

## Глава 13

### СОУДАРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ. РАССЕЯНИЕ

В настоящей главе рассматриваются соударения заряженных частиц, движущихся с большой скоростью, причем особое внимание уделяется обмену энергией между частицами и изменению направления движения частиц при соударениях. Быстрая заряженная частица при прохождении через вещество испытывает соударения с электронами и ядрами атомов. Для частиц, которые тяжелее электрона (например,  $\mu$ - или  $\pi$ -мезонов,  $K$ -мезонов, протонов и т. п.), соударения с электронами и ядрами приводят к различным последствиям. При соударениях с легкими частицами (электронами) налетающая частица может потерять значительную часть своей энергии, но при этом почти не испытывает отклонения. Наоборот, при соударениях с тяжелыми ядрами потеря энергии невелика, но при этом налетающая частица испытывает сильное рассеяние, поскольку такие ядра имеют большой заряд. Таким образом, энергия налетающей частицы теряется почти исключительно в результате соударений с электронами. Наоборот, отклонение частицы от первоначального направления падения обусловливается практически лишь упругими соударениями с атомными ядрами. Рассеяние ограничено малыми углами, так что тяжелые частицы движутся по более или менее прямолинейной траектории, теряя постепенно энергию, пока не дойдут до конца пробега. Если налетающая частица представляет собой электрон, то в результате соударений с электронами вещества происходят как потеря энергии, так и рассеяние. В итоге траектория частиц оказывается гораздо менее прямолинейной, чем для тяжелых частиц. Уже на довольно коротком расстоянии начинает проявляться диффузия электронов в веществе.

Вопросы, связанные с потерями энергии и рассеянием частиц при прохождении через вещество, имеют большое значение и рассмотрены в ряде книг<sup>1)</sup>, где, в частности, приведены подробные коли-

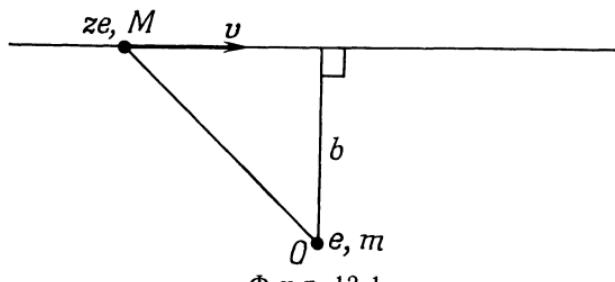
<sup>1)</sup> См. список литературы в конце главы.

чественные данные в виде таблиц и графиков. Поэтому наше внимание будет сосредоточено лишь на рассмотрении основных физических идей, а не на получении точных количественных формул. Для получения количественно точных результатов необходимо полное квантовомеханическое описание, хотя все существенные детали процессов по своему происхождению имеют классический или полуклассический характер. Как будет показано в дальнейшем, порядок величины квантовых эффектов можно легко оценить на основе принципа неопределенности.

Мы начнем с рассмотрения простой задачи о передаче энергии быстрой тяжелой частицей свободному электрону. Затем будет выяснено влияние сил связи, действующих на электроны, и получена классическая формула Бора для потерь энергии. Далее обсуждаются ее квантовые модификации, затем учитывается влияние поляризации среды, рассматриваются потери энергии в электронной плазме. Вслед за этим будет исследовано упругое рассеяние частиц на ядрах и многократное рассеяние. В конце рассматривается вопрос об электропроводности плазмы с учетом экранированного кулоновского взаимодействия.

### § 1. Передача энергии при кулоновских соударениях

Пусть быстрая частица с зарядом  $ze$  и массой  $M$  взаимодействует с атомным электроном. Если скорость частицы велика по сравнению с характерной скоростью движения электрона на орбите, то в течение «времени взаимодействия» электрон можно рассматривать как свободный и поконвившийся перед соударением. Примем



Ф и г. 13.1.

далее, что передаваемый импульс  $\Delta p$  достаточно мал, налетающая частица практически не отклоняется от прямолинейной траектории и электрон отдачи не получает заметного смещения за время соударения. Тогда для нахождения потерь энергии при соударении необходимо лишь вычислить передачу импульса, обусловленную действием электрического поля налетающей частицы в точке расположе-

ложении электрона. Влияние магнитного поля частицы пренебрежимо мало, поскольку мы предполагаем, что электрон можно считать покоящимся.

На фиг. 13.1 изображена схема соударения. Скорость налетающей частицы  $v$ , а ее энергия  $E = \gamma Mc^2$ . Частица пролетает мимо электрона с зарядом  $e$  и массой  $m \ll M$ , значение прицельного параметра равно  $b$ . Поле налетающей частицы в точке расположения электрона определяется соотношениями (11.118), где  $q = ze$ . Интеграл по времени, очевидно, отличен от нуля лишь для поперечного электрического поля  $E_1$ . Следовательно, приобретаемый электроном импульс  $\Delta p$  имеет лишь поперечную составляющую, равную

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} eE_1(t) dt = \frac{2ze^2}{bv}. \quad (13.1)$$

Следует заметить, что  $\Delta p$  не зависит от  $\gamma$ , как уже отмечалось в гл. 11, § 10. Переданная электрону энергия равна

$$\Delta E(b) = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{2z^2e^4}{mv^2} \frac{1}{b^2}. \quad (13.2)$$

Угловое отклонение налетающей частицы при  $\Delta p \ll p$  определяется равенством  $\theta \approx \Delta p/p$ . Таким образом, для малых отклонений

$$\theta \approx \frac{2ze^2}{pzb}. \quad (13.3)$$

Этот результат можно сравнить с известной точной формулой для резерфордовского рассеяния нерелятивистской частицы с зарядом  $ze$  в кулоновском поле заряда  $z'e$ :

$$2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{2zz'e^2}{pzb}. \quad (13.4)$$

Оба выражения, очевидно, согласуются в случае малых углов<sup>1)</sup>.

Выражение (13.2) для переданной энергии  $\Delta E(b)$  обладает рядом интересных особенностей. Оно содержит лишь заряд и скорость налетающей частицы; масса налетающей частицы сюда не

<sup>1)</sup> В действительности при сравнении формул (13.3) и (13.4) возникает вопрос о системах отсчета. Так как соотношение (13.4) справедливо для фиксированного центра силы (т. е. для системы ЦМ), это выражение следует сравнивать с отклонением легкого электрона в системе координат, в которой покоятся тяжелая частица. При этом справедливо соотношение (13.3), где  $p \approx \gamma mv$  — импульс электрона в этой системе. Используя формулы (12.50) и (12.54) для преобразования углов при переходе от системы ЦМ к лабораторной системе, читатель может проверить, что соотношения (13.3) и (13.4) согласуются также и в системе отсчета, в которой покоятся электрон.

входит. Передаваемая энергия обратно пропорциональна квадрату прицельного параметра и, следовательно, очень сильно возрастает для близких соударений. Конечно, существует верхний предел величины передаваемой энергии, соответствующий лобовым соударениям. Наш метод вычислений справедлив лишь для больших значений  $b$ . Приравнивая (13.2) максимальной возможной величине передаваемой энергии (12.59), можно получить нижнее предельное значение прицельного параметра  $b_{\min}$ , при котором наше приближенное рассмотрение еще справедливо:

$$\Delta E(b_{\min}) = \Delta E_{\max} = 2mv^2 u^2. \quad (13.5)$$

Отсюда находим нижнюю границу для  $b$ :

$$b_{\min} = \frac{ze^2}{\gamma mv^2}; \quad (13.6)$$

при значениях  $b$  порядка или меньших  $b_{\min}$  следует заменить наш приближенный результат (13.2) более точным выражением, которое стремилось бы к (13.5) в предельном случае  $b \rightarrow 0$ . Как можно показать (см. задачу 13.1), соответствующее рассмотрение приводит к следующему более точному результату:

$$\Delta E(b) \approx \frac{2z^2 e^4}{mv^2} \frac{1}{b_{\min}^2 + b^2}. \quad (13.7)$$

Выражение (13.7) ведет себя требуемым образом в предельном случае  $b \rightarrow 0$  и переходит в (13.2) при  $b \gg b_{\min}$ .

