что волны всегда распространяются в некоей среде, поэтому для физиков вполне естественно было предположить, что для распространения света тоже необходима некоторая среда. Ряд известных свойств света заставлял предполагать, что эта среда, называемая *эфиром*, заполняет все пространство, имеет пре-небрежимо малую плотность и пренебрежимо слабо взаимодействует с веществом. Она служит только носителем распространяющихся в ней электромагнитных волн. Однако гипотеза эфира ставила электромагнитные явления особняком от остальной физики. Давно было известно, что законы механики одинаковы в различных системах координат, движущихся равномерно одна относительно другой, или, иными словами, законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея. Существование эфира подразумевает неинвариантность законов электромагнетизма относительно галилеевского преобразования координат, так как имеется преимущественная система координат, в которой эфир поконится и в которой скорость света в свободном пространстве равна  $c$ . В других системах координат скорость света получается при этом не равной  $c$ .

Чтобы избавить электромагнетизм от этого недостатка — невыполнения принципа относительности Галилея, имеется несколько путей. Мы можем:

1. Предположить, что скорость света равна  $c$  в той системе координат, в которой поконится источник.

2. Предположить, что преимущественной системой координат для света является система координат, связанная с материальной средой, через которую распространяется свет.

3. Предположить, что хотя эфир и очень слабо взаимодействует с веществом, но это взаимодействие достаточно для того, чтобы эфир увлекался астрономическими объектами, такими, например, как Земля.

Однако большое количество экспериментов заставило отказаться от всех трех гипотез и привело к созданию специальной теории относительности. Основными экспериментами были следующие:

1) наблюдение aberrации положений звезд за год;

2) опыт Физо по определению скорости света в движущихся жидкостях (1859 г.);

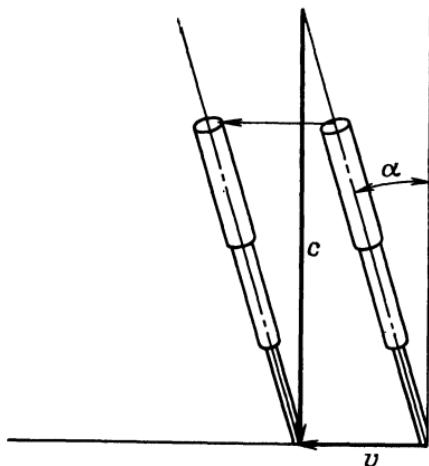
3) опыт Майкельсона — Морли по обнаружению движения относительно эфира (1887 г.).

Аберрация света звезды (малые сдвиги видимого положения далеких звезд в течение года) — давно известное явление, которое элементарно объясняется движением Земли по орбите вокруг Солнца со скоростью порядка  $3 \cdot 10^6$  см/сек. Пусть свет звезды падает нормально к земной поверхности, в то время как скорость движения Земли по орбите параллельна этой поверхности. Как видно из

фиг. 11.1, телескоп должен быть наклонен на угол

$$\alpha \approx \frac{v}{c} \sim 10^{-4} \text{ rad}, \quad (11.1)$$

поскольку, пока свет движется вниз к наблюдателю, телескоп сдвигается в сторону вместе с Землей. Через полгода вектор скорости  $v$  будет иметь противоположное направление и звезда будет видна под углом  $\alpha$  по другую сторону от вертикали. В течение года видимые положения звезд записывают на небесной сфере эллиптические



Ф и г. 11.1. Аберрация положения звезд.

орбиты с угловыми размерами порядка (11.1). Это простое объяснение аберрации противоречит гипотезам о том, что скорость света определяется материальной средой, в которой распространяется свет (в данном случае атмосферой), или что эфир увлекается Землей. В обоих случаях аберрации не было бы.

Опыт Физо заключается в измерении с помощью интерферометра скорости света в жидкостях, текущих по трубкам как навстречу направлению распространения света, так и в том же направлении. Если показатель преломления жидкости равен  $n$ , то в зависимости от того, какую из гипотез мы принимаем, ожидаемая скорость должна описываться либо первым, либо вторым из выражений

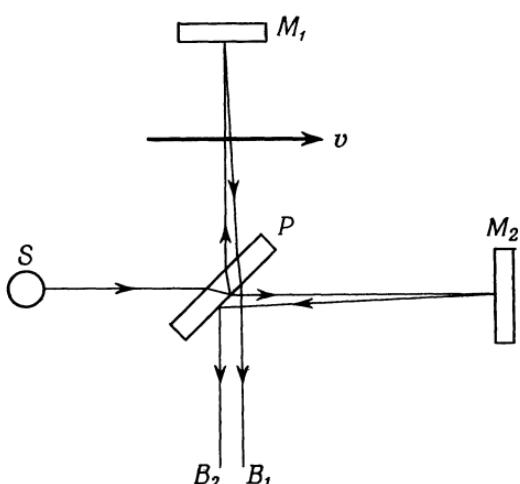
$$u = \frac{c}{n}, \quad u = \frac{c}{n} \pm v, \quad (11.2)$$

где  $v$  — скорость потока. В действительности же в пределах экспериментальных ошибок результат, полученный Физо, описывается формулой

$$u = \frac{c}{n} \pm v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (11.3)$$

Этот результат можно согласовать с гипотезой увлечения эфира Землей, только если предположить, что малые тела лишь частично способны увлекать с собой эфир. Такое предположение носит довольно искусственный характер<sup>1)</sup>.

Опыт Майкельсона — Морли ставился с целью обнаружения движения Земли относительно прецессионной системы координат (связанной с эфиром), в которой скорость света равна  $c$ . Основная установка показана схематически на фиг. 11.2. Свет от лабораторного источника  $S$  фокусируется на полупрозрачную посеребренную стеклянную пластинку  $P$ , которая делит луч на два луча,



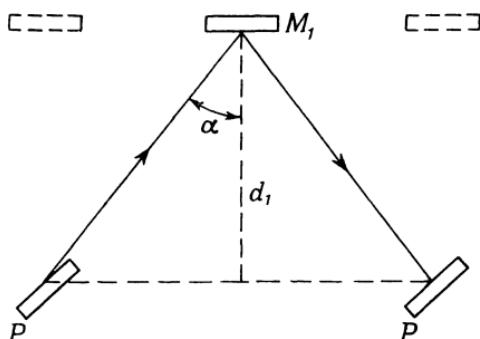
Фиг. 11.2. Опыт  
Майкельсона — Морли.

перпендикулярные друг другу. Один из них идет к зеркалу  $M_1$ , отражаясь, проходит опять через пластинку  $P$  и попадает в  $B_1$ , а другой идет к зеркалу  $M_2$ , обратно к пластинке и отражается к  $B_2$ . Условия таковы, что оба луча проходят почти одинаковые расстояния. Малое различие в длине пути или времени распространения проявляется в сдвиге интерференционных полос, образуемых двумя лучами. Вся установка была прикреплена к каменной плите, плавающей в ртути, так что ее можно было поворачивать вокруг вертикальной оси. Предположим, что скорость Земли  $v$  сквозь эфир параллельна пути распространения света от  $P$  к  $M_2$ . При этом скорость света относительно прибора на пути от  $P$  к  $M_2$  и обратно есть  $c \pm v$ . Если расстояние от  $P$  до  $M_2$  равно  $d_2$ , то время, необходимое свету, чтобы пройти от  $P$  до  $M_2$  и обратно, равно

$$t_2 = d_2 \left( \frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = \frac{2d_2}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2}. \quad (11.4)$$

<sup>1)</sup> Формула (11.3) была теоретически выведена Френелем в 1818 г. на основе предположения о том, что модуль упругости эфира в веществе пропорционален  $n^2$ .

Движение света от  $P$  к  $M_1$  и обратно удобно рассматривать в системе координат, связанной с эфиром. Очевидно, что длина пути, проходимого лучом, больше расстояния  $d_1$  от  $P$  до  $M_1$  вследствие движения зеркала через эфир со скоростью  $v$ .



Ф и г. 11.3.

Геометрические соотношения для этого случая показаны на фиг. 11.3. Очевидно,  $\sin \alpha = v/c$ , так что длина пути луча

$$2d_1 \sec \alpha = 2d_1 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

а для прохождения этого пути необходимо время

$$t_1 = \frac{2d_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (11.5)$$

Разность времен прохождения для обоих лучей составляет

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left( \frac{d_2}{1-v^2/c^2} - \frac{d_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (11.6)$$

При условии  $v \ll c$  мы можем разложить знаменатели в ряд по  $v^2/c^2$ :

$$\Delta t \approx \frac{2}{c} \left[ (d_2 - d_1) + \frac{v^2}{c^2} \left( d_2 - \frac{d_1}{2} \right) \right]. \quad (11.7)$$

Если прибор повернуть на  $90^\circ$ , то времена прохождения становятся соответственно равными

$$t'_2 = \frac{2d_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$t'_1 = \frac{2d_1}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2}, \quad (11.8)$$

а их разность в первом порядке по  $v^2/c^2$  равна

$$\Delta t' \approx \frac{2}{c} \left[ (d_2 - d_1) + \frac{v^2}{c^2} \left( \frac{d_2}{2} - d_1 \right) \right]. \quad (11.7)$$

Поскольку  $\Delta t$  и  $\Delta t'$  неодинаковы, при повороте прибора должен возникнуть сдвиг интерференционных полос, пропорциональный разности

$$\Delta t' - \Delta t = -\frac{1}{c} (d_1 + d_2) \frac{v^2}{c^2}. \quad (11.9)$$

Орбитальная скорость Земли составляет около  $3 \cdot 10^6 \text{ см/сек}$ , поэтому можно считать, что  $v^2/c^2$  имеет величину порядка  $10^{-8}$ , по крайней мере в течение какой-то части года. Для  $(d_1 + d_2) \sim 3 \cdot 10^2 \text{ см}$  разность времен (11.9) равна  $10^{-16} \text{ сек}$ . Это означает, что соответствующая длина (которую следует сравнить с длиной волны света) равна  $c |\Delta t' - \Delta t| \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ см} = 300 \text{ \AA}$ . Поскольку длина волны видимого света имеет величину порядка  $3000 \text{ \AA}$ , ожидаемый сдвиг полос должен составлять около  $1/10$  полосы.

Точность опыта Майкельсона — Морли давала возможность наблюдать относительную скорость  $10^6 \text{ см/сек}$  (что в 3 раза меньше скорости Земли). Однако никакого сдвига полос не было обнаружено. С тех пор первоначальный эксперимент Майкельсона был многократно повторен с различными длинами световых путей, но никаких свидетельств, подтверждающих относительное движение сквозь эфир, не было найдено. Сводка всех экспериментальных результатов приведена в работе Шенкленда и др. [93].

Отрицательный результат опыта Майкельсона — Морли можно было бы объяснить гипотезой об увлечении эфира. Однако этой гипотезе противоречит существование явления аберрации света звезд. Со всеми тремя описанными экспериментами согласуются лишь так называемые эмиссионные теории, в которых скорость света считается постоянной относительно источника. Но в § 2 мы увидим, что целый ряд экспериментов исключает эти теории. Положительной стороной опыта Майкельсона — Морли можно считать лишение электромагнетизма его исключительного положения в отношении принципа относительности. Не было обнаружено никаких эффектов, которые зависели бы от движения прибора по отношению к предполагаемой абсолютной системе отсчета. Следует отметить, однако, что Фицджеральд и Лоренц (1892 г.), сохраняя понятие эфира, объяснили нулевой результат опытов Майкельсона — Морли, постулировав, что при движении сквозь эфир все материальные тела сокращают свои размеры вдоль направления движения. Сокращение определяется законом

$$L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11.10)$$

Из (11.4) или (11.7) ясно, что эта гипотеза приводит в формуле (11.9) к нулевому значению разности  $\Delta t' - \Delta t$ . Гипотеза сокращения Фицджеральда — Лоренца была, по-видимому, последней надежной сторонников теории эфира, и в ней уже содержатся зачатки специальной теории относительности. В специальной теории относительности явление сокращения вытекает из общих принципов и применимо ко всем системам, движущимся относительно друг друга.

Наряду с изменением масштабов имеет место также твердо установленное экспериментально явление замедления времени (которое не было постулировано Фицджеральдом и Лоренцом). Эти вопросы будут рассмотрены в § 3 настоящей главы.

## § 2. Постулаты специальной теории относительности и преобразование Лоренца

В 1904 г. Лоренц показал, что уравнения Максвелла в свободном пространстве инвариантны относительно преобразования координат (11.19) (которое называется теперь *преобразованием Лоренца*), если принять, что напряженности полей также преобразуются подходящим образом. В предположении, что все вещества имеют электромагнитную природу и поэтому для него справедливы уравнения Максвелла, Лоренцу удалось вывести закон сокращения (11.10). Затем Пуанкаре показал, что при соответствующем преобразовании плотностей зарядов и токов все уравнения электродинамики становятся инвариантными относительно преобразования Лоренца. В 1905 г. почти одновременно с Пуанкаре и не зная о работе Лоренца, Эйнштейн сформулировал в общей и вполне замкнутой форме специальную теорию относительности, где были, в частности, получены результаты Лоренца и Пуанкаре и было показано, что исходные принципы имеют гораздо более широкую область применимости. Вместо того чтобы исходить из электродинамики, Эйнштейн показал, что достаточно лишь двух постулатов, один из которых касается весьма общего свойства света.