Нижнюю границу для величины  $b$  можно получить также и иным способом. При выводе выражения (13.2) предполагалось, что электрон не смещается заметно в течение времени взаимодействия. Можно ожидать, что выражение (13.2) будет справедливым до тех пор, пока действительное смещение электрона  $d$  мало по сравнению с  $b$ . Величину  $d$  можно оценить, приняв, что средняя скорость электрона при соударении равна  $\Delta p/2m$ , и вычисляя время взаимодействия с помощью (11.120). В результате получим следующую оценку по порядку величины для смещения электрона за время взаимодействия

$$d \approx \frac{\Delta p}{2m} \Delta t = \frac{ze^2}{\gamma mv^2} = b_{\min}. \quad (13.8)$$

До тех пор пока  $b \gg d$ , выражение (13.2) остается справедливым. Это же условие вытекает из соотношения (13.7).

В другом предельном случае очень дальних соударений приближенный результат (13.2) для  $\Delta E(b)$  становится неверным, поскольку фактически в атомах электроны связаны, тогда как мы их считали свободными. Если время взаимодействия (11.120) мало по сравнению с периодом орбитального движения, то есте-

ственно ожидать, что для таких кратковременных соударений электроны можно рассматривать как свободные. В противоположном предельном случае, когда время соударения (11.120) очень велико по сравнению с периодом орбитального движения, электрон успеет совершить много оборотов по орбите за время прохождения налетающей частицы мимо него и действие поля частицы выразится в адиабатическом изменении этого движения без результирующей передачи энергии. Границе между указанными предельными случаями соответствует значение прицельного параметра  $b_{\max}$ , для которого время соударения (11.120) сравнимо с периодом орбитального движения. Если  $\omega$  — характеристическая частота движения электрона в атоме, то указанное условие имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta t(b_{\max}) &\sim \frac{1}{\omega}, \\ b_{\max} &= \frac{\gamma v}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (13.9)$$

или

При значениях прицельного параметра, превышающих  $b_{\max}$ , можно ожидать уменьшения передачи энергии по сравнению с величиной, определяемой соотношением (13.2), и быстрого убывания ее до нуля при  $b \gg b_{\max}$ .

Качественный характер зависимости  $\Delta E(b)$  от  $b$  показан на фиг. 13.2. Пунктирная кривая соответствует приближенной формуле (13.2), а сплошная кривая представляет точный результат. В интервале  $b_{\min} < b < b_{\max}$  передаваемая энергия может быть приближенно определена по соотношению (13.2). Для значений прицельного параметра, лежащих вне этого интервала, передаваемая энергия значительно ниже получаемой по приближенной оценке.

При движении в материальной среде быстрая частица «чувствует» электроны, расположенные на различных расстояниях от ее траектории. Если число атомов в единице объема равно  $N$ , а число электронов в атоме  $Z$ , то в слое вещества толщиной  $dx$  число электронов, для которых прицельный параметр лежит между  $b$  и  $b + db$ , равно

$$dn = NZ \cdot 2\pi b db dx. \quad (13.10)$$

Для определения потерь энергии частицы на единице длины нужно число частиц (13.10) умножить на передаваемую энергию  $\Delta E(b)$  и проинтегрировать по всем значениям прицельного параметра. Таким образом, полная потеря энергии равна

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi NZ \int \Delta E(b) b db. \quad (13.11)$$

Учитывая поведение функции  $\Delta E(b)$ , показанное на фиг. 13.2, можно использовать в (13.11) приближенное представление (13.2) и проинтегрировать от  $b_{\min}$  до  $b_{\max}$ . В результате получим

$$\frac{dE}{dx} \approx 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{mv^2} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{1}{b^2} b \, db, \quad (13.12)$$

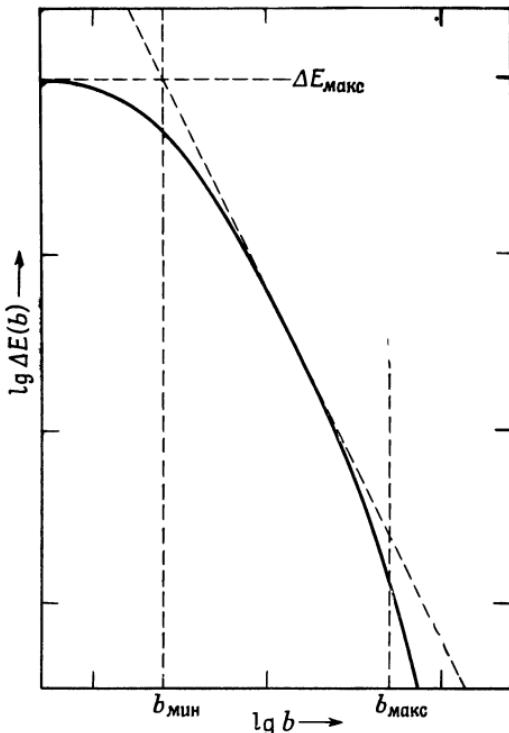
или

$$\frac{dE}{dx} \approx 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{mv^2} \ln B, \quad (13.13)$$

где

$$B = \frac{b_{\max}}{b_{\min}} \approx \frac{\gamma^2 mv^3}{ze^2 \omega}. \quad (13.14)$$

Это приближенное выражение для потерь энергии отражает все существенные особенности классического результата, принадле-



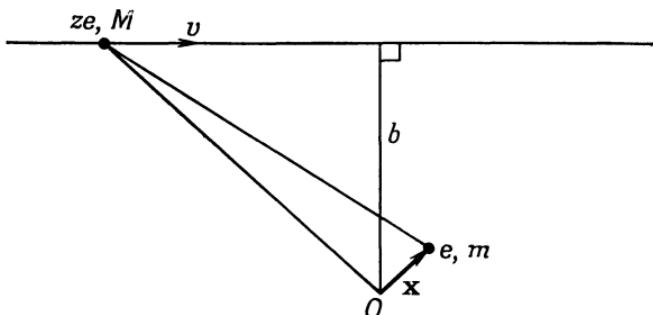
Фиг. 13.2. Зависимость передаваемой энергии от прицельного параметра.

жащего Бору (1915 г.). Метод выбора нижнего предела интегрирования в (13.12) полностью эквивалентен использованию выражения (13.7) для  $\Delta E(b)$ . Обрезание при  $b = b_{\max}$  является довольно

произвольным. Поэтому величина  $B$  определена лишь с точностью до множителя порядка единицы. Поскольку  $B$  входит в аргумент логарифма, эта неточность весьма мало существенна. Тем не менее в § 2 мы исследуем влияние связей. Анализ формулы (13.13) и, в частности, характера зависимости потерь от энергии и сравнение ее с результатами эксперимента мы отложим до § 3 этой главы.

## § 2. Передача энергии гармоническому осциллятору

Как уже говорилось выше, по величине прицельного параметра все кулоновские соударения разделяются на два класса: соударения с  $b < b_{\max}$ , когда энергия передается квазисвободным электронам, и соударения с  $b > b_{\max}$ , которые фактически представляют



Ф и г. 13.3.

собой адиабатические соударения с незначительной передачей энергии. Постараемся теперь обосновать правильность выбора значения (13.9) для величины  $b_{\max}$ . Рассмотрим задачу об энергетических потерях тяжелой частицы с зарядом  $ze$  и скоростью  $v$ , про летающей вблизи частицы с массой  $m$  и зарядом  $e$ , удерживаемой квазиупругой силой (гармонический осциллятор). Эта задача является упрощенной моделью механизма потерь при прохождении частиц через вещество. Как и ранее, будем считать, что отклонения тяжелой частицы при соударениях малы и, таким образом, ее траекторию можно приближенно рассматривать как прямую линию.

Тяжелая частица проходит возле связанного заряда на «прицельном расстоянии»  $b$ , отсчитываемом от центра  $O$  удерживающей силы, как показано на фиг. 13.3. Так как нас прежде всего интересует случай больших прицельных параметров, когда существенны эффекты связи, можно предположить, что передача энергии невелика, движение связанной частицы на протяжении времени соударения нерелятивистское, а начальная и конечная амплитуды колебаний электрона вокруг центра  $O$  малы по сравнению с  $b$ .

При этих допущениях в уравнении движения связанный частицы необходимо учитывать лишь электрическое поле налетающей частицы. Кроме того, можно пренебречь зависимостью амплитуды поля от положения связанный частицы и принять в качестве эффективного значения его величину в точке  $O$ . Это приближение называют иногда **дипольным** по аналогии с соответствующей задачей о поглощении излучения.

При сделанных допущениях уравнение движения заряда, удерживаемого квазиупругой силой, можно написать в виде

$$\ddot{\mathbf{x}} + \Gamma \dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(t), \quad (13.15)$$

где  $\mathbf{E}(t)$  — вектор напряженности электрического поля, созданного зарядом  $ze$  в точке  $O$  и имеющего составляющие (11.118),  $\omega_0$  — характерная частота связи,  $\Gamma$  — малая постоянная затухания. Наличие этого малого затухания в данном случае несущественно, но оно присуще в той или иной степени любой реальной физической системе и, кроме того, его учет позволяет устранить некоторые теоретические трудности, которые возникли бы без учета затухания. Для решения уравнения (13.15) представим  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{E}(t)$  в виде интегралов Фурье

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (13.16)$$

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (13.17)$$

Так как  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{E}(t)$  действительны, то фурье-амплитуды этих величин при положительных и отрицательных частотах связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(-\omega) &= \mathbf{x}^*(\omega), \\ \mathbf{E}(-\omega) &= \mathbf{E}^*(\omega). \end{aligned} \quad (13.18)$$

Подставляя приведенные интегральные представления в уравнение движения, получаем

$$\mathbf{x}(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}(\omega)}{\omega_0^2 - i\omega\Gamma - \omega^2}. \quad (13.19)$$

Для известной функции  $\mathbf{E}(t)$  легко найти фурье-амплитуду  $\mathbf{E}(\omega)$ . Зная  $\mathbf{E}(\omega)$ , можно с помощью соотношений (13.19) и (13.16) найти величину  $\mathbf{x}(t)$ . Задача решается до конца, если удается провести интегрирование по частотам.

Непосредственный интерес представляют не детальные характеристики движения связанный частицы, а величина энергии, переда-

ваемой при соударении. Для ее определения нужно вычислить работу, совершающую налетающей частицей над связанным зарядом. Работа, совершаяя в единицу времени, равна

$$\frac{dE}{dt} = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d^3x'. \quad (13.20)$$

Следовательно, полная работа, совершающаяся частицей при пролете, определяется соотношением

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d^3x'. \quad (13.21)$$

Плотность тока для связанного заряда равна  $\mathbf{J} = ev\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{x}(t)]$ . Следовательно,

$$\Delta E = e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dt, \quad (13.22)$$

где  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ , а  $\mathbf{E}$  в дипольном приближении совпадает с полем налетающей частицы в точке  $O$ . Используя фурье-представления (13.16) и (13.17), аналогичное представление для  $\delta$ -функции (2.52) и условия вещественности (13.18), можно переписать выражение для передаваемой энергии следующим образом:

$$\Delta E = 2e \operatorname{Re} \int_0^{\infty} -i\omega \mathbf{x}(\omega) \cdot \mathbf{E}^*(\omega) d\omega. \quad (13.23)$$

Подставляя в эту формулу выражение (13.19) для  $\mathbf{x}(\omega)$ , получаем

$$\Delta E = \frac{e^2}{m} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}(\omega)|^2 \frac{2\omega^2 \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} d\omega. \quad (13.24)$$

При малых  $\Gamma$  подынтегральное выражение имеет резкий максимум вблизи  $\omega = \omega_0$ , соответствующий приближенно лоренцевой форме линии. Поэтому множитель подынтегрального выражения, содержащий фурье-амплитуду электрического поля, можно приближенно заменить его значением при  $\omega = \omega_0$ . При этом (13.24) преобразуется к виду

$$\Delta E = \frac{2e^2}{m} |\mathbf{E}(\omega_0)|^2 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(\frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} - x^2\right)^2 + x^2}. \quad (13.25)$$

Интеграл в приведенном выражении не зависит от величины  $\omega_0/\Gamma$  и равен  $\pi/2$ . В результате для передаваемой энергии получаем

$$\Delta E = \frac{\pi e^2}{m} |\mathbf{E}(\omega_0)|^2. \quad (13.26)$$

Соотношение (13.26) выражает весьма общий результат, характеризующий передачу энергии внешнего электромагнитного поля нерелятивистскому осциллятору. В рассматриваемом нами случае поле создается пролетающей заряженной частицей. Однако в качестве внешнего поля можно представить и импульс излучения или любую другую комбинацию внешних полей.

Если частица с зарядом  $ze$  пролетает мимо центра  $O$  с прицельным параметром  $b$  и скоростью  $v$ , то возбуждаемое в точке  $O$  электромагнитное поле определяется соотношениями (11.118), причем  $q = ze$ . В качестве примера произведем фурье-преобразование (13.17) для составляющей  $E_1(t)$ . Амплитуда Фурье этой величины  $E_1(\omega)$  определяется как

$$E_1(\omega) = \frac{zeb\gamma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} dt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (13.27)$$

Производя замену переменной интегрирования  $x = \gamma vt/b$ , получаем

$$E_1(\omega) = \frac{ze}{\sqrt{2\pi b v}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega bx/\gamma v} dx}{(1+x^2)^{3/2}}. \quad (13.28)$$

Из таблиц фурье-преобразований<sup>1)</sup> находим, что интеграл в (13.28) пропорционален модифицированной функции Бесселя первого порядка [см. (3.101)]. Таким образом,

$$E_1(\omega) = \frac{ze}{bv} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left[ \frac{\omega b}{\gamma v} K_1 \left( \frac{\omega b}{\gamma v} \right) \right]. \quad (13.29)$$

Аналогично в результате фурье-преобразования составляющей  $E_3(t)$ , определяемой соотношениями (11.118), имеем

$$E_3(\omega) = -i \frac{ze}{\gamma v b} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left[ \frac{\omega b}{\gamma v} K_0 \left( \frac{\omega b}{\gamma v} \right) \right]. \quad (13.30)$$

Теперь мы можем написать явное выражение для величины энергии (13.26), передаваемой гармоническому осциллятору. Согласно (13.29) и (13.30),

$$\Delta E(b) = \frac{2z^2 e^4}{mv^2} \frac{1}{b^2} \left[ \xi^2 K_1^2(\xi) + \frac{1}{\gamma^2} \xi^2 K_0^2(\xi) \right], \quad (13.31)$$

где

$$\xi = \frac{\omega_0 b}{\gamma v}. \quad (13.32)$$

Множитель перед квадратными скобками совпадает с полученным ранее приближенным результатом (13.2). При малых или боль-

<sup>1)</sup> См., например, [70], гл. 8 или [10], гл. 1—3.

ших  $\xi$ , как можно показать, используя приближенные выражения (3.103) или асимптотику (3.104), величина в квадратных скобках имеет следующие предельные значения:

$$[ ] = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \ll 1, \\ \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{\pi}{2} \xi e^{-2\xi} & \text{при } \xi \gg 1 \end{cases} \quad (13.33)$$

Так как  $\xi = b/b_{\max}$ , то очевидно, что при  $b \ll b_{\max}$  передаваемая энергия определяется приближенным результатом (13.2), тогда как при  $b \gg b_{\max}$  передаваемая энергия экспоненциально убывает до нуля. Этот расчет подтверждает проведенные в § 1 качественные оценки значения верхнего предела  $b_{\max}$ .