Два постулата Эйнштейна заключаются в следующем:

### 1. Постулат относительности

Законы природы и результаты всех опытов, производимых в какой-либо системе отсчета, не зависят от равномерного прямолинейного движения системы в целом. Таким образом, существует трижды бесконечное множество эквивалентных систем отсчета, которые движутся прямолинейно с постоянными скоростями относительно друг друга и в которых все физические явления происходят одинаково.

Для краткости эти эквивалентные координатные системы называют *галилеевскими системами отсчета*. Постулат относительности

согласуется со всем нашим опытом, накопленным в механике, где имеет смысл только относительное движение тел. Он согласуется также с опытом Майкельсона — Морли и делает бессмысленной постановку вопроса об определении движения относительно эфира.

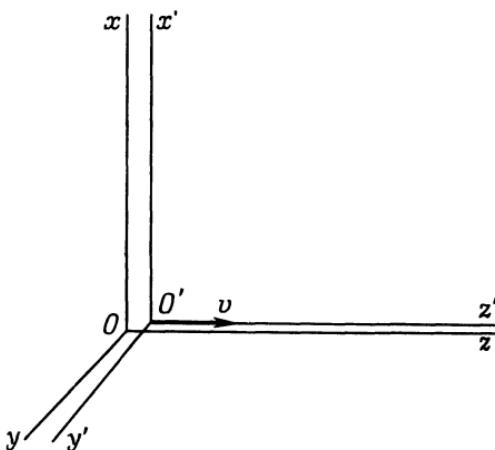
## 2. Постулат постоянства скорости света

Скорость света не зависит от движения источника.

Эта гипотеза, которая в момент ее выдвижения Эйнштейном еще не была подтверждена экспериментально, является необходимой и решающей предпосылкой для получения преобразований Лоренца и всех их следствий (см. ниже). Поскольку этот постулат противоречит нашему классическому представлению о времени как о переменной, не зависящей от пространственных координат, то длительное время его не признавали. Было сделано много остроумных попыток создания теорий, которые объяснили бы все наблюдаемые явления без привлечений этой гипотезы. Одной из выдающихся попыток было видоизменение электродинамики, предложенное Ритцем. В этой теории два однородных уравнения Максвелла оставлялись без изменений, а уравнения, содержащие источники, видоизменялись таким образом, чтобы скорость света была равна  $c$ , только при измерении ее относительно источника. В настоящее время экспериментально доказано, что все эти теории неверны, и установлено постоянство скорости света независимо от движения источника. Одним из таких экспериментов был опыт, поставленный с интерферометром Майкельсона — Морли, где вместо земного источника света использовался свет звезд. При этом не было обнаружено никаких эффектов, связанных с изменением скорости света из-за относительного движения звезды и Земли. Другой эксперимент, где использовался свет от вращающихся двойных звезд, показал, что скорость света в пределах точности не зависит от движения звезд к нам или от нас (если  $c' = c + kv$ , то  $|k| < 0,002$ ).

Постоянство скорости света независимо от движения источника позволяет найти связь между пространственно-временными координатами в различных галилеевских системах отсчета. Рассмотрим для этого две координатные системы  $K$  и  $K'$ . Система  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $v$  в положительном направлении вдоль оси  $z$  таким образом, что координатные оси обеих систем остаются параллельными (фиг. 11.4). Пространственно-временные точки в этих двух системах мы обозначим соответственно через  $(x, y, z, t)$  и  $(x', y', z', t')$ . Предположим для простоты, что время в обеих системах отсчитывается от того момента  $t = t' = 0$ , когда координатные оси этих систем точно совпадали. Пусть наблюдатели в каждой из систем снабжены всеми необходимыми прибора-

ми (например, системой сверенных часов и фотоэлементами, расположеннымными на известных расстояниях от начала координат), которые позволяют определить время прибытия светового сигнала из начала координат в различные точки пространства. Если в системе  $K$  имеется покоящийся источник света (так что в системе  $K'$  он движется со скоростью  $v$  в отрицательном направлении оси  $z$ ), который вспыхивает и быстро гаснет в момент  $t = t' = 0$ , то, согласно второму постулату Эйнштейна, оба наблюдателя с помощью своей системы фотоэлементов должны обнаружить сферическую световую



Ф и г. 11.4.

волну, расходящуюся от соответствующего начала координат со скоростью  $c$ . Следовательно, время прибытия импульса на детектор, находящийся в точке  $x, y, z$  в системе  $K$ , будет удовлетворять уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (11.11)$$

Аналогично в системе  $K'$  волновой фронт описывается уравнением

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (11.12)$$

На первый взгляд соотношения (11.11) и (11.12) противоречат первому постулату Эйнштейна. Если оба наблюдателя, находящихся в различных координатных системах, видят сферические волны с центрами в началах координат каждой системы, то эти сферы должны быть различными! Это кажущееся противоречие устраняется, если допустить возможность того, что события, одновременные в одной координатной системе, не обязательно одновременны в другой координатной системе, движущейся относительно первой. Мы вправе ожидать теперь, что время не является абсолютной

величиной, не зависящей от пространственных переменных и относительного движения.

Для получения связи между координатами  $(x', y', z', t')$  в системе  $K'$  и координатами  $(x, y, z, t)$  в системе  $K$  достаточно потребовать, чтобы соответствующее преобразование было линейным. Это требование представляется весьма правдоподобным и эквивалентно предположению об однородности и изотропности пространства — времени. Если преобразование линейно, то связь между квадратичными формами (11.11) и (11.12) может иметь лишь следующий вид:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2), \quad (11.13)$$

где  $\lambda = \lambda(v)$  и  $\lambda(0) = 1$ . Введение множителя  $\lambda$  предполагает возможность изменения масштаба при переходе от  $K$  к  $K'$ . При этом поверхность излученного импульса в обеих системах остается сферой. Поскольку мы предположили, что система  $K'$  движется параллельно оси  $z$  системы  $K$ , то очевидно, что преобразование  $x'$  и  $y'$  должно иметь вид

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y \quad (11.14)$$

и не содержать времени, так как движение, параллельное оси  $z$  в системе  $K'$ , должно оставаться таким же и в системе  $K$ . Наиболее общее линейное преобразование, связывающее  $z', t'$  с  $z, t$ , имеет вид

$$z' = \lambda(a_1 z + a_2 t), \quad t' = \lambda(b_1 t + b_2 z), \quad (11.15)$$

где для удобства выделен множитель  $\lambda$ . Коэффициенты  $a_1, a_2, b_1$  и  $b_2$  являются функциями  $v$  и имеют следующие предельные значения при  $v \rightarrow 0$ :

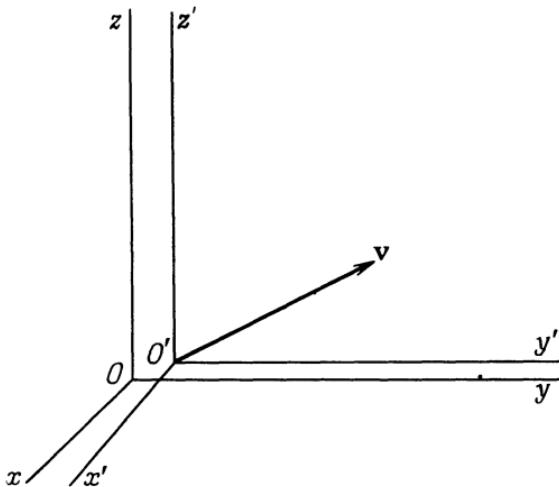
$$\lim_{v \rightarrow 0} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (11.16)$$

Начало координат системы  $K'$  движется в системе  $K$  со скоростью  $v$ . Следовательно, его положение определяется равенством  $z = vt$ . Отсюда следует, что в соотношениях (11.15)  $a_2 = -va_1$ . Подставляя (11.15) в (11.13), мы приходим к трем алгебраическим уравнениям для  $a_1, b_1$  и  $b_2$ . Решая эти уравнения, получаем следующие величины:

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (11.17)$$

$$b_2 = -\frac{v}{c^2} a_1,$$

где знак выбран в соответствии с (11.16). Нам остается теперь только определить  $\lambda(v)$ . Введем третью систему отсчета  $K''$ , движущуюся со скоростью  $-v$  вдоль оси  $z$  относительно системы  $K'$ . При этом координаты  $(x'', y'', z'', t'')$  выражаются через  $(x', y', z', t')$  с помощью полученных выше формул, если просто изменить



Ф и г. 11.5.

знак  $v$ . Но система  $K''$  это не что иное, как исходная система  $K$ , так что  $x'' = x$ ,  $y'' = y$ ,  $z'' = z$ ,  $t'' = t$ . Это приводит к требованию

$$\lambda(v) \lambda(-v) = 1. \quad (11.18)$$

Поскольку множитель  $\lambda(v)$  выражает изменение масштаба в попечерном направлении, он не должен зависеть от знака  $v$ , откуда следует, что  $\lambda(v) = 1$ . Теперь мы уже в состоянии написать преобразование Лоренца, связывающее координаты в системе  $K'$  с координатами в системе  $K$ :

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11.19)$$

Это преобразование соответствует частному случаю, когда относительное движение систем  $K$  и  $K'$  параллельно оси  $z$ . Нетрудно получить также соответствующие соотношения для произвольного направления скорости  $v$  движения системы  $K'$  относительно  $K$  (фиг. 11.5). Соотношения (11.19), очевидно, относятся к составляющим радиуса-вектора  $x$ , параллельным и перпендикулярным  $v$ :

$$x'_\parallel = \frac{x_\parallel - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_\perp = x_\perp, \quad t' = \frac{t - v \cdot x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11.20)$$

Согласно определению,  $x_{||} = (v \cdot x) v/v^2$ ,  $x_{\perp} = x - x_{||}$  и, следовательно, уравнения (11.20) приводят к общему преобразованию Лоренца<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} x' &= x + \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{x \cdot v}{v^2} v - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} vt, \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( t - \frac{x \cdot v}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (11.21)$$

Следует подчеркнуть, что (11.21) описывает одно преобразование Лоренца к системе отсчета  $K'$ , движущейся со скоростью  $v$  относительно системы  $K$ . Два последовательных преобразования Лоренца, вообще говоря, неперестановочны. Можно показать, что они перестановочны лишь в том случае, когда относительные скорости параллельны. Следовательно, три последовательных преобразования для скоростей, соответствующих составляющим  $v$  по трем взаимно перпендикулярным направлениям, приводят к различным результатам в зависимости от порядка применения преобразований и ни одно из них не совпадает с (11.21) (см. задачу 11.2).

### § 3. Сокращение Фицджеральда — Лоренца и замедление времени<sup>2)</sup>

Как отмечалось выше, Фицджеральд и Лоренц предложили правило сокращения (11.10) для размеров предметов вдоль направления их движения со скоростью  $v$  относительно эфира. Лоренц обосновал этот закон электродинамически, исходя из свойств уравнений Максвелла при преобразованиях Лоренца. Мы сейчас покажем, что сокращение длины в направлении движения является общим законом, применимым к любому относительному движению. Рассмотрим стержень длиной  $L_0$ , расположенный вдоль оси  $z'$  и покоящийся в системе  $K'$ , обсуждавшейся в § 2 (фиг. 11.6). По определению,  $L_0 = z'_2 - z'_1$ , где  $z'_1$  и  $z'_2$  — координаты концов стержня в системе  $K'$ . В системе  $K$  длина  $L$  стержня равна, опять-таки по опреде-

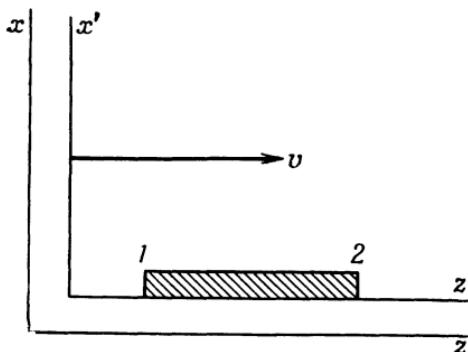
<sup>1)</sup> Термин «общее» обычно не применяется к преобразованию (11.21). Здесь он означает только, что скорость  $v$  может иметь произвольное направление. Более общее преобразование предполагает также поворот осей системы  $K$  относительно  $K'$ . Но и такое преобразование Лоренца не является наименее общим, так как оно остается однородным по координатам. Общее неоднородное преобразование Лоренца включает также перенос начала координат в пространстве — времени (см. [74]).

<sup>2)</sup> Автор пользуется несколько устаревшими терминами «сокращение длины», «замедление времени», которые в свое время вызывали ряд философских кривотолков. Мы сочли возможным сохранить эти термины, полагая, что у современного читателя они не вызовут никаких недоразумений.— Прим. ред.