### § 3. Классическое и квантовомеханическое выражения для потерь энергии

Выражение (13.31) для энергии, передаваемой гармоническому осциллятору, можно использовать для вычисления энергии, теряемой на единице длины быстрой тяжелой частицей, проходящей через вещество. Предположим, что в единице объема содержится  $N$  атомов, в каждом из которых имеется  $Z$  электронов. Эти  $Z$  электронов можно разделить на группы, отмеченные индексом  $j$ ; каждая группа содержит  $f_j$  электронов с одинаковыми частотами связи  $\omega_j$ . Число  $f_j$  можно назвать *силой*  $j$ -го осциллятора. Силы осцилляторов удовлетворяют очевидному соотношению  $\sum_j f_j = Z$ . С помощью триангульного обобщения рассуждений, приводящих к формулам (13.11) и (13.12), легко получить следующее выражение для потерь энергии тяжелой частицей:

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi N \sum_j f_j \int_{b_{\min}}^{\infty} \Delta E_j(b) b db, \quad (13.34)$$

где величина  $\Delta E_j(b)$  определяется соотношением (13.31), причем  $\xi = \omega_j b / \gamma v$ , а нижний предел интегрирования  $b_{\min}$  устанавливается в соответствии с (13.7). Так как функция (13.31) весьма быстро спадает до нуля для больших  $b$ , нет необходимости определять верхний предел интегрирования. Интеграл от модифицированных функций Бесселя легко вычисляется, в результате чего получим следующее выражение:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{mv^2} \sum_j f_j \left\{ \xi_{\min} K_1(\xi_{\min}) K_0(\xi_{\min}) - \right. \\ \left. - \frac{v^2}{2c^2} \xi_{\min}^2 \left[ K_1^2(\xi_{\min}) - K_0^2(\xi_{\min}) \right] \right\}, \quad (13.35)$$

где  $\xi_{\min} = \omega_j b_{\min} / \gamma v$ . Вообще говоря,  $\xi_{\min} \ll 1$ . Поэтому можно упростить (13.35) с помощью приближенных соотношений (3.103). Окончательное классическое выражение для потерь энергии имеет вид

$$\frac{dE_{\text{кл}}}{dx} = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{mv^2} \left( \ln B_{\text{кл}} - \frac{v^2}{2c^2} \right), \quad (13.36)$$

где аргументом логарифма является величина

$$B_{\text{кл}} = \frac{1,123 \gamma v}{\langle \omega \rangle b_{\min}} = \frac{1,123 \gamma^2 mv^3}{ze^2 \langle \omega \rangle}. \quad (13.37)$$

Входящее в  $B_{\text{кл}}$  среднее значение частоты  $\langle \omega \rangle$  определяется как среднее геометрическое

$$Z \ln \langle \omega \rangle = \sum_j f_j \ln \omega_j. \quad (13.38)$$

Приведенный результат (13.36) — (13.38) был впервые получен Бором в его классической работе, посвященной определению потерь энергии (1915 г.). Наше приближенное выражение (13.13) совпадает с (13.36) во всех существенных деталях, так как слагаемое  $-v^2/2c^2$  является малой поправкой даже при больших скоростях.

Формула Бора (13.36) верно описывает потери энергии для сравнительно медленных  $\alpha$ -частиц и тяжелых ядер. Однако для электронов, мезонов, протонов и даже для быстрых  $\alpha$ -частиц оно приводит к сильно завышенным значениям потерь энергии. Причина этого заключается в том, что для более легких частиц классическое рассмотрение уже неприменимо из-за квантовомеханических эффектов. Важнейшими квантовыми эффектами являются, во-первых, дискретность возможных значений передаваемой энергии, во-вторых, ограничения, связанные с волновой природой частиц и принципом неопределенности.

Влияние дискретности значений передаваемой энергии можно проиллюстрировать на примере вычисления классической величины переданной энергии (13.2) при  $b \approx b_{\max}$ . Это, грубо говоря, наименьшее значение переданной энергии, которое следует учитывать при анализе потерь энергии. Предположив для простоты, что имеется лишь одна частота связи  $\omega_0$ , находим

$$\Delta E(b_{\max}) \approx \frac{2}{\gamma^2} z^2 \left( \frac{v_0}{v} \right)^4 \hbar \omega_0, \quad (13.39)$$

где  $v_0 = c/137$  — орбитальная скорость электрона в атоме водорода в основном состоянии. Так как  $\hbar \omega_0$  по порядку величины совпадает с ионизационным потенциалом атома, то для быстрой частицы ( $v \gg v_0$ ) передаваемая энергия, согласно классической формуле (13.39), очень мала по сравнению с ионизационным потенциалом или даже по сравнению с наименьшей энергией возбуждения

атома. Мы знаем, однако, что энергия должна передаваться определенными квантами. Столь малая величина энергии, как определяемая соотношением (13.39), просто не может быть поглощена атомом. Отсюда следует, что наше классическое рассмотрение уже неприменимо в этой области. Естественно было бы считать, что классическая формула (13.2) дает правильный результат лишь в том случае, когда вычисленная по ней передаваемая энергия велика по сравнению с характерными энергиями возбуждения атома. Это требование устанавливает совершенно иной верхний предел для значений прицельного параметра. К счастью, классический результат все же применим в статистическом смысле, если интерпретировать его содержание несколько иным образом.

Квантовое рассмотрение показывает некорректность классического утверждения о передаче сколь угодно малых количеств энергии при каждом соударении. Однако если рассмотреть большое число соударений, то окажется, что передача малых количеств энергии *может* осуществляться в среднем. При этом передача энергии происходит не при каждом соударении. В большинстве соударений она отсутствует, но некоторое малое число соударений сопровождается заметным возбуждением атомов. Результирующее среднее значение передаваемой энергии по многим соударениям оказывается малым. В указанном статистическом смысле устраниется противоречие между квантовым механизмом дискретной передачи энергии и классическим подходом, допускающим любое значение передаваемой энергии. Для получения полного количественного согласия необходимо использовать квантовомеханические выражения для сил осциллятора  $f_j$  и резонансных частот  $\omega_j$ .

Второй важный квантовый эффект связан с волновой природой частиц. Принцип неопределенности накладывает известные ограничения, сужающие область применимости классических представлений об орбитальном движении. Как известно, при попытке приближенно воспроизвести классическую траекторию путем рассмотрения движения волнового пакета его путь может быть установлен лишь с точностью до неопределенности в координате  $\Delta x \geq \hbar/p$ . Для прицельных параметров  $b$ , меньших этой неопределенности, классические понятия теряют силу. Так как частицы в силу своей волновой природы в некотором смысле «размазаны» в области с размерами порядка  $\Delta x$ , можно ожидать, что правильное квантовомеханическое значение потерь энергии будет при  $b < \Delta x$  соответствовать гораздо меньшим значениям передаваемой энергии, чем это следует из (13.2). Таким образом, величина  $\Delta x \sim \hbar/p$  является квантовым аналогом минимального прицельного параметра (13.6).

Каждая из двух соударяющихся частиц имеет волновую природу. При заданной относительной скорости неопределенность

координаты обуславливается более легкой частицей. Для тяжелой налетающей частицы, соударяющейся с электроном, импульс электрона в системе отсчета, относительно которой налетающая частица покоятся (и которая почти совпадает с системой ЦМ), равен  $p' = \gamma m v$ , где  $m$  — масса электрона. Поэтому минимальное значение прицельного параметра, определяемое квантовомеханическими эффектами, равно

$$b_{\min}^{(кв)} = \frac{\hbar}{\gamma m v} \quad (13.40)$$

Для случая электрон-электронных соударений следует действовать более осторожно и рассмотреть импульс (12.34) в системе ЦМ для случая равных масс. При этом для электронов получается следующее выражение для минимального прицельного параметра:

$$[b_{\min}^{(кв)}]_{\text{эл}} = \frac{\hbar}{mc} \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}. \quad (13.41)$$

В рассматриваемом случае следует при вычислении величины  $B$ , входящей как аргумент логарифма в выражение для  $dE/dx$ , подставлять в (13.14) наибольшее из двух минимальных прицельных параметров (13.6) и (13.40). Отношение классического значения  $b_{\min}$  к квантовому равно

$$\eta = \frac{ze^2}{\hbar v}. \quad (13.42)$$

При  $\eta > 1$  следует пользоваться классической формулой Бора. Это, очевидно, имеет место для медленных частиц с большим зарядом в полном согласии с наблюдениями. При  $\eta < 1$  квантовомеханическое значение минимального прицельного параметра больше классического. При этом выражение для энергетических потерь следует изменить. Аргумент логарифма в формуле (13.13) принимает в этом случае вид

$$B_{\text{кв}} = \frac{b_{\max}}{b_{\min}^{(кв)}} = \eta B = \frac{\gamma^2 m v^2}{\hbar \langle \omega \rangle}. \quad (13.43)$$

Соотношение (13.13) с квантовомеханическим значением  $B_{\text{кв}}$  (13.43) является хорошим приближением к формуле Бете (1930 г.), полученной при строгом квантовомеханическом подходе. Формула Бете с учетом эффекта близких соударений имеет вид

$$\frac{dE_{\text{кв}}}{dx} = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{mv^2} \left[ \ln \left( \frac{2\gamma^2 mv^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (13.44)$$

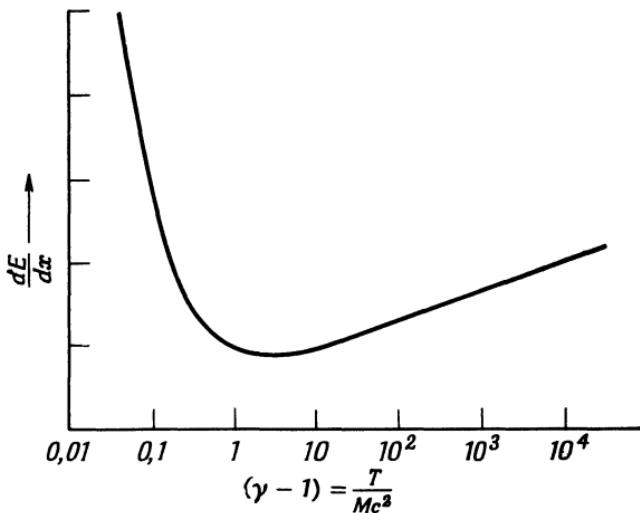
Она отличается от приближенного выражения лишь малым поправочным членом  $-v^2/c^2$  и множителем 2 в аргументе логарифма.

Учет квантовых эффектов для электронов с помощью соотношения (13.41) приводит к следующему модифицированному кванто-

вомеханическому выражению для аргумента логарифма:

$$B_{\text{вл}} \approx (\gamma - 1) \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \frac{mc^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \rightarrow \frac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{2}} \frac{mc^2}{\hbar \langle \omega \rangle}, \quad (13.45)$$

где последнее выражение справедливо в предельном случае больших энергий. Хотя для электронов существуют и другие квантовые



Фиг. 13.4. Зависимость потерь энергии от кинетической энергии частицы,

эффекты, например влияние спина и обменных сил, основной квантовый эффект учитывается соотношением (13.45).

Качественно характер зависимости потерь от энергии частицы как в классическом, так и в квантовомеханическом случаях показан на фиг. 13.4. При низких энергиях изменение потерь определяется в основном зависимостью  $\sim v^{-2}$ , поскольку логарифм меняется медленно. При высоких энергиях, когда  $v \rightarrow c$ , потери вновь возрастают, изменяясь как  $\ln \gamma$  при  $\gamma \gg 1$ . Формула Бете хорошо согласуется с экспериментом для всех быстрых частиц с  $\eta < 1$ , если их энергия не слишком высока (см. § 4).

Здесь уместно пояснить физический смысл квадратичной зависимости  $B_{\text{кв}}$  от  $\gamma$  в (13.43). Одна степень  $\gamma$  появляется из-за увеличения максимальной энергии (13.5), которая может быть передана при лобовых соударениях. Появление второй степени  $\gamma$  связано с релятивистским изменением распределения электромагнитного поля (11.118) быстрой частицы, что приводит к уменьшению времени соударений (11.120) и возрастанию  $b_{\text{макс}}$  (13.9). Релятивистская частица более эффективно передает энергию на больших расстояниях, чем нерелятивистская.

В ряде случаев интересно знать величину потерь энергии на единице длины, обусловленных соударениями, в которых передача энергии в одном соударении не превышает некоторой определенной величины  $\varepsilon$ . Так, например, в фотографических эмульсиях пробег электронов с энергией больше 10 кэв превышает средние линейные размеры зерен бромистого серебра. Поэтому энергия, расходуемая на покрнение зерен серебра, соответствует соударениям, при которых передаваемая энергия меньше 10 кэв. В классическом приближении искомое выражение для потерь энергии можно получить из формулы Бора (13.36), выбирая минимальный прицельный параметр  $b_{\min}(\varepsilon)$  таким образом, чтобы передаваемая энергия (13.2) была равна  $\varepsilon$ . В результате получаем

$$b_{\min}(\varepsilon) = \frac{2ze^2}{v(2me)^{1/2}} . \quad (13.46)$$

Отсюда мы приходим к формуле типа (13.36), в которой аргументом логарифма служит величина

$$B_{\text{кл}}(\varepsilon) = \frac{1,123\gamma v^2 (2me)^{1/2}}{2ze^2 \langle \omega \rangle} . \quad (13.47)$$

Как уже говорилось выше, квантовомеханическое выражение для потерь энергии получается из классической формулы с помощью замены [см. (13.43)]

$$B_{\text{кв}} = \eta B_{\text{кл}} = \frac{ze^2}{\hbar v} B_{\text{кл}} . \quad (13.48)$$

Следовательно, квантовомеханическое выражение для потерь на единице длины, обусловленных соударениями с передачей энергии, меньшей  $\varepsilon$ , должно иметь вид

$$\frac{dE_{\text{кв}}}{dx}(\varepsilon) = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{mv^2} \left[ \ln B_{\text{кв}}(\varepsilon) - \frac{v^2}{2c^2} \right] , \quad (13.49)$$

где

$$B_{\text{кв}}(\varepsilon) = \lambda \frac{\gamma v (2me)^{1/2}}{\hbar \langle \omega \rangle} . \quad (13.50)$$

Константа  $\lambda$  — численный множитель порядка единицы, значение которого можно определить лишь с помощью детальных квантовомеханических расчетов. Согласно расчетам Бете (1930 г.),  $\lambda = 1$ . Квантовомеханическое значение  $B_{\text{кв}}(\varepsilon)$  можно представить следующим образом:

$$B_{\text{кв}}(\varepsilon) = \frac{b_{\max}}{b_{\min}^{(\text{кв})}(\varepsilon)} , \quad (13.51)$$

где  $b_{\max}$  определяется согласно (13.9), а минимальный прицельный параметр равен

$$b_{\min}^{(\text{кв})}(\varepsilon) \approx \frac{\hbar}{\Delta p} \approx \frac{\hbar}{(2me)^{1/2}}. \quad (13.52)$$

Таким образом, поскольку неопределенность полученного импульса  $\Delta p$  не должна превышать импульса, передаваемого при соударении, то классическая траектория может быть определена лишь с точностью, по порядку величины не лучшей, чем (13.52). В противном случае мы не можем быть уверены, что передаваемая энергия действительно меньше  $\varepsilon$ . Следовательно, соотношение (13.52) устанавливает естественный квантовомеханический нижний предел для классического представления об орbitах частиц.