лению,  $L = z_2 - z_1$ , где  $z_1$  и  $z_2$  — мгновенные значения координат концов стержня, измеренные в один и тот же момент времени  $t$ . Согласно (11.19), длина стержня в системе  $K'$  равна

$$L_0 = z'_2 - z'_1 = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (11.22)$$

что и совпадает с результатом Фицджеральда — Лоренца (11.10). Подчеркнем еще раз, что в системе  $K$  длина определяется измерением координат концов стержня в один и тот же момент времени  $t$ .



Фиг. 11.6. Движущийся стержень (сокращение Фицджеральда — Лоренца)

То, что в системе  $K'$  это соответствует различным моментам времени, не имеет отношения к измерению длины в системе  $K$ . Это еще одна иллюстрация относительности понятия одновременности событий.

Другим следствием специальной теории относительности является замедление времени. Часы, движущиеся относительно наблюдателя, представляются идущими более медленно, чем покоящиеся часы. Наиболее «физическими» из имеющихся в нашем распоряжении часов являются нестабильные элементарные частицы. Частицы данного типа распадаются в состоянии покоя за вполне определенное (среднее) время жизни, не зависящее от внешних воздействий, за исключением ядерных и атомных сил, которые приводят к хорошо известным изменениям<sup>1)</sup>. Эти частицы можно использовать в качестве «часов», которые можно наблюдать как в состоянии покоя, так и в состоянии движения. Допустим, что мы рассматриваем мезон со временем жизни покоя, равным  $\tau_0$ , покоящийся в системе  $K'$ , которая движется с постоянной скоростью  $v$  относительно системы

<sup>1)</sup> Например, отрицательные  $\mu$ -мезоны могут быть захвачены на водородоподобные орбиты вокруг ядер, энергиями связи которых нельзя пренебречь по сравнению с энергией, высвобождающейся при распаде. Так как скорость распада существенно зависит от выделяющейся энергии (примерно как пятая степень  $\Delta E$ ), то сильно связанный отрицательный  $\mu$ -мезон имеет значительно меньшую скорость распада, чем такой же свободный мезон.

*K.* Предположим, что мезон родился в момент времени  $t' = t = 0$  в начале координат системы  $K'$ . Очевидно, в системе  $K$  положение мезона определяется координатой  $z = vt$ . Если в системе  $K'$  он живет в течение времени  $\tau_0$ , а затем распадается, то мы находим

$$t' = \tau_0 = \frac{t - (v/c^2) z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11.23)$$

Время  $t$  — это время жизни мезона  $\tau$ , измеренное в системе  $K$ . Следовательно,

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11.24)$$

Итак, при наблюдении в системе  $K$  движущийся мезон живет дольше, чем мезон, который покоится в системе  $K$ . Движущиеся часы кажутся идущими медленнее, чем такие же покоящиеся часы.

Замедление времени наблюдалось на  $\mu$ -мезонах большой энергии в космических лучах. Такие мезоны образуются в качестве вторичных частиц на высоте порядка 10—20 км, и большая часть из них достигает поверхности Земли. Так как среднее время жизни  $\mu$ -мезона равно  $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$  сек, то, если бы не было замедления времени, он проходил бы до распада в среднем расстояние не большее  $c\tau_0 = 0,66$  км. Очевидно, имеет место увеличение времени жизни не менее чем в 10 раз, что согласуется с большой энергией этих частиц (их скорость близка к скорости света).

Нетрудно поставить и лабораторный эксперимент по определению эффекта замедления времени для  $\pi$ -мезонов. Заряженный  $\pi$ -мезон имеет среднее время жизни  $2,56 \cdot 10^{-8}$  сек. В Колумбийском университете был поставлен опыт<sup>1)</sup> по определению числа заряженных  $\pi$ -мезонов, распадающихся в полете на единице длины, в функции расстояния от источника мезонов (см. [38]). Скорость мезонов  $v$  составляла около 0,75с. Число мезонов, распадающихся на единице длины, должно следовать экспоненциальному закону

$$N(x) = N_0 e^{-x/\lambda},$$

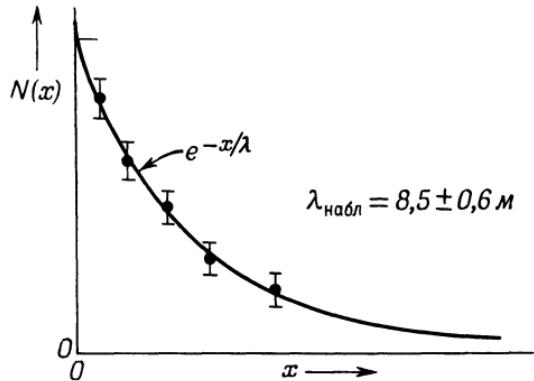
где  $\lambda$  — средний свободный пробег, а  $x$  — расстояние от источника (с учетом поправки на конечный телесный угол и т. п.). На фиг. 11.7 схематически показаны результаты этого опыта. Средний свободный пробег оказался равным  $\lambda = 8,5 \pm 0,6$  м. Поскольку  $\lambda = vt$ , лабораторное время жизни  $\tau$  равно  $(3,8 \pm 0,3) \cdot 10^{-8}$  сек.

<sup>1)</sup> В действительности этот эксперимент ставился для определения времени жизни  $\pi$ -мезонов, а эффект замедления времени жизни считался известным. Однако, если считать время жизни известным, аргументация может быть обращена так, как мы это делаем здесь.

следовательно,

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{3,8 \pm 0,3}{2,56} = 1,5 \pm 0,1.$$

Эту величину следует сравнить с величиной 1,51, получающейся согласно (11.24) при  $v = 0,75c$ . Лабораторный опыт по определе-



Фиг. 11.7. Схематическая зависимость числа  $\pi$ -мезонов, распадающихся на единице длины, от расстояния до источника.

нию замедления времени не столь эффектен, как наблюдение космических лучей, но имеет много преимуществ, так как он ставится в контролируемых условиях и в сравнительно малом объеме.

#### § 4. Сложение скоростей. Аберрация и опыт Физо. Допплеровское смещение

Преобразование Лоренца (11.19) можно использовать и для нахождения закона сложения скоростей. Предположим, что в системе  $K'$  имеется вектор скорости  $u'$ , образующий с осью  $z'$  полярные углы  $\theta'$  и  $\phi'$  (фиг. 11.8). Система  $K'$  движется относительно системы  $K$  в  $z$ -направлении со скоростью  $v$ . Мы хотим определить составляющие скорости  $u$  в системе  $K$ . Из преобразования (11.19), или лучше из обратного к нему, мы получаем следующие выражения для дифференциалов  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и  $dt$ :

$$dx = dx' \quad dy = dy', \\ dz = \frac{dz' + v dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dt = \frac{dt' + (v/c^2) dz'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11.25)$$

Отсюда получаем составляющие скорости:

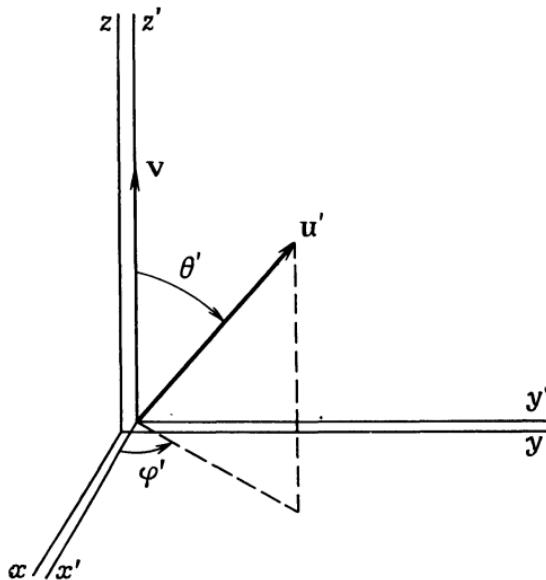
$$u_x = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_z/c^2} u'_x, \quad u_y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_z/c^2} u'_y, \\ u_z = \frac{u'_z + v}{1 + vu'_z/c^2}. \quad (11.26)$$

Легко определить также абсолютную величину и углы  $\theta$  и  $\varphi$  скорости  $\mathbf{u}$  в системе  $K$ . Так как  $u'_x/u'_y = u_x/u_y$ , то азимутальные углы совпадают:  $\varphi = \varphi'$ . Далее

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{u' \sin \theta'}{u' \cos \theta' + v}, \\ u &= \frac{\sqrt{u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \theta' - (u'v \sin \theta'/c)^2}}{1 + (u'v/c^2) \cos \theta'}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Обратное представление  $(u', \theta')$  через  $(u, \theta)$  получается перестановкой  $u \leftrightarrow u'$ ,  $\theta \leftrightarrow \theta'$  и изменением знака  $v$ .

Выражения (11.26) и (11.27) показывают, что для скоростей  $u'$  и  $v$ , малых по сравнению со скоростью света, справедлив принцип



Ф и г. 11.8. Сложение скоростей.

относительности Галилея:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}$ . Однако если хотя бы одна из этих скоростей близка к скорости света, то появляются особенности. Скорость, большую скорости света, невозможно получить даже при сложении двух скоростей, каждая из которых близка к  $c$ . Для простейшего случая параллельных скоростей закон сложения имеет вид

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}. \quad (11.28)$$

Если  $u' = c$ , то, согласно (11.28), получаем, что и  $u = c$ . Этот результат представляет собой явное выражение второго постулата Эйнштейна.

Этот закон сложения скоростей согласуется с явлением aberrации света звезд и с результатами опыта Физо. При рассмотрении aberrации под скоростью  $u'$  следует понимать скорость света в системе  $K'$ , так что  $u' = c$ , а  $v$  является орбитальной скоростью Земли. Угол  $\theta$  оказывается связанным с  $\theta'$  соотношением

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sin \theta'}{\cos \theta' + v/c}. \quad (11.29)$$

Для света звезды, падающего нормально на Землю,  $\theta' = \pi/2$  и

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{c}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11.30)$$

Угол  $\theta$  является дополнительным к углу  $\alpha$  в (11.1), и, следовательно, для  $\operatorname{tg} \alpha$  мы получаем выражение

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (11.31)$$

полностью согласующееся с наблюдаемым (так как  $v/c \sim 10^{-4}$ , то отличие радикала от единицы лежит далеко за пределами точности наблюдения).

В простейшем варианте опыта Физо поток жидкости имеет скорость  $v$ , параллельную или антипараллельную направлению распространения света. Если  $n$  — показатель преломления жидкости, то свет распространяется относительно жидкости со скоростью  $u' = c/n$ . Согласно (11.28), скорость света, наблюдавшаяся в лаборатории, должна быть равна

$$u = \frac{c/n \pm v}{1 \pm v/nc} \approx \frac{c}{n} \pm v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (11.32)$$

Последнее выражение является разложением точного результата до членов первого порядка малости. Оно находится в согласии с формулой Френеля (11.3). Если показатель преломления зависит от длины волны, то в (11.32) появляется дополнительный член, который возникает из-за допплеровского смещения длины волны в движущейся жидкости. Приращение  $\Delta\lambda$  длины волны в движущейся жидкости с точностью до членов первого порядка по  $v/c$  равно

$$\Delta\lambda = \pm \lambda n \frac{v}{c}, \quad (11.33)$$

где верхний знак соответствует случаю параллельных, а нижний — случаю антипараллельных скоростей. Следовательно, скорость света в жидкости равна

$$\frac{c}{n(\lambda + \Delta\lambda)} \approx \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda.$$

Таким образом, уточненное выражение (11.32) имеет вид

$$u = \frac{c}{n} \pm v \left( 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (11.34)$$

Добавочное изменение скорости, связанное с дисперсией, наблюдалось экспериментально.