#### *§ 4. Влияние плотности на потери энергии при соударении*

Экспериментально наблюдаемые потери энергии при прохождении частиц всех видов в различных материальных средах для не слишком релятивистских частиц весьма точно описываются соотношением (13.44) [или (13.36), если  $\gamma > 1$ ]. Однако для ультракомпактных частиц наблюдаемые потери несколько меньше рассчитываемых с помощью соотношения (13.44), особенно для веществ с большой плотностью. На графике зависимости  $dE/dx$  от энергии частиц типа фиг. 13.4 это сказывается в том, что реальная кривая потерь энергии возрастает после прохождения минимума приблизительно вдвое медленнее, чем расчетная; это соответствует зависимости аргумента логарифма в (13.44) не от второй, а от первой степени  $\gamma$ . Потери энергии в фотоэмиссиях, измеряемые по плотности зерен серебра, после прохождения минимума очень слабо возрастают, а затем образуют на графике плато, простирающееся до наивысших исследованных значений энергии частиц. Это также соответствует понижению степени  $\gamma$  на единицу, в данном случае в выражении (13.50) для  $B_{\text{кв}}(\varepsilon)$ .

Указанное уменьшение потерь энергии частицы, известное как эффект плотности (или поляризационный эффект), впервые было исследовано теоретически Ферми (1940 г.). До сих пор мы неявно принимали одно допущение, которое перестает выполняться для плотных сред. Мы считали возможным вычислять вначале действие поля налетающей частицы на отдельный атомный электрон, а затем простым суммированием определять передачу энергии всем электронам для всех атомов с  $b_{\min} < b < b_{\max}$ . Но величина  $b_{\max}$  очень велика по сравнению с размерами атома, особенно при больших  $\gamma$ . Следовательно, при значении  $b$ , сравнимом с  $b_{\max}$ , в плотных средах между траекторией налетающей частицы и рассматриваемой

мым атомом находится большое число атомов. Поле быстрой частицы влияет на эти атомы, что в свою очередь приводит к появлению возмущающих полей в месте расположения рассматриваемого атома. Иными словами, в плотных средах вследствие поляризации диэлектрика поле частицы в свободном пространстве заменяется характерным макроскопическим полем в диэлектрике. Это изменение поля, обусловленное поляризацией среды, следует учитывать при расчете энергии, передаваемой в дальних соударениях. В близких соударениях налетающая частица взаимодействует одновременно лишь с одним атомом. Поэтому в данном случае применимы расчеты, основанные на значении поля свободной частицы без учета поляризационных эффектов. Значение прицельного параметра, разграничивающее близкие и дальние соударения, по порядку величины совпадает с атомными размерами. Так как окончательный результат получается сопряжением двух логарифмических величин, нет необходимости определять разграничивающее значение  $b$  с большой точностью.

Определим теперь потери энергии при дальних соударениях ( $b \gg a$ ) в предположении, что электромагнитные поля в веществе можно рассчитывать, считая среду непрерывной и имеющей макроскопическую диэлектрическую проницаемость  $\epsilon(\omega)$ . Если  $a$  есть величина порядка размеров атома, то это приближение перестает выполняться для дальних соударений со значениями  $b$ , близкими к нижнему пределу, но справедливо для подавляющего большинства соударений.

Задача об определении электрического поля быстрой частицы, движущейся с постоянной скоростью в среде, легче всего решается с помощью преобразования Фурье. Осуществляя в соответствии с общим правилом фурье-преобразование потенциалов  $A_\mu(x)$  и плотности источников  $J_\mu(x)$  по координатам и времени

$$F(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega F(k, \omega) e^{ik \cdot x - i\omega t}, \quad (13.53)$$

приходим к следующим волновым уравнениям для спектральных амплитуд:

$$\begin{aligned} \left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \Phi(k, \omega) &= \frac{4\pi}{\epsilon(\omega)} Q(k, \omega), \\ \left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] A(k, \omega) &= \frac{4\pi}{c} J(k, \omega). \end{aligned} \quad (13.54)$$

Появление в (13.54) диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\omega)$  определяется тем, что в макроскопические уравнения Максвелла входит вектор электрической индукции  $D$ . Фурье-преобразование плотностей заряда и тока

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= z\epsilon\delta(x - vt) \\ J(x, t) &= vQ(x, t) \end{aligned} \quad (13.55)$$

легко выполняется; при этом получаем

$$\begin{aligned} Q(k, \omega) &= \frac{ze}{2\pi} \delta(\omega - k \cdot v), \\ J(k, \omega) &= vQ(k, \omega). \end{aligned} \quad (13.56)$$

Как следует из (13.54), фурье-преобразование потенциалов дает

$$\begin{aligned} \Phi(k, \omega) &= \frac{2ze}{\epsilon(\omega)} \frac{\delta(\omega - k \cdot v)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)}, \\ A(k, \omega) &= \epsilon(\omega) \frac{v}{c} \Phi(k, \omega). \end{aligned} \quad (13.57)$$

Используя соотношения, выражающие электромагнитные поля через потенциалы, для фурье-амплитуд полей получаем

$$\begin{aligned} E(k, \omega) &= i \left[ \frac{\omega \epsilon(\omega)}{c} \frac{v}{c} - k \right] \Phi(k, \omega), \\ B(k, \omega) &= i \epsilon(\omega) k \times \frac{v}{c} \Phi(k, \omega). \end{aligned} \quad (13.58)$$

Как видно из формулы (13.23), для вычисления потерь энергии нужно знать временное фурье-представление электрического поля на расстоянии  $b$  по нормали от траектории частицы, движущейся вдоль оси  $z$ . Очевидно,

$$E(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k E(k, \omega) e^{ibk_1}, \quad (13.59)$$

где точка наблюдения имеет координаты  $(b, 0, 0)$ . Чтобы проиллюстрировать метод вычисления  $E(\omega)$ , найдем  $E_3(\omega)$  — составляющую вектора  $E(\omega)$ , параллельную вектору  $v$ . Согласно (13.57) и (13.58),

$$E_3(\omega) = \frac{2ize}{\epsilon(\omega)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{ibk_1} \left[ \frac{\omega \epsilon(\omega) v}{c^2} - k_3 \right] \frac{\delta(\omega - vk_3)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)}. \quad (13.60)$$

Интегрирование по  $k_3$  может быть проведено сразу. В результате имеем

$$E_3(\omega) = -\frac{2ize\omega}{(2\pi)^{3/2} v^2} \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{ibk_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{k_2^2 + k_1^2 + \lambda^2}, \quad (13.61)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 \epsilon(\omega)]. \quad (13.62)$$

Интеграл по  $k_2$  равен  $\pi/(\lambda^2 + k_1^2)^{1/2}$ ; таким образом,  $E_3(\omega)$  можно переписать в виде

$$E_3(\omega) = -\frac{iz\omega}{\sqrt{2\pi}v^2} \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibk_1}}{(\lambda^2 + k_1^2)^{1/2}} dk_1. \quad (13.63)$$

Оставшийся интеграл имеет тот же вид, что и интеграл в (13.28). Окончательно получим

$$E_3(\omega) = -\frac{iz\omega}{v^2} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] K_0(\lambda b), \quad (13.64)$$

где знак квадратного корня при определении  $\lambda$  с помощью (13.62) выбирается так, чтобы значение  $\lambda$  находилось в четвертом квадранте. Аналогичные вычисления приводят к следующим выражениям для других составляющих полей:

$$\begin{aligned} E_1(\omega) &= \frac{ze}{v} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{\epsilon(\omega)} K_1(\lambda b), \\ B_2(\omega) &= \epsilon(\omega) \beta E_1(\omega). \end{aligned} \quad (13.65)$$

Как легко видеть, в предельном случае  $\epsilon(\omega) \rightarrow 1$  выражения для полей (13.64) и (13.65) переходят в ранее полученные выражения (13.30) и (13.29).

Для определения энергии, передаваемой атому при соударении с прицельным параметром  $b$ , достаточно представить (13.23) в более общем виде

$$\Delta E(b) = 2e \sum_j f_j \operatorname{Re} \int_0^{\infty} (-i\omega) \mathbf{x}_j(\omega) \cdot \mathbf{E}^*(\omega) d\omega, \quad (13.66)$$

где  $\mathbf{x}_j(\omega)$  — амплитуда колебаний атомного электрона  $j$ -го типа. Вместо того чтобы воспользоваться формулой (13.19) для  $\mathbf{x}_j(\omega)$ , выразим сумму дипольных моментов через поляризуемость молекул и тем самым через диэлектрическую проницаемость

$$e \sum_j f_j \mathbf{x}_j(\omega) = \frac{1}{4\pi N} [\epsilon(\omega) - 1] \mathbf{E}(\omega), \quad (13.67)$$

где  $N$  — число атомов в единице объема. При этом выражение для передаваемой энергии принимает вид

$$\Delta E(b) = \frac{1}{2\pi N} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} (-i\omega) \epsilon(\omega) |\mathbf{E}(\omega)|^2 d\omega. \quad (13.68)$$

Потери энергии на единице длины за счет соударений с прицельными параметрами  $b \geq a$  можно, очевидно, записать как

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{b>a} = 2\pi N \int_a^{\infty} \Delta E(b) b db. \quad (13.69)$$

Подставляя в (13.68) и (13.69) выражения для полей (13.64) и (13.65), после ряда вычислений приходим к результату, полученному Ферми:

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{b>a} = \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{v^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i\omega \lambda^* a K_1(\lambda^* a) K_0(\lambda a) \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] d\omega, \quad (13.70)$$

где  $\lambda$  определяется соотношением (13.62). Этот же результат можно получить более изящно, вычисляя электромагнитную энергию, излученную через поверхность цилиндра радиусом  $a$ , окружающего траекторию налетающей частицы. В силу закона сохранения энергии эта величина совпадает с энергией, теряемой частицей в единицу времени. Таким образом,

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{b>a} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt} = - \frac{c}{4\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi a B_2 E_3 dz. \quad (13.71)$$

Интеграл по  $dz$  для данного момента времени эквивалентен интегралу по всем моментам времени для фиксированной точки на цилиндре. Введя  $dz = v dt$ , получим

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{b>a} = - \frac{ca}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B_2(t) E_3(t) dt. \quad (13.72)$$

Обычным способом можно преобразовать его в интеграл по частотам:

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{b>a} = - ca \operatorname{Re} \int_0^{\infty} B_2^*(\omega) E_3(\omega) d\omega. \quad (13.73)$$

Используя выражения для полей (13.64) и (13.65), вновь приходим к результату Ферми (13.70).

Выражение Ферми (13.70) для потерь энергии внешне мало похоже на приведенные нами ранее результаты, например формулу (13.35). Однако если влияние поляризационных эффектов незначительно, то оно дает прежний результат. Например, для нерелятивистских частиц ( $\beta \ll 1$ ), как ясно из (13.62), величина  $\lambda \approx \omega/v$  не зависит от  $\epsilon(\omega)$ . В этом случае модифицированные функции Бесселя в (13.70) действительны. Значение интеграла определяется лишь мнимой частью функции  $\epsilon^{-1}(\omega)$ . Пренебрегая поляризацион-

ной поправкой Лоренца (4.67) для внутреннего поля в атоме, можно представить диэлектрическую проницаемость в виде

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_j}, \quad (13.74)$$

где при вычислении дипольного момента использовано выражение (13.19). Если второй член предполагается малым, то мнимую часть функции  $\varepsilon^{-1}(\omega)$  легко вычислить и подставить ее в (13.70). При этом в том же приближении, которое использовалось при выводе соотношений (13.24) — (13.26), интеграл по  $\omega$  может быть преобразован к нерелятивистскому выражению (13.35). Если принебречь отличием  $\lambda$  от  $\omega/\gamma v$ , но не делать других допущений, то (13.70) приводит точно к формуле Бора (13.35).

Поляризационный эффект проявляется, очевидно, в комплексности аргумента модифицированных функций Бесселя, что соответствует учету члена с  $\varepsilon(\omega)$  в (13.62). Так как величина  $\varepsilon(\omega)$  входит в (13.62) в виде произведения на  $\beta^2$ , ясно, что этот эффект фактически заметен лишь при больших энергиях. Подробные вычисления для всех энергий с использованием явного выражения для  $\varepsilon(\omega)$  типа (13.74) весьма сложны и не приводят к сколько-нибудь наглядным результатам. Поэтому мы ограничимся лишь рассмотрением ультраполятивистского предельного случая ( $\beta \approx 1$ ). Кроме того, так как в интегrale по  $\omega$  наиболее важны оптические частоты, а радиус  $a$  имеет порядок атомных размеров, величина  $|\lambda a| \sim (\omega a/c) \ll 1$ . Следовательно, можно использовать приближенные выражения для функций Бесселя (3.103), справедливые в предельном случае малых аргументов. Выражение Ферми (13.70) в ультраполятивистском предельном случае принимает вид

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{b>a} \approx \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{c^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty i\omega \left[ \frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right] \times \\ \times \left\{ \ln \left( \frac{1,123c}{\omega a} \right) - \frac{1}{2} \ln [1 - \varepsilon(\omega)] \right\} d\omega. \quad (13.75)$$

Здесь уместно подчеркнуть, что аргумент второго логарифмического члена в действительности равен  $[1 - \beta^2\varepsilon(\omega)]$ . В частном случае  $\varepsilon = 1$  этот логарифмический член дает множитель  $\gamma$  под логарифмом, что соответствует ранее приведенному результату (13.36). Если же  $\varepsilon(\omega) \neq 1$ , то этот множитель можно переписать в виде  $[1 - \varepsilon(\omega)]$ , вследствие чего из аргумента логарифма исчезает одна степень  $\gamma$  в согласии с экспериментом.

Интеграл по положительным действительным  $\omega$  в (13.75), где  $\varepsilon(\omega)$  определяется согласно (13.74), легко преобразуется с помощью теоремы Коши в интеграл по положительным чисто мнимым  $\omega$ .

В этом случае величина  $\varepsilon(\omega)$  становится чисто действительной на пути интегрирования. Следовательно, значение действительной части интеграла будет определяться лишь фазами логарифмов. В приближении  $\Gamma_j \ll \omega_j$  результат интегрирования можно представить в простом виде

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{b>a} = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \ln \left( \frac{1,123c}{a\omega_p} \right), \quad (13.76)$$

где  $\omega_p$  — электронная плазменная частота

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N Ze^2}{m}. \quad (13.77)$$

Соответствующее релятивистское выражение без учета поляризационного эффекта, как следует из (13.36), имеет вид

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{b>a} = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \left[ \ln \left( \frac{1,123\gamma c}{a\langle\omega\rangle} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (13.78)$$

Сравнение показывает, что учет поляризационного эффекта приводит к более простому асимптотическому выражению для потерь энергии, которые перестают зависеть от деталей структуры атома [величина  $\langle\omega\rangle$ , описываемая соотношением (13.38), не входит в (13.76)] и определяются лишь числом электронов в единице объема, входящим в  $\omega_p$ . Потери энергии для ультрарелятивистских частиц в двух веществах с совершенно различной структурой атомов будут одинаковы, если плотность электронов в этих веществах одинакова.