Релятивистскую формулу для допплеровского смещения можно получить из условия инвариантности фазы световой волны. Действительно, фаза любой плоской волны инвариантна относительно преобразований Лоренца, поскольку ее определение может быть сведено к простому счету, не зависящему от координатной системы. Рассмотрим плоскую волну с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  в системе отсчета  $K$ . Пусть наблюдатель, находящийся в точке  $P$  с координатой  $\mathbf{x}$ , считает число гребней волн, которые доходят до него за определенное время. Если гребень, который прошел через начало координат при  $t = 0$ , зафиксирован им первым (в момент, когда он дошел до наблюдателя), то к моменту  $t$  наблюдатель насчитает

$$\frac{1}{2\pi} (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

гребней волн. Теперь представим себе другую систему отсчета  $K'$ , движущуюся относительно системы  $K$  со скоростью  $v$ , параллельной оси  $z$ , причем начала координат этих систем совпадают в момент  $t = 0$ . Наблюдатель, находящийся в системе  $K'$  в точке  $P'$  с координатой  $\mathbf{x}'$ , поступает аналогично наблюдателю в  $K$ . Он начинает считать, когда его достигает гребень волны, прошедший через начало координат в момент  $t' = 0$ , и ведет счет до момента  $t'$ . Если точка  $P'$  в конце периода счета совмещается с точкой  $P$ , то оба наблюдателя должны насчитать одинаковое количество гребней волн. Поскольку наблюдатель в  $K'$  насчитает

$$\frac{1}{2\pi} (\omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}')$$

гребней волн, где  $\mathbf{k}'$  и  $\omega'$  — волновой вектор и частота плоской волны в  $K'$ , то фаза волны действительно является инвариантом. Следовательно,

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t; \quad (11.35)$$

отсюда, согласно формулам преобразования (11.19),

$$\begin{aligned} k'_x &= k_x, \quad k'_y = k_y, \\ k'_z &= \frac{k_z - (v/c^2) \omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \omega' = \frac{\omega - v k_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Для световых волн  $|k| = \omega/c$ , а  $|k'| = \omega'/c$ . Таким образом, полученный результат можно представить в виде

$$\begin{aligned}\omega' &= \frac{\omega}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right), \\ \operatorname{tg} \theta' &= \frac{\sin \theta \sqrt{1-v^2/c^2}}{\cos \theta - v/c},\end{aligned}\quad (11.37)$$

где  $\theta$  и  $\theta'$  — углы векторов  $k$  и  $k'$  со скоростью  $v$ . Последнее из этих соотношений является обратным соотношению (11.29).

Иногда полезно выражение частоты  $\omega'$  через угол  $\theta'$  волны в системе  $K'$ . Его можно получить сразу из соотношения, обратного первому соотношению (11.37):

$$\omega' = \frac{\omega \sqrt{1-v^2/c^2}}{1 + (v/c) \cos \theta'}. \quad (11.38)$$

Первое соотношение (11.37) дает обычное допплеровское смещение с релятивистской поправкой (корень в знаменателе). Благодаря этой поправке имеет место поперечное допплеровское смещение даже в случае  $\theta = \pi/2$ . Это релятивистское поперечное допплеровское смещение наблюдалось спектроскопически на движущихся атомах (опыт Айвза — Стилвелла, 1938 г.). Оно было измерено также прецизионным методом резонансного поглощения с помощью ядерного источника  $\gamma$ -лучей, помещенного на оси быстро вращающегося цилиндра, с поглотителем, прикрепленным к боковой поверхности цилиндра.

### § 5. Прецессия Томаса

В 1926 г. Уленбек и Гаудсмит ввели понятие электронного спина и показали, что если положить  $g$ -фактор<sup>1)</sup> электрона равным 2, то этим можно объяснить аномальный эффект Зеемана и наличие мультиплетного расщепления. Однако при этом возникала трудность, заключающаяся в том, что наблюдаемые интервалы тонкой структуры оказывались вдвое меньше теоретически предсказываемых. Если же выбрать  $g$ -фактор равным единице, то интервалы тонкой структуры будут получаться правильными, но эффект Зеемана станет нормальным. Полное объяснение спина, включая правильный  $g$ -фактор и правильное описание тонкой структуры, дала только релятивистская теория электрона Дирака. Однако, исходя лишь из эмпирического значения спинового момента количества движения и  $g$ -фактора, равного 2, Томас показал, что причиной расхождения является релятивистский кинематический эффект, который при корректном учете дает как аномальный эффект Зеемана.

<sup>1)</sup> См. гл. 5, § 6.— Прим. ред.

на, так и правильную тонкую структуру линий. Так называемая *томасовская прецессия* позволяет также качественно объяснить спин-орбитальное взаимодействие в атомном ядре и объясняет причину «обращения» дублетов в ядре.

Гипотеза Уленбека — Гаудсмита заключается в том, что электрон обладает спиновым моментом количества движения  $\mathbf{S}$  (который вдоль произвольной оси принимает квантованные значения  $\pm \hbar/2$ ) и магнитным моментом  $\mu$ , связанным с  $\mathbf{S}$  соотношением

$$\mu = \frac{e}{mc} \mathbf{S}. \quad (11.39)$$

Обычное соотношение между магнитным моментом и моментом количества движения дается формулой (5.64). Соотношение (11.39) показывает, что электрон имеет  $g$ -фактор, равный 2. Предположим, что электрон движется со скоростью  $v$  во внешних полях  $E$  и  $B$ . Тогда уравнение изменения момента количества движения в системе координат, где электрон покоятся, будет

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mu \times \mathbf{B}', \quad (11.40)$$

где  $\mathbf{B}'$  — магнитное поле в этой системе. В § 10 будет показано, что магнитное поле в системе координат, движущейся вместе с электроном, дается выражением

$$\mathbf{B}' \approx \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad (11.41)$$

где отброшены члены порядка  $v^2/c^2$ . Следовательно, согласно (11.40),

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mu \times \left( \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right). \quad (11.42)$$

Уравнение (11.42) соответствует энергии взаимодействия электронного спина с полем

$$U' = -\mu \cdot \left( \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right). \quad (11.43)$$

Внутри атома силу действия электрического поля  $e\mathbf{E}$  можно приближенно представить как отрицательный градиент сферически симметричной средней потенциальной энергии  $V(r)$ . Для одноэлектронного атома это представление является, конечно, точным. Таким образом,

$$e\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV}{dr} \quad (11.44)$$

и энергия взаимодействия спина с полем записывается в виде

$$U' = -\frac{e}{mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{m^2 c^2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}, \quad (11.45)$$

где  $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$  — орбитальный момент количества движения электрона. Энергия взаимодействия (11.45) дает правильный аномальный эффект Зеемана, но соответствует удвоенному спин-орбитальному взаимодействию.

Ошибка в (11.45) обусловлена некорректностью уравнения движения электронного спина (11.40). Левая часть уравнения (11.40) дает скорость изменения спина в системе координат, где электрон покоится. Она равна приложенному моменту  $\mu \times \mathbf{B}'$  только в том случае, когда система, в которой покоится электрон, не является вращающейся системой координат. Если же координатная система вращается, то, как впервые отметил Томас, скорость изменения во времени произвольного вектора  $\mathbf{G}$  в этой системе описывается уравнением<sup>1)</sup>

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{G}}{dt} \right)_{\text{невр}} - \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{G}, \quad (11.46)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_T$  — угловая скорость вращения, найденная Томасом. В применении к электронному спину формула (11.46) приводит к следующему уравнению движения:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S} \times \left( \frac{e\mathbf{B}'}{mc} + \boldsymbol{\omega}_T \right). \quad (11.47)$$

Соответствующая энергия взаимодействия имеет вид

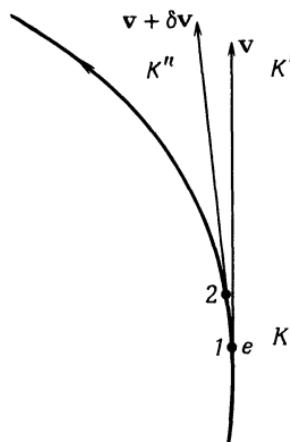
$$U = U' - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_T, \quad (11.48)$$

где  $U'$  — прежнее выражение (11.45) для энергии взаимодействия.

Томасовская прецессия с частотой  $\boldsymbol{\omega}_T$  возникает из-за ускорения электрона при его движении по атомной орбите. На фиг. 11.9 показан электрон, который в момент времени  $t$  находится в точке 1 и имеет мгновенную скорость  $\mathbf{v}$ , а через бесконечно малый интервал времени  $\delta t$  попадает в точку 2, где его скорость равна  $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$ . Приращение скорости связано с ускорением электрона  $\mathbf{a}$  соотношением  $\delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\delta t$ . В момент  $t$  система координат  $K'$ , в которой покоится электрон, и лабораторная система  $K$  связаны преобразованием Лоренца, причем относительная скорость систем равна  $\mathbf{v}$ . Ко времени  $t + \delta t$  система координат, в которой покоится электрон, изменится и станет системой  $K''$ , связанной с  $K$  преобразованием Лоренца, где относительная скорость равна  $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$ . Возникает вопрос, как связаны координатные системы  $K''$  и  $K'$ , или, иными словами, каково поведение во времени осей системы координат, в которой покоится электрон? С точки зрения лабораторной системы электрон получает за время  $\delta t$  бесконечно малое приращение скорости  $\delta\mathbf{v}$ . Следовательно, мы могли бы ожидать, что  $K''$  и  $K'$

<sup>1)</sup> См., например, книгу Голдстейна [46].

связаны простым бесконечно малым преобразованием Лоренца. Если бы это было так, то выражение (11.45) было бы правильным в том виде, как оно написано. В действительности эта связь отличается от простого преобразования Лоренца. Преобразование



Ф и г. 11.9.

от  $K'$  к  $K''$  эквивалентно двум последовательным преобразованиям Лоренца, одному для скорости  $-v$ , а другому для скорости  $v + \delta v$ :

$$K' - \boxed{-v} \rightarrow K - \boxed{v + \delta v} \rightarrow K''. \quad (11.49)$$

Два последовательных преобразования Лоренца, вообще говоря, эквивалентны одному преобразованию Лоренца плюс поворот. Применяя дважды общую формулу (11.21), можно непосредственно убедиться, что временные переменные в  $K''$  и  $K'$  связаны соотношением

$$t'' = t' - \frac{\mathbf{x}'}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left[ \delta \mathbf{v} + \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right], \quad (11.50)$$

которое справедливо с точностью до первого порядка по  $\delta v$ . Это соотношение показывает, что прямое преобразование от  $K'$  к  $K''$  содержит бесконечно малое преобразование Лоренца для скорости

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left[ \delta \mathbf{v} + \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right]. \quad (11.51)$$

Соответствующее преобразование координат имеет вид

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' + \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{x}' \times (\mathbf{v} \times \delta \mathbf{v})}{v^2} - \Delta \mathbf{v} t'. \quad (11.52)$$

При повороте осей координат на бесконечно малый угол  $\Delta\Omega$  координаты связаны соотношением  $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' + \mathbf{x}' \times \Delta\Omega$ . Сравнение этого соотношения с (11.52) показывает, что координатные оси  $K''$  повернуты относительно осей  $K'$  на угол

$$\Delta\Omega = \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \times \delta\mathbf{v}}{v^2}. \quad (11.53)$$

Отсюда следует, что координатные оси в системе, связанной с электроном, прецессируют с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_T = \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{v^2} \approx \frac{1}{2c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{a}, \quad (11.54)$$

где последнее выражение справедливо при  $v \ll c$ . Подчеркивая еще раз чисто кинематическое происхождение томасовской прецессии, отметим, что мы ничего не предполагали о причине ускорения. Если существует составляющая ускорения, перпендикулярная скорости  $\mathbf{v}$ , то наряду с другими эффектами, как, например, прецессия магнитного момента в магнитном поле, имеет место и томасовская прецессия.

Электрон в атоме ускоряется экранированным кулоновским полем (11.44). Поэтому томасовская угловая скорость описывается соотношением

$$\boldsymbol{\omega}_T \approx \frac{1}{2c^2} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{m} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{1}{2m^2c^2} \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (11.55)$$

Как видно из (11.48) и (11.45), добавочный вклад в энергию, обусловленный прецессией Томаса, уменьшает спин-орбитальную связь в 2 раза (как иногда говорят, на множитель Томаса  $1/2$ ), что приводит к правильному выражению для энергии спин-орбитального взаимодействия атомарного электрона

$$U = -\frac{e}{mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2m^2c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (11.56)$$

Нуклоны в атомном ядре испытывают сильные ускорения, обусловленные специфическими ядерными силами. Электромагнитные силы здесь относительно слабы. Поэтому мы можем приближенно представлять себе, что нуклоны движутся независимо под действием короткодействующих сил притяжения в сферически симметричной потенциальной яме  $V_N(r)$ . При этом каждый нуклон испытывает, кроме того, спин-орбитальное взаимодействие, определяемое соотношением (11.48). В пренебрежении влиянием электромагнитных сил

$$U_N \approx -\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_T, \quad (11.57)$$

где ускорение, входящее в  $\boldsymbol{\omega}_T$ , определяется потенциалом  $V_N(r)$ . Выражение для  $\boldsymbol{\omega}_T$  получается из (11.55) простой заменой  $V$  на  $V_N$ .

Таким образом, приближенное выражение для энергии спин-орбитального взаимодействия в ядре имеет вид

$$U_N \approx -\frac{1}{2M^2c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV_N}{dr}. \quad (11.58)$$

При сопоставлении (11.58) с формулой (11.56) учтем, что как  $V$ , так и  $V_N$  соответствуют силам притяжения (но  $V_N$  много больше); следовательно, знаки спин-орбитальных энергий противоположны. Это означает, что отдельные уровни частиц в ядре образуют «обращенные» дублеты. При разумной зависимости  $V_N(r)$  выражение (11.58) находится в качественном согласии с наблюдаемым спин-орбитальным расщеплением уровней в ядре.

## § 6. Собственное время и световой конус

В предыдущих параграфах был рассмотрен ряд следствий специальной теории относительности и преобразований Лоренца. В следующих двух параграфах мы рассмотрим некоторые более формальные аспекты теории и введем ряд понятий и определений, весьма полезных при систематическом анализе физических явлений в специальной теории относительности.

При галилеевской относительности пространственные и временные координаты никак не связаны. Поэтому при преобразовании Галилея бесконечно малые элементы длины и интервалы времени порознь инвариантны

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds'^2, \\ dt^2 = dt'^2. \quad (11.59)$$

Наоборот, при преобразовании Лоренца временные и пространственные координаты взаимосвязаны. Из (11.21) легко показать, что инвариантным элементом «длины» является величина

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2. \quad (11.60)$$

Это приводит к понятию *собственного времени*, инвариантного относительно преобразований Лоренца. Рассмотрим систему, которую мы для определенности будем считать частицей, движущейся с мгновенной скоростью  $\mathbf{v}$  ( $t$ ) относительно некоторой координатной системы  $K$ . В системе координат  $K'$ , в которой частица в данный момент покоится, приращения координат и времени суть  $dx' = dy' = dz' = 0$ ,  $dt' = dt$ . Отсюда получаем инвариантную длину (11.60):

$$-c^2d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2. \quad (11.61)$$

Это соотношение можно записать через скорость частицы  $v(t)$ :

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (11.62)$$

Соотношение (11.62) выражает рассмотренный выше эффект замедления времени. Однако более существенно то обстоятельство, что, как видно из вывода (11.62), время  $\tau$ , называемое *собственным временем частицы*, инвариантно относительно преобразования Лоренца. Важность этого понятия выяснится ниже, когда мы начнем рассматривать скорости изменения различных величин. Если некоторая величина ведет себя определенным образом при лоренцовском преобразовании, то ее производная по собственному времени вследствие инвариантности  $d\tau$  ведет себя таким же образом. Производная же по обычному времени не имеет тех же трансформационных свойств, что сама величина. Из (11.62) следует, что интервал собственного времени  $\tau_2 - \tau_1$  воспринимается в системе  $K$  как интервал времени

$$t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2(\tau)/c^2}}, \quad (11.63)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — соответствующие времена в системе  $K$ .

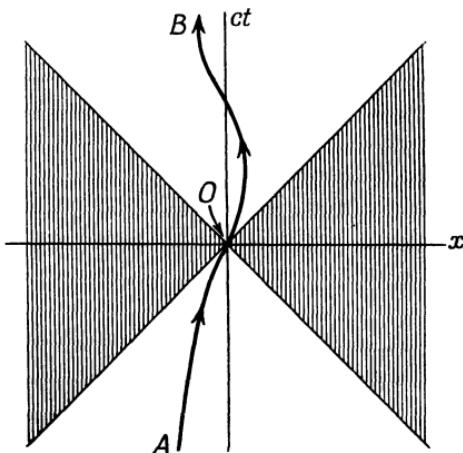
Другим плодотворным понятием в специальной теории относительности является понятие светового конуса и пространственно-подобного и времениподобного интервалов между двумя событиями. Рассмотрим фиг. 11.10, на которой ось времени (ось  $ct$ ) вертикальна, а пространственные оси перпендикулярны оси времени. Пусть в момент  $t = 0$  некоторая физическая система, скажем частица, находится в начале координат. Поскольку скорость света является верхней границей для всех скоростей, то всю область пространства—времени можно разделить на три области «конусом», называемым *световым конусом*, поверхность которого определяется уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ . Световой сигнал, испущенный при  $t = 0$  из начала координат, будет распространяться вдоль линий, образующих на фиг. 11.10 угол  $45^\circ$  с осью времени. Но любая материальная система имеет скорость меньше  $c$ . Следовательно, с течением времени она может перемещаться лишь по пути (называемому ее *мировой линией*), расположенному внутри верхнего полуконуса, как, например, кривая  $OB$ . Так как пути систем лежат внутри *верхнего полуконуса* при  $t > 0$ , то эта область называется *областью абсолютно будущего*. Аналогично область, лежащая внутри *нижнего полуконуса*, называется *областью абсолютно прошлого*. Физическая система может прийти в точку  $O$  только по пути типа  $AO$ , лежащему внутри нижнего полуконуса. Заштрихованная область вне светового конуса называется *абсолютно удаленной областью*. Система, находящаяся внутри абсо-

лютно удаленной области, никогда не достигнет точки  $O$ , и, наоборот, система из точки  $O$  никогда не может попасть внутрь абсолютно удаленной области.

Чтобы подчеркнуть разделение пространства — времени на области абсолютно прошлого, абсолютно будущего и абсолютно уда-

Фиг. 11.10. Мировая линия системы и световой конус.

Нижняя незаштрихованная область внутри конуса соответствует абсолютно прошлому, верхняя — абсолютно будущему, а заштрихованная область вне конуса называется «абсолютно удаленной». Точки, лежащие внутри светового конуса, отделены от начала координат временеподобным интервалом, точки вне конуса отделены пространственноподобным интервалом.



ленного, рассмотрим инвариантный интервал между двумя событиями  $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$  и  $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$  в пространстве — времени:

$$s_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2. \quad (11.64)$$

Для произвольных двух событий  $P_1$  и  $P_2$  имеются две возможности: либо  $s_{12}^2 > 0$ , либо  $s_{12}^2 < 0$ . Если  $s_{12}^2 > 0$ , то говорят, что данные два события разделены пространственноподобным интервалом, поскольку при этом всегда можно найти преобразование Лоренца к новой системе координат  $K'$ , в которой  $t'_1 - t'_2 = 0$  и

$$s_{12}' = (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 > 0. \quad (11.65)$$

В этой новой системе оба события происходят в различных точках пространства в один и тот же момент времени. На фиг. 11.10 одно из таких событий изображается точкой  $O$ , а второе расположено в абсолютно удаленной области. Если  $s_{12}^2 < 0$ , то говорят, что события разделены временеподобным интервалом. При этом можно найти преобразование Лоренца, совмещающее пространственные координаты событий:  $x'_1 = x'_2$ ,  $y'_1 = y'_2$ ,  $z'_1 = z'_2$  и

$$s_{12}^2 = -c^2(t'_1 - t'_2)^2 < 0. \quad (11.66)$$

В этой новой системе координат  $K'$  рассматриваемые события происходят в одной и той же точке пространства, но разделены во времени. На фиг. 11.10 такая пара событий соответствует одной точке

в начале координат, а другой — расположенной в области абсолютно прошлого или абсолютно будущего.

Разделение интервалов между двумя событиями на два класса пространственноподобных и времениподобных инвариантно относительно преобразований Лоренца. Два события, разделенные пространственноподобным интервалом в одной системе координат, разделены пространственноподобным интервалом и во всех других системах координат. Это означает, что такие события не могут быть причинно связанными. Поскольку физическое взаимодействие распространяется из одной точки в другую со скоростью, не превышающей скорость света, то причинно связанными могут быть только события, разделенные временеподобным интервалом. На событие, которое произошло в начале координат на фиг. 11.10, могли повлиять лишь события, соответствующие точкам в области абсолютно прошлого.

### § 7. Преобразования Лоренца как ортогональные преобразования в четырехмерном пространстве

Преобразование Лоренца (11.19) и его более общая форма (11.21) являются линейными преобразованиями пространственно-временных координат, при которых остается инвариантной квадратичная форма

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad (11.67)$$

Это свойство напоминает инвариантность известной квадратичной формы при повороте координатных осей в трехмерном пространстве. Действительно, если мы введем четыре пространственно-временные координаты

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = i c t, \quad (11.68)$$

то квадратичная форма, инвариантная относительно преобразований Лоренца, приобретет вид

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (11.69)$$

Это выражение показывает, что преобразования Лоренца являются поворотами в четырехмерном евклидовом пространстве, или, выражаясь точнее, ортогональными преобразованиями в четырех измерениях. Преобразование Лоренца (11.21) можно записать в общем виде

$$x'_\mu = \sum_{v=1}^4 a_{\mu v} x_v, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (11.70)$$

где коэффициенты  $a_{\mu v}$  — постоянные величины, характеризующие данное конкретное преобразование. Из инвариантности  $R^2$  вытекают

условия ортогональности для коэффициентов  $a_{\mu\nu}$ :

$$\sum_{\mu=1}^4 a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}. \quad (11.71)$$

Из (11.71) легко вывести, что обратным к (11.70) является преобразование

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^4 x'_\nu a_{\nu\mu} \quad (11.72)$$

и что

$$\sum_{\mu=1}^4 a_{\nu\mu} a_{\lambda\mu} = \delta_{\nu\lambda}. \quad (11.73)$$

Далее, если мы разрешим четыре уравнения (11.70) относительно  $x_\mu$  и сравним это решение с (11.72), то получим, что детерминант коэффициентов  $a_{\mu\nu}$  равен единице:

$$\det |a_{\mu\nu}| = 1. \quad (11.74)$$

Собственно говоря, детерминант может быть равен  $\pm 1$ , но выбор знака минус соответствовал бы не простому повороту, а повороту плюс инверсия (зеркальное отражение).

Для выяснения физического смысла приведенных выше формул выпишем явно коэффициенты преобразования  $a_{\mu\nu}$  для преобразования Лоренца от системы  $K$  к системе  $K'$ , движущейся со скоростью  $v$  параллельно оси  $z$ :

$$(a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}. \quad (11.75)$$

Здесь введены удобные обозначения

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (11.76)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Преобразование (11.70) в координатах (11.68) с коэффициентами (11.75) очевидно, в точности соответствует преобразованию Лоренца (11.19).

Легко убедиться, что преобразование (11.75) можно формально представлять как поворот осей в плоскости  $x_3x_4$  (ось  $x_4$  изображается, как если бы она была действительной). На фиг. 11.11 показан поворот осей на угол  $\psi$ . Координаты точки  $P$  в обеих системах коор-

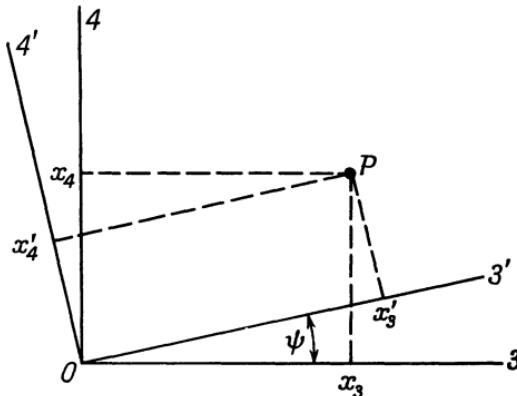
динат связаны соотношениями

$$\begin{aligned}x'_3 &= x_3 \cos \psi + x_4 \sin \psi, \\x'_4 &= -x_3 \sin \psi + x_4 \cos \psi.\end{aligned}\quad (11.77)$$

Сравнение коэффициентов в (11.77) с коэффициентами преобразования (11.75) показывает, что угол поворота является мнимым углом, для которого

$$\operatorname{tg} \psi = i\beta. \quad (11.78)$$

Этот результат можно получить непосредственно из (11.77), не привлекая (11.75), если учесть, что точка  $x'_3 = 0$  движется в системе  $K$  со скоростью  $v$ . Комплексность угла  $\psi$  видна и из того, что



Фиг. 11.11. Преобразование Лоренца как поворот осей.

косинус  $\psi$  больше единицы ( $\cos \psi = \gamma \geq 1$ ). Таким образом, представление преобразования Лоренца в виде поворота имеет чисто формальный смысл.

Несмотря на формальный характер диаграммы поворота в плоскости  $x_3x_4$ , она дает возможность графически представить явления физдженеральд-лоренцовского сокращения и замедления времени. На фиг. 11.12 справа схематически пояснено сокращение длины, а слева — замедление времени. Расстояние  $L_0$  в системе  $K'$  при наблюдении из системы  $K$  равно  $L$ , поскольку оно представляется горизонтальной линией, соответствующей постоянному времени  $t$  в  $K$ . Длина  $L$  кажется на фиг. 11.12 больше, чем  $L_0$ ; это обусловлено тем, что на самом деле угол  $\psi$  мнимый; математически обе длины связаны соотношением

$$\left. \begin{aligned}L \cos \psi &= L_0 \\L &= \frac{L_0}{\gamma}\end{aligned}\right\} \quad (11.79)$$

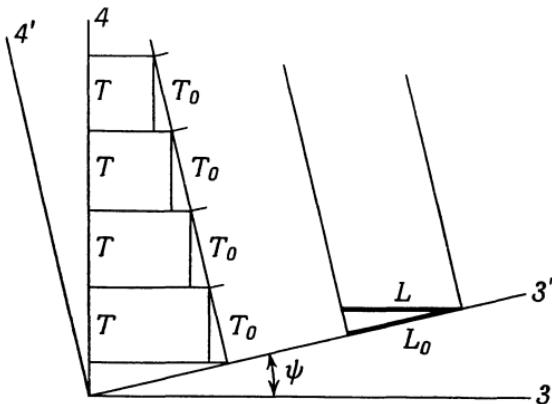
или

в согласии с (11.22). Аналогично временной интервал  $T_0$  в системе  $K'$  представляется в системе  $K$  как интервал

$$T = T_0 \cos \psi = \gamma T_0, \quad (11.80)$$

что согласуется с (11.24).

Иногда при графическом изображении преобразования Лоренца пользуются вместо  $x_4$  действительной временной координатой



Фиг. 11.12. Представление замедления времени и фицджеральд-лоренцевского сокращения как поворота пространственно-временных осей координат.

$x_0 = ct$ . Такое представление называется *диаграммой Минковского* и имеет то достоинство, что оно оперирует с реальными величинами. Его главный недостаток в том, что масштабы координатных сеток в системах  $K$  и  $K'$ , как это следует из (11.67), определяются гиперболической зависимостью. Интересующегося читателя мы отсылаем к работе Минковского в сборнике [39].

## § 8. Четырехвекторы и четырехтензоры. Ковариантность уравнений физики

Закон преобразования (11.70) для координат  $x_\mu$  определяет трансформационные свойства векторов в четырехмерном пространстве — времени (11.68). Любая совокупность четырех величин  $A_\mu$ , которые преобразуются как  $x_\mu$ , называется четырехвектором (4-вектором). При преобразовании Лоренца ( $a_{\mu\nu}$ ) величина  $A_\mu$  преобразуется в  $A'_\mu$  по формуле

$$A'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} A_\nu. \quad (11.81)$$

Если величина  $\varphi$  не изменяется при преобразованиях Лоренца, то она называется *лоренц-скаляром*, или *лоренц-инвариантом*. Четыре величины, получающиеся при дифференцировании лоренц-ска-

ляра по координатам  $x_\mu$ , образуют 4-вектор. Действительно, рассмотрим производные

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'_\mu} = \sum_{v=1}^4 \frac{\partial \Phi}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial x'_\mu}. \quad (11.82)$$

Согласно (11.72),

$$\frac{\partial x_v}{\partial x'_\mu} = a_{\mu v}, \quad (11.83)$$

следовательно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'_\mu} = \sum_{v=1}^4 a_{\mu v} \frac{\partial \Phi}{\partial x_v}, \quad (11.84)$$

т. е. совокупность величин  $\partial \Phi / \partial x_\mu$  преобразуется как 4-вектор. Аналогичным образом легко показать, что 4-дивергенция 4-вектора является лоренц-инвариантом:

$$\sum_{v=1}^4 \frac{\partial A'_v}{\partial x'_v} = \sum_{\mu=1}^4 a_{\mu v} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_v}. \quad (11.85)$$

Полагая в этом соотношении  $A_\mu = \partial \Phi / \partial x_\mu$ , получаем, что четырехмерный оператор Лапласа является лоренц-инвариантным:

$$\square'^2 \Phi \equiv \sum_{v=1}^4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'_v} = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\mu^2} \equiv \square^2 \Phi. \quad (11.86)$$

Если оператор  $\square^2$  действует не на скаляр, а на какие-либо другие функции, скажем на 4-вектор  $A_\mu$ , то получающиеся величины сохраняют трансформационные свойства тех функций, на которые действует этот оператор. Легко проверить, что скалярное произведение двух 4-векторов  $A_\mu$  и  $B_\mu$  является инвариантом

$$(A' \cdot B') \equiv \sum_{\mu=1}^4 A'_\mu B'_\mu = (A \cdot B). \quad (11.87)$$

Четырехвектор является тензором первого ранга в четырехмерном пространстве. Тензоры высшего ранга определяются аналогичным образом. Тензором второго ранга  $T_{\mu v}$  является совокупность шестнадцати величин, которые преобразуются по закону

$$T'_{\mu v} = \sum_{\lambda, \sigma=1}^4 a_{\mu \lambda} a_{v \sigma} T_{\lambda \sigma}. \quad (11.88)$$

Тензоры высших рангов определяются аналогичными преобразованиями с большим числом множителей  $a_{\mu v}$ . Тензором  $n$ -го ранга

является совокупность  $4^n$  величин, закон преобразования которых является обобщением закона (11.88) и содержит произведение  $n$  коэффициентов  $a_{\mu\nu}$ . Подобно тому как скалярное произведение двух 4-векторов имеет ранг, на единицу меньший ранга исходных величин, тензоры более низкого ранга можно получать путем умножения тензоров более высокого ранга. Например, скалярное произведение тензора второго ранга и 4-вектора дает 4-вектор:

$$B'_\mu = \sum_{v=1}^4 T'_{\mu v} A'_v = \sum_{\lambda=1}^4 a_{\mu v} \left( \sum_{v=1}^4 T_{\lambda v} A_v \right). \quad (11.89)$$

Это соотношение и аналогичные ему доказываются с помощью условий ортогональности (11.71) и (11.73).

Элемент объема четырехмерного пространства — времени (11.68) определяется как действительная величина

$$d^4x \equiv dx_1 dx_2 dx_3 dx_0, \quad (11.90)$$

где  $dx_0 = (1/i)dx_4 = d(ct)$ . Закон преобразования элемента объема имеет вид

$$d^4x' = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} d^4x. \quad (11.91)$$

Поскольку якобиан в (11.91) совпадает с детерминантом матрицы коэффициентов  $a_{\mu\nu}$  (11.74), элемент 4-объема  $d^4x$  является лоренц-инвариантной величиной.

Первый постулат Эйнштейна заключается в том, что законы физики должны иметь одинаковую форму в различных лоренцевых координатных системах. Это означает, что уравнения, описывающие физические законы, должны иметь *ковариантную* форму. Под ковариантностью мы понимаем то, что уравнения могут быть написаны таким образом, что обе их части будут иметь одинаковые трансформационные свойства при преобразованиях Лоренца. Следовательно, законы физики могут связывать 4-векторы, или лоренц-скаляры, или 4-тензоры одинакового ранга. Трансформационные свойства должны быть одинаковыми для того, чтобы соотношение, справедливое в одной системе координат, оставалось справедливым и при переходе к другой координатной системе. Рассмотрим, например, два неоднородных уравнения Максвелла. В следующем параграфе будет показано, что они могут быть записаны в релятивистской форме

$$\sum_{v=1}^4 \frac{\partial F_{\mu v}}{\partial x_v} = \frac{4\pi}{c} J_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (11.92)$$

где  $J_\mu$  и  $F_{\mu v}$  соответственно 4-вектор тока и 4-тензор электромагнитного поля. Так как 4-дивергенция 4-тензора является 4-вектором,

то уравнения (11.92) представляют собой соотношение между двумя 4-векторами. Следует ожидать, что в другой координатной системе  $K'$  этот же физический закон имеет такую же форму:

$$\sum_{\sigma=1}^4 \frac{\partial F'_{\lambda\sigma}}{\partial x'_\sigma} = \frac{4\pi}{c} J'_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, 3, 4. \quad (11.93)$$

С помощью преобразования (11.81) можно выразить соотношение (11.93) через величины в исходной координатной системе:

$$\sum_{\mu=1}^4 a_{\lambda\mu} \left( \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{4\pi}{c} J_\mu \right) = 0. \quad (11.94)$$

Это соотношение показывает, что если закон (11.92) выполняется в исходной системе отсчета, то он выполняется и во всех лоренцевых системах. Если бы обе части (11.92) не имели одинаковых трансформационных свойств, то закон не обладал бы таким свойством.

В заключение нашего формального рассмотрения введем некоторые упрощающие обозначения.

1. Греческие индексы считаются пробегающими значения от 1 до 4.
2. Латинские индексы обозначают пространственные переменные и пробегают значения от 1 до 3.
3. 4-векторы обозначаются через  $A_\mu$ ; их составляющие ( $A_1, A_2, A_3$ ) соответствуют пространственному вектору  $\mathbf{A}$ , а  $A_4 = iA_0$ . Иногда это соответствие будет записываться в виде

$$A_\mu = (\mathbf{A}, iA_0). \quad (11.95)$$

Индекс у 4-вектора может быть иногда опущен, так что  $f(x)$ , например, обозначает  $f(x, t)$ .

4. Скалярное произведение 4-векторов обозначается как

$$(A \cdot B) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - A_0 B_0, \quad (11.96)$$

где  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  — обычное трехмерное скалярное произведение.

5. Введем еще обозначения суммирования. Будем считать, что по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, хотя знак суммы не написан. Если повторяются латинские индексы, то суммирование производится от 1 до 3, если же греческие — то от 1 до 4. При этом, например, (11.85) записывается в виде

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu},$$

а (11.89) принимает компактную форму

$$T'_{\mu\nu} A'_\nu = a_{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} A_\nu.$$

## § 9. Ковариантность уравнений электродинамики

Инвариантность уравнений электродинамики при преобразованиях Лоренца была установлена Лоренцом и Пуанкаре еще до того, как Эйнштейн сформулировал специальную теорию относительности. В данном параграфе мы рассмотрим это свойство ковариантности и следствия из него. При этом возможны две точки зрения. Можно положить в основу некоторый экспериментально проверенный факт, например инвариантность электрического заряда, и попытаться отсюда вывести ковариантность уравнений. Можно, наоборот, потребовать ковариантности формы уравнений и показать, что трансформационные свойства различных физических величин, например напряженности полей, зарядов и токов, могут быть выбраны таким образом, чтобы уравнения действительно были ковариантны. Хотя первый путь в некотором смысле более логичен, мы выберем второй. Уравнения классической электродинамики можно считать *точно установленными*, и их можно представить в ковариантной форме. Рассмотрим для простоты микроскопические уравнения, куда величины  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  не входят.

Начнем с уравнения непрерывности для заряда и плотности тока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (11.97)$$

Ему можно придать ковариантную форму, вводя 4-вектор заряда-тока  $J_\mu$ , определяемый следующим образом:

$$J_\mu = (\mathbf{J}, i c \rho). \quad (11.98)$$

При этом (11.97) принимает явно ковариантный вид

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (11.99)$$

То обстоятельство, что  $J_\mu$  действительно является 4-вектором, вытекает из экспериментально установленной инвариантности электрического заряда. Инвариантность заряда подразумевает лоренц-инвариантность произведения  $q dx_1 dx_2 dx_3$ . Поскольку величина  $i d^4x = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$  также является лоренц-инвариантом, то отсюда следует, что  $q$  преобразуется как четвертая составляющая 4-вектора. Трансформационные свойства  $\mathbf{J}$  как пространственного вектора очевидны.

Волновые уравнения для векторного потенциала  $\mathbf{A}$  и скалярного потенциала  $\Phi$  имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= - \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= - 4\pi \rho, \end{aligned} \quad (11.100)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$  связаны условием Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (11.101)$$

Легко видеть, что дифференциальный оператор в левых частях волновых уравнений является лоренц-инвариантным четырехмерным лапласианом (11.86). Правые части этих уравнений составляют 4-вектор. Из требования ковариантности вытекает, что векторный и скалярный потенциалы являются пространственной и временной частями 4-вектора-потенциала

$$A_\mu = (\mathbf{A}, i\Phi). \quad (11.102)$$

Следовательно, волновые уравнения записываются в виде

$$\square^2 A_\mu = -\frac{4\pi}{c} J_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (11.103)$$

а условие Лоренца — в виде равенства 4-дивергенции нулю:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (11.104)$$

Теперь мы можем перейти к рассмотрению полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , которые определяются через потенциалы соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (11.105)$$

Выписывая явно, например, первые составляющие  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} iE_1 &= \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1}, \\ B_1 &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (11.106)$$

мы видим, что электрическое и магнитное поля являются элементами антисимметричного тензора второго ранга  $F_{\mu\nu}$ , который называется *тензором электромагнитного поля*:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (11.107)$$

Явное выражение для 4-тензора поля имеет вид

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.108)$$

Чтобы закончить установление ковариантности уравнений электродинамики, остается рассмотреть еще уравнения Максвелла. Два неоднородных уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi q, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (11.109)$$

Так как правые части являются составляющими 4-вектора, то левые части также должны быть составляющими 4-вектора. Учитывая определение (11.108) для тензора поля, легко убедиться, что левые части (11.109) представляют собой дивергенцию тензора электромагнитного поля. Таким образом, уравнения (11.109) принимают ковариантную форму

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu. \quad (11.110)$$

Аналогично можно показать, что два однородных уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (11.111)$$

сводятся к четырем уравнениям

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0, \quad (11.112)$$

где  $\lambda, \mu, \nu$  — произвольная тройка чисел 1, 2, 3, 4. Каждый член в (11.112) преобразуется как 4-тензор третьего ранга, так что это уравнение имеет нужную ковариантную форму.

## § 10. Преобразование электромагнитного поля

Поскольку поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  являются элементами тензора электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ , их трансформационные свойства определяются преобразованием

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} F_{\lambda\sigma}. \quad (11.113)$$

Используя преобразование (11.75) от системы  $K$  к системе  $K'$ , движущейся со скоростью  $v$  вдоль оси  $x_3$ , мы получаем следующие формулы преобразования для составляющих полей:

$$\begin{aligned} E'_1 &= \gamma(E_1 - \beta B_2), & B'_1 &= \gamma(B_1 + \beta E_2), \\ E'_2 &= \gamma(E_2 + \beta B_1), & B'_2 &= \gamma(B_2 - \beta E_1), \\ E'_3 &= E_3, & B'_3 &= B_3. \end{aligned} \quad (11.114)$$

Обратные преобразования получаются из (11.114) перестановкой штрихованных величин с нештрихованными и заменой  $\beta$  на  $-\beta$ .

При общем преобразовании Лоренца от системы  $K$  к системе  $K'$ , движущейся со скоростью  $v$  относительно  $K$ , поля преобразуются, очевидно, следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{||} &= \mathbf{E}_{||}, & \mathbf{B}'_{||} &= \mathbf{B}_{||}, \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \left( \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma \left( \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right). \end{aligned} \quad (11.115)$$

Здесь индексы  $||$  и  $\perp$  означают параллельность и перпендикулярность к скорости  $v$ . Преобразование (11.115) показывает, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  не являются независимыми величинами. Поэтому чисто электрическое или чисто магнитное поле в одной системе координат представляется совокупностью электрического и магнитного полей в другой системе. При этом имеются, конечно, некоторые ограничения (см. задачу 11.10), так что, например, чисто электростатическое поле в одной системе координат нельзя преобразовать в чисто магнитостатическое поле в другой системе. Однако электрическое и магнитное поля полностью взаимосвязаны, и более правильно говорить как о физической реальности об электромагнитном поле  $F_{\mu\nu}$ , а не о полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  по отдельности.

В качестве примера преобразования электромагнитного поля рассмотрим поля в системе  $K$ , создаваемые точечным зарядом  $q$ , движущимся прямолинейно со скоростью  $v$ . Этот заряд поконится в системе  $K'$ , связанной с ним; преобразование полей из системы  $K'$  в систему  $K$  дается формулами, обратными к (11.114) или (11.115). Предположим, что заряд движется в положительном направлении оси  $x_3$  и проходит на расстоянии  $b$  от наблюдателя. Выбранные оси координат показаны на фиг. 11.13. Наблюдатель находится в точке  $P$ . При  $t = t' = 0$  начала координат совмещены, а заряд  $q$  находится на наименьшем расстоянии от наблюдателя. В системе  $K'$  точка  $P$ , в которой определяются поля, имеет координаты  $x'_1 = b$ ,  $x'_2 = 0$ ,  $x'_3 = -vt'$  и находится на расстоянии  $r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$  от  $q$ . Нас интересует выражение  $r'$  через координаты в системе  $K$ . Единственной координатой, которую необходимо преобразовывать, является время  $t' = \gamma [t - (v/c^2)x_3] = \gamma t$ , так как координата  $x_3$  точки  $P$  в системе  $K$  равна нулю. В системе  $K'$ , в которой заряд поконится, электрическое и магнитное поля запишутся в виде

$$\begin{aligned} E'_1 &= \frac{qb}{r'^3}, & E'_2 &= 0, & E'_3 &= -\frac{qv t'}{r'^3}, \\ B'_1 &= 0, & B'_2 &= 0, & B'_3 &= 0. \end{aligned} \quad (11.116)$$

Отличные от нуля составляющие поля выражаются следующим образом через координаты системы  $K$ :

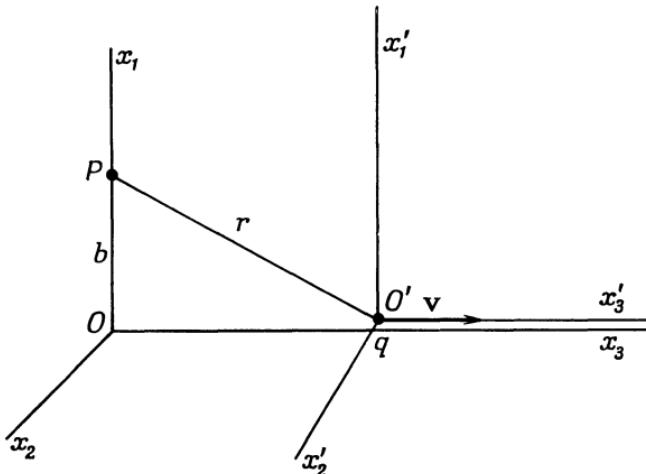
$$E'_1 = \frac{qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad E'_3 = -\frac{q\gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (11.117)$$

Теперь с помощью формул, обратных к (11.114), можно найти поля в системе  $K$

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma E'_1 = \frac{\gamma q b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ E_3 &= E'_3 = -\frac{q \gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ B_2 &= \gamma \beta E'_1 = \beta E_1. \end{aligned} \quad (11.118)$$

Все другие составляющие поля равны нулю.

Интересно поведение полей при скорости заряда, приближающейся к скорости света. Прежде всего имеется магнитное поле,



Фиг. 11.13. Оси координат, используемые при рассмотрении движения частицы.

Частица с зарядом  $q$  имеет постоянную скорость  $v$  и проходит точку наблюдения  $P$  с прицельным параметром  $b$ .

направленное по  $x_2$ . При  $\beta \rightarrow 1$  оно становится почти равным поперечному электрическому полю  $E_1$ . Для нерелятивистских скоростей, когда  $\gamma \approx 1$ , магнитное поле равно

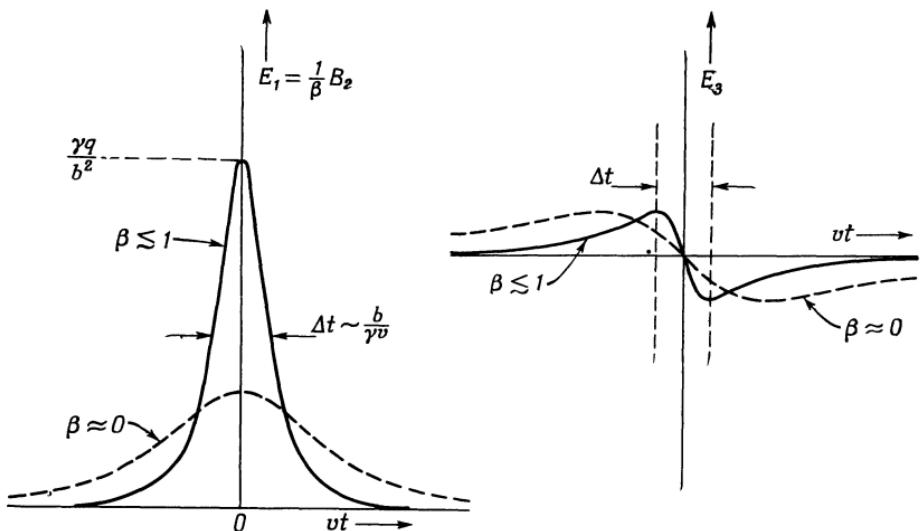
$$\mathbf{B} \approx \frac{q}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (11.119)$$

что совпадает с выражением Ампера и Био — Савара для магнитного поля движущегося заряда. Его можно, очевидно, получить и непосредственно из преобразования, обратного к (11.115). При больших скоростях, когда  $\gamma \gg 1$ , максимальное поперечное электрическое поле  $E_1$  (при  $t = 0$ ) становится в  $\gamma$  раз больше своего нерелятивистского значения. Но в этом предельном случае уменьшается промежуток времени, в течение которого существует заметная напряженность поля в точке  $P$ . Интервал времени, в течение

которого поля имеют заметную величину, очевидно, приближенно равен

$$\Delta t \sim \frac{b}{\gamma v}. \quad (11.120)$$

Таким образом, при возрастании  $\gamma$  максимальные значения полей растут пропорционально  $\gamma$ , а их длительность убывает обратно пропорционально  $\gamma$ . Интеграл от поля по времени, умноженный на  $v$ , не зависит от скорости. На фиг. 11.14 показано поведение



Фиг. 11.14. Изменение полей прямоолинейно движущейся заряженной частицы во времени.

поперечных электрического и магнитного полей и продольного электрического поля. При  $\beta \rightarrow 1$  наблюдатель в точке  $P$  видит почти равные и взаимно перпендикулярные поперечные электрическое и магнитное поля. Они неотличимы от полей импульса плоскополяризованного излучения, распространяющегося вдоль оси  $x_3$ . Добавочное продольное электрическое поле быстро меняет свой знак, и его интеграл по времени равен нулю. Если регистрирующий прибор наблюдателя имеет некоторую инерцию, то он не обнаружит это продольное поле. Следовательно, практически наблюдатель воспримет только поперечные поля. Эквивалентность полей релятивистской заряженной частицы и полей импульса электромагнитного излучения будет использована в гл. 15.

Из инвариантности волнового уравнения относительно преобразования Лоренца следует, что плоская электромагнитная волна в координатной системе  $K$  представляется также плоской волной

в другой координатной системе  $K'$ , движущейся с постоянной скоростью относительно  $K$ . В системе  $K$  плоская волна описывается полями

$$F_{\mu\nu}(x, t) = f_{\mu\nu} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (11.121)$$

где  $f_{\mu\nu}$  — соответствующие постоянные коэффициенты, а  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  — волновой вектор и частота волны. В системе координат  $K'$  эта плоская волна будет иметь вид

$$F'_{\mu\nu}(x', t') = f'_{\mu\nu} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - i\omega' t'}, \quad (11.122)$$

где  $f'_{\mu\nu}$  — опять постоянные коэффициенты, а  $\mathbf{k}'$  и  $\omega'$  — волновой вектор и частота в системе  $K'$ . В соответствии с (11.113) эти поля связаны соотношениями

$$f'_{\mu\nu} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - i\omega' t'} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} f_{\lambda\sigma} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}. \quad (11.123)$$

Чтобы эти соотношения удовлетворялись в любой точке пространства — времени, фазовые множители в обеих частях равенства должны быть одинаковыми

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \quad (11.124)$$

Инвариантность фазы означает, что  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  являются соответственно пространственной и временной составляющими 4-вектора

$$k_\mu = \left( \mathbf{k}, \frac{i\omega}{c} \right). \quad (11.125)$$

При этом инвариантность фазы означает инвариантность скалярного произведения  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  двух 4-векторов. Как показано в § 4, из (11.125) вытекает релятивистская формула для допплеровского смещения.

## § 11. Ковариантность выражения для силы Лоренца и законов сохранения

В § 9 мы рассматривали ковариантность законов электродинамики для плотности зарядов и токов и создаваемых ими полей и потенциалов. Мы знаем, что заряды и токи в конечном счете обусловлены заряженными частицами, движущимися под действием полей. Следовательно, для завершения нашего анализа необходимо рассмотреть ковариантную формулировку для силы Лоренца и законов сохранения количества движения и энергии.

Силу Лоренца, действующую на единицу объема (и равную скорости изменения количества движения в единице объема), можно записать в виде

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}; \quad (11.126)$$

здесь  $J$  и  $q$  — плотности тока и заряда. Выписывая явно первую составляющую  $f$ , получаем

$$f_1 = qE_1 + \frac{1}{c} (J_2B_3 - J_3B_2) = \frac{1}{c} (F_{12}J_2 + F_{13}J_3 + F_{14}J_4), \quad (11.127)$$

где использованы обозначения (11.98) и (11.108). Другие составляющие  $f$  записываются аналогично, так что (11.126) можно представить в виде

$$f_k = \frac{1}{c} F_{k\mu} J_\nu, \quad k = 1, 2, 3. \quad (11.128)$$

Правые части (11.128) представляют собой пространственные составляющие 4-вектора. Следовательно, сила  $f$  должна быть пространственной частью 4-вектора  $f_\mu = (f, if_0/c)$ , где

$$f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} J_\nu. \quad (11.129)$$

Чтобы понять смысл четвертой составляющей 4-вектора плотности силы, выпишем ее явно:

$$f_0 = \frac{c}{i} f_4 = \frac{1}{i} (F_{41}J_1 + F_{42}J_2 + F_{43}J_3) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (11.130)$$

Но  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$  — это работа, совершаемая полем над зарядами в единичном объеме в единицу времени, т. е. скорость изменения механической энергии частиц в единице объема. Таким образом, мы видим, что в записанном в ковариантной форме выражении (11.129) для силы Лоренца пространственная часть определяет скорость изменения количества движения единицы объема, а временная часть — скорость изменения механической энергии единицы объема. Иными словами, составляющие силы Лоренца определяют пространственные и временные производные некоторой величины с размерностью плотности энергии.

Законы сохранения полной энергии (механической и электромагнитной) и полного количества движения, полученные в гл. 6, можно представить в ковариантной форме в виде уравнений для пространственной и временной частей единого 4-вектора. Исключая с помощью неоднородных уравнений Максвелла (11.110) составляющие  $J_\nu$  из уравнения (11.129), получаем выражение для плотности силы в виде

$$f_\mu = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda}. \quad (11.131)$$

Правую часть соотношения (11.131) можно записать в виде дивергенции тензора второго ранга. Введем симметричный тензор  $T_{\mu\nu}$ ,

называемый *электромагнитным тензором энергии-импульса*:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right). \quad (11.132)$$

Доказательство того, что выражение (11.131) при учете однородных уравнений Максвелла можно представить в форме

$$f_\mu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad (11.133)$$

отнесено к задачам (задача 11.12). Компоненты тензора  $T_{\mu\nu}$  можно явно выразить через поля, используя (11.132):

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -icg_1 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -icg_2 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -icg_3 \\ -icg_1 & -icg_2 & -icg_3 & u \end{pmatrix}. \quad (11.134)$$

Здесь  $T_{ik}$  — симметричный тензор максвелловских напряжений, определенный на стр. 221,  $g$  — плотность импульса электромагнитного поля

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}, \\ \text{а } u &\text{ — плотность энергии поля} \\ u &= \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2). \end{aligned} \right\} \quad (11.135)$$

Из определения (6.102) пространственной части тензора  $T_{\mu\nu}$  [или из (11.132)] следует, что сумма диагональных элементов тензора энергии-импульса (след тензора) равна нулю:

$$\sum_{\mu} T_{\mu\mu} = 0. \quad (11.136)$$

Законы сохранения импульса и энергии являются просто трехмерными интегралами уравнения для силы (11.133). Чтобы убедиться в этом, выпишем пространственные составляющие  $f_k$ :

$$f_k = \frac{\partial T_{k\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial T_{kj}}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{k4}}{\partial x_4} = (\operatorname{div} \vec{\mathbf{T}})_k - \frac{\partial g_k}{\partial t}. \quad (11.137)$$

Если приравнять пространственный интеграл от  $f_k$  скорости изменения  $k$ -й составляющей импульса  $P_k$ , то, интегрируя (11.137), получаем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P} + \mathbf{G}) = \int_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{T}} d^3x = \oint_S \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{T}} da, \quad (11.138)$$

где через  $\mathbf{G}$  обозначен полный импульс электромагнитного поля. Этот закон сохранения количества движения был получен

в гл. 6. Аналогично четвертую составляющую уравнения (11.133) можно записать в виде

$$f_0 = \frac{c}{i} f_4 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{c}{i} \frac{\partial T_{4j}}{\partial x_j} + \frac{c}{i} \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} = -\operatorname{div} \mathbf{S} - \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (11.139)$$

Приравнивая интеграл по объему от  $f_0$  скорости изменения полной механической энергии  $T$ , получаем закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt}(T + U) = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{S} d^3x = - \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} da, \quad (11.140)$$

где  $U$  — полная электромагнитная энергия в объеме  $V$ .

### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Теории относительности посвящена обширная литература. На мой взгляд, самое ясное, хотя и сжатое, изложение специальной и общей теории относительности дано в известной работе Паули [79], относящейся к 1921 г., но не утратившей своего значения и сейчас.

По специальной теории относительности имеется целый ряд учебников, рассчитанных на аспирантов, а именно книги Аарони [3], Бергмана [11], гл. 1—9, Мёллера [74], гл. 1—7.

Большое удовольствие от оригинальных методов теоретического исследования можно получить при чтении сборника работ Эйнштейна, Лоренца, Минковского и Вейля [39]. Основные эксперименты сжато и ясно описаны в книгах Мёллера [74], гл. I, Пановского и Филипса [78], гл. 14. Более полное описание экспериментальных основ специальной теории относительности с подробной библиографией дано в главе, написанной Хиллом в книге [48], ч. 6, гл. 8.

Томасовская прецессия рассмотрена в книге Мёллера [74], § 22 и 47, где изложение сходно с нашим. Другой подход к этому вопросу применяют Корбен и Стил [31], § 92.

*Дополнение редактора.* Краткое изложение основных принципов специальной теории относительности читатель может найти в первых двух главах книги Эйнштейна «Сущность теории относительности» [133].

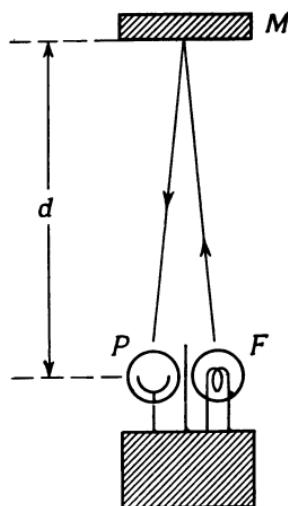
### ЗАДАЧИ

11.1. На фиг. 11.15 изображен один из возможных вариантов часов. Они состоят из лампы-вспышки  $F$  и фотоэлемента  $P$ , экранированного таким образом, что он реагирует только на свет, идущий от зеркала  $M$ , расположенного на расстоянии  $d$  и жестко скрепленного с системой лампа — фотоэлемент. Внутри ящика расположено электронное устройство, которое в тот момент, когда фотоэлемент отзыается на вспышку света от зеркала, включает (с пренебрежимо малым временем запаздывания) лампу-вспышку, посылающую к зеркалу короткий импульс света. Такие часы «тикают» с интервалом  $2d/c$  сек в системе координат, в которой они покоятся.

а) Предположим, что часы движутся относительно наблюдателя с постоянной скоростью  $v$ , перпендикулярной направлению от  $PF$  к  $M$ . Используя второй постулат относительности, путем прямого геометрического или

алгебраического расчета показать, что при движении часов наблюдатель заметит релятивистское замедление времени.

б) Предположим, что часы движутся со скоростью  $v$  параллельно направлению от  $PF$  к  $M$ . Проверить, что при этом наблюдаемый интервал тиканья часов также удлиняется, причем в том же отношении, что и в п. «а».



Ф и г. 11.15.

**11.2. а)** Показать, что два последовательных преобразования Лоренца в одном и том же направлении перестановочны и эквивалентны одному преобразованию Лоренца для относительной скорости

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}.$$

Это один из возможных путей вывода закона сложения параллельных скоростей.

б) Показать, что два последовательных преобразования Лоренца во взаимно перпендикулярных направлениях ( $v_1$  — в  $x$ -направлении,  $v_2$  — в  $y$ -направлении) не перестановочны. Показать также, что в каком бы порядке ни применялись эти преобразования, результат не будет совпадать с единичным преобразованием с  $v = i v_1 + j v_2$ . Указать одно или несколько простых соображений, из которых вытекает необходимость этого результата в специальной теории относительности.

**11.3. а)** Найти вид волнового уравнения в системе  $K'$ , если в системе  $K'$  оно имеет обычную форму, а обе системы координат связаны преобразованием Галилея:  $x' = x - vt$ ,  $t' = t$ .

б) Показать непосредственным преобразованием, что форма волнового уравнения в системах  $K$  и  $K'$  одинакова, если координаты связаны преобразованием Лоренца:  $x' = \gamma(x - vt)$ ,  $t' = \gamma[t - (vx/c^2)]$ .

**11.4.** Координатная система  $K'$  движется со скоростью  $v$  относительно другой системы  $K$ . В системе  $K'$  частица имеет скорость  $u'$  и ускорение  $a'$ . Найти закон лоренцовского преобразования ускорений и показать, что

в системе  $K$  составляющие ускорения, параллельная и перпендикулярная  $\mathbf{v}$ , имеют вид

$$\mathbf{a}_{||} = \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'/c^2)^3} \mathbf{a}'_{||},$$

$$\mathbf{a}_{\perp} = \frac{1 - v^2/c^2}{(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'/c^2)^3} \left[ \mathbf{a}'_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times (\mathbf{a}' \times \mathbf{u}') \right].$$

11.5. Предположим, что ракетный корабль покидает Землю в 2000 г. Пилот ракеты родился в 1980 г. Ракетный корабль устроен таким образом, что он в собственной системе координат имеет ускорение  $g$  (при этом пассажиры чувствуют себя «как дома»). Двигаясь в прямом направлении, корабль ускоряется 5 лет (по своим часам), затем замедляется с таким же ускорением в течение следующих 5 лет, после чего начинает двигаться обратно, также 5 лет ускоряясь и 5 лет замедляясь, и, наконец, попадает на Землю. Пилоту ракеты исполнилось к этому моменту 40 лет.

- В каком году ракетный корабль вернулся на Землю?
- Как далеко он удалялся от Земли? <sup>1)</sup>

11.6. В системе отсчета  $K$  два спринтера почти одинаковой силы стартуют с оси  $y$  из положений, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, и бегут вдоль оси  $x$ . Два стартера, находящиеся каждый возле своего бегуна, стреляют из своих стартовых пистолетов в слегка различные моменты времени, давая преимущество более слабому из двух бегунов. Разница времен стартов в системе  $K$  равна  $T$ .

а) Для какого интервала времени  $T$  найдется система отсчета  $K'$ , в которой ни у одного из спринтеров нет преимущества, и для какого интервала времени  $T$  существует система  $K'$ , в которой имеется действительное (не кажущееся) преимущество?

б) Для обоих указанных в п. «а» случаев провести в явном виде преобразование к найденной системе  $K'$  и определить скорость системы  $K'$  относительно  $K$ , а также координаты каждого из спринтеров в системе  $K'$ .

11.7. Используя четырехмерную форму теоремы Грина, решить неоднородное волновое уравнение

$$\square^2 A_\mu = -\frac{4\pi}{c} J_\mu.$$

а) Показать, что 4-вектор-потенциал для ограниченного распределения зарядов и токов имеет вид

$$A_\mu = \frac{1}{\pi c} \int \frac{J_\mu(\xi)}{R^2} d^4\xi,$$

где  $R^2 = (x - \xi) \cdot (x - \xi)$ ,  $x$  означает  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , а  $d^4\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$ .

б) Исходя из определения напряженностей поля  $F_{\mu\nu}$ , показать, что

$$F_{\mu\nu} = \frac{2}{\pi c} \int \frac{(J \times R)_{\mu\nu}}{R^4} d^4\xi,$$

где  $(J \times R)_{\mu\nu} = J_\mu R_\nu - J_\nu R_\mu$ .

<sup>1)</sup> Для решения этой задачи необходимо предположить, что для ускоренно движущихся систем координат справедливы соотношения Лоренца между собственным временем и временем в других системах координат.—Прим. ред.

**11.8.** Трехмерная формулировка задачи излучения приводит к запаздывающему решению

$$A_{\mu}(x, t) = \frac{1}{c} \int \frac{J_{\mu}(\xi, t')}{r} \Big|_{t'=t-r/c} d^3\xi,$$

где  $r = |x - \xi|$ . Показать связь этого решения с решением, полученным в задаче 11.7, выполнив в последнем интегрирование по  $d^3\xi$ .

**11.9.** Точечному покоящемуся магнитному моменту  $\mu$  соответствует векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

и нулевой скалярный потенциал. Показать, что если магнитный момент движется со скоростью  $v$  ( $v \ll c$ ), то появляется электрический дипольный момент  $p$ , совмещенный с магнитным и равный

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}).$$

Что можно сказать о случае, когда скорость  $v$  не мала по сравнению с  $c$ ? Показать, что энергия взаимодействия движущегося диполя с полями  $E$  и  $B$  та же, что и получаемая путем расчета магнитного поля в системе, где магнитный момент неподвижен.

**11.10. а)** Показать, что величина  $B^2 - E^2$  инвариантна относительно преобразований Лоренца. Как записать ее в четырехмерных обозначениях?

**б)** Символ  $\epsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}$  определяется следующими свойствами:

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu\sigma} = \begin{cases} 0, & \text{если любая пара индексов совпадает,} \\ +1 & \text{для четной перестановки индексов,} \\ -1 & \text{для нечетной перестановки индексов.} \end{cases}$$

Таким образом,  $\epsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}$  представляет собой полностью антисимметричный единичный тензор четвертого ранга (точнее говоря, это псевдотензор относительно пространственной инверсии). Доказать, что величина  $\epsilon_{\lambda\mu\nu\sigma} F_{\lambda\mu} F_{\nu\sigma}$  (где подразумевается суммирование по одинаковым индексам) является лоренц-инвариантом, и найти ее выражение через поля  $E$  и  $B$ .

**11.11.** В некоторой покоящейся системе отсчета однородное статическое электрическое поле  $E_0$  параллельно оси  $x$ , а однородное статическое магнитное поле  $B_0 = 2E_0$  лежит в плоскости  $xy$  и направлено под углом  $\theta$  к оси  $x$ . Определить относительную скорость системы отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны. Каковы поля в этой системе отсчета при  $\theta \ll 1$  и  $\theta \rightarrow \pi/2$ ?

**11.12.** Показать, что выражение для силы  $f_{\mu} = (1/c)F_{\mu\nu}J_{\nu}$  можно представить в виде

$$f_{\mu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}},$$

где

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right).$$

**11.13.** Импульс электромагнитного излучения имеет ограниченные размеры и распространяется в пространстве без зарядов и токов.

а) С помощью теоремы непрерывности в четырехмерном пространстве доказать, что *полный* импульс и *энергия* электромагнитного поля преобразуются как 4-вектор.

б) Показать, что для плоской волны этот 4-вектор имеет нулевую «длину», но что для других возможных конфигураций полей (например, для расходящейся сферической волны) это не так.