Так как в литературе приведено большое число рассчитанных по формуле Бете (13.44) кривых потерь энергии, очень часто оказывается удобным знать величину уменьшения потерь, обусловленную влиянием поляризации. Это уменьшение определяется разностью выражений (13.78) и (13.76)

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \Delta \left( \frac{dE}{dx} \right) = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \left[ \ln \left( \frac{\gamma \omega_p}{\langle\omega\rangle} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (13.79)$$

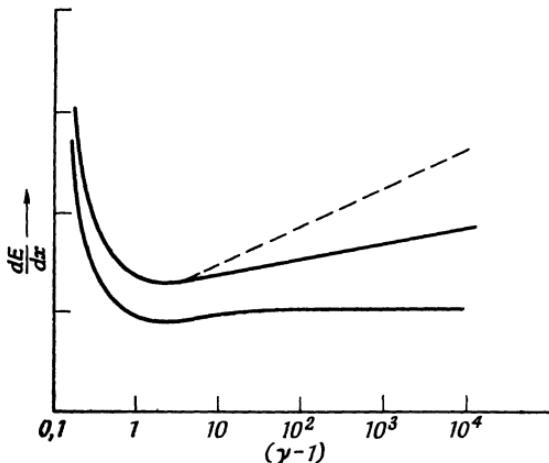
Для фотоэмульсий энергетические потери определяются соотношениями (13.49) и (13.50) с  $\varepsilon \approx 10$  кэв. При учете поляризационной поправки потери при больших энергиях стремятся к постоянной величине

$$\frac{dE(\varepsilon)}{dx} \rightarrow \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{2c^2} \ln \left( \frac{2mc^2\varepsilon}{\hbar^2 \omega_p^2} \right). \quad (13.80)$$

Для бромистого серебра  $\hbar\omega_p \approx 48$  эв. Для однозарядных частиц отношение величины потерь (13.80) к плотности оказывается равным приблизительно  $1,02 \text{ Мэв}\cdot\text{см}^2/\text{г}$ . Это значение потерь энергии хорошо согласуется с экспериментальными данными; оно соот-

ветствует возрастанию потерь относительно минимального значения менее чем на 10%. На фиг. 13.5 изображены типичные кривые полных потерь и потерь с передачей энергии, не превышающей 10 кэв. Пунктирная кривая соответствует формуле Бете для полных потерь без учета поляризационного эффекта.

Существует интересная связь между выражением Ферми (13.70) для потерь энергии и излучением Вавилова — Черенкова. Выражение (13.70) определяет энергию, передаваемую среде на расстояниях, больших  $a$ . Переходя к пределу  $a \rightarrow \infty$ , мы выясним,



Фиг. 13.5 Зависимость потерь энергии от кинетической энергии частицы. Пунктирная кривая получена без учета поляризационного эффекта, сплошные кривые — с учетом этого эффекта (верхняя кривая изображает полные потери энергии, нижняя — потери за счет соударений с передачей энергии меньше 10 кэв).

не может ли какая-либо часть энергии уходить в бесконечность. В этом случае можно было бы говорить об излучении энергии. При  $a \rightarrow \infty$  можно воспользоваться асимптотическими выражениями (3.104) для функций  $K$ . Тогда формула (13.70) приводится к виду

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{dE}{dx} \right)_{b > a} = \frac{(ze)^2}{v^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty i\omega \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \left( \frac{\lambda^*}{\lambda} \right)^{1/2} e^{-(\lambda + \lambda^*)a} d\omega. \quad (13.81)$$

Если действительная часть  $\lambda$  отлична от нуля, наличие экспоненциального множителя обеспечивает быстрое убывание потерь энергии до нуля на больших расстояниях. Как очевидно из (13.62), указанное условие всегда выполняется для сред с поглощением, поскольку в этом случае  $\epsilon(\omega)$  имеет положительную мнимую часть. Однако при действительных значениях  $\epsilon(\omega)$  величина  $\lambda$  может быть чисто мнимой для некоторых  $\omega$ . Это имеет место при  $\beta^2 > 1/\epsilon(\omega)$ ,

т. е. в том случае, когда скорость частицы превышает фазовую скорость света в среде. В этом и состоит условие существования излучения Вавилова — Черенкова. Для таких частот  $\lambda = -i |\lambda|$ . При этом экспоненциальный множитель обращается в единицу и, следовательно,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{dE}{dx} \right)_{b>a} = \frac{(ze)^2}{c^2} \int_{\epsilon(\omega) > (1/\beta^2)} \omega \left[ 1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)} \right] d\omega. \quad (13.82)$$

Так как полученное выражение не зависит от радиуса цилиндра  $a$ , оно представляет собой истинное излучение. Это выражение полностью совпадает с формулой Франка и Тамма (1937 г.) для полной энергии излучения Вавилова — Черенкова на единице пути. Более детально излучение Вавилова — Черенкова как радиационный процесс будет рассмотрено в гл. 14, § 9.

Для сред, в которых поляризационные эффекты играют существенную роль в процессе потерь энергии, поглощение почти всегда столь велико, что возбуждаемое излучение Вавилова — Черенкова поглощается в непосредственной близости от траектории частицы.

## § 5. Потери энергии в электронной плазме

Для рассмотрения потерь энергии нерелятивистской частицы при прохождении через плазму можно воспользоваться методом, примененным нами при исследовании поляризационного эффекта для релятивистских частиц. Как было показано в гл. 10, § 10, в плазме следует различать две области линейных масштабов. Для размеров, больших по сравнению с дебаевским радиусом экранирования  $k_D^{-1}$ , определяемым соотношением (10.106), плазма ведет себя как непрерывная среда, в которой заряженные частицы участвуют в коллективном движении, каковыми являются, например, колебания плазмы. На расстояниях, малых по сравнению с  $k_D^{-1}$ , процессы в плазме определяются свойствами отдельных частиц, причем взаимодействие частиц описывается экранированным потенциалом двухчастичного взаимодействия (10.113). Это означает, что при вычислении потерь энергии дебаевский радиус играет ту же роль, которую играют атомные размеры при исследовании поляризационных эффектов. Для близких соударений можно пренебречь коллективными эффектами и вычислить соответствующий вклад в потери энергии, пользуясь потенциалом (10.113). Мы оставляем эту задачу читателям для самостоятельного решения (см. задачу 13.3). Для дальних соударений, соответствующих значениям прицельных параметров, для которых  $b k_D > 1$ , коллективные эффекты могут быть рассчитаны по формуле Ферми (13.70) с использованием соответствующего значения диэлектрической проницаемости

плазмы. Потери при дальних соударениях соответствуют возбуждению в среде плазменных колебаний.

Для нерелятивистских частиц, согласно формуле (13.70), получается следующее выражение для потерь энергии, соответствующих прицельным параметрам  $b > k_D^{-1}$ :

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{k_D b > 1} \approx \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{v^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{i\omega}{\epsilon(\omega)} \left[ \frac{\omega}{k_D v} K_1 \left( \frac{\omega}{k_D v} \right) K_0 \left( \frac{\omega}{k_D v} \right) \right] d\omega. \quad (13.83)$$

Наиболее существенный вклад в интеграл вносят частоты  $\omega \approx \omega_p$ , для которых аргумент функций Бесселя имеет величину порядка

$$\frac{\omega_p}{k_D v} = \frac{\langle u^2 \rangle^{1/2}}{v}. \quad (13.84)$$

Для частиц, скорость которых меньше тепловых, значение аргумента велико по сравнению с единицей. Вследствие экспоненциального убывания функций Бесселя при больших значениях аргумента потери энергии на возбуждение плазменных колебаний такими частицами пренебрежимо малы. Энергия теряется ими лишь при близких парных соударениях. Если же скорость сравнима с тепловой или превышает ее, то частица может терять значительную энергию на возбуждение коллективных колебаний. Энергия этих колебаний концентрируется, очевидно, в окрестности траектории частицы до расстояний порядка  $(v/\langle u^2 \rangle^{1/2})k_D^{-1}$  от нее.

Для частиц, движущихся со скоростями, существенно большими тепловых, можно использовать приближенные выражения для функций Бесселя при малых значениях аргумента. При этом (13.83) принимает вид

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{k_D b > 1} \approx \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{v^2} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{i\omega}{\epsilon(\omega)} \right] \ln \left( \frac{1,123 k_D v}{\omega} \right) d\omega. \quad (13.85)$$

Рассмотрим случай, когда диэлектрическая проницаемость среды, обладающей затуханием, определяется простым выражением [ср. (7.93)]

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\Gamma}. \quad (13.86)$$

Постоянная затухания  $\Gamma$  считается малой по сравнению с  $\omega_p$ . Интересующее нас выражение

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{i\omega}{\epsilon(\omega)} \right] = \omega_p^2 \frac{\omega^2 \Gamma}{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (13.87)$$

имеет обычный резонансный характер [ср., например, (13.24)]. В предельном случае  $\Gamma \ll \omega_p$  вычисление интеграла в (13.85) при-

водит к простому результату

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{k_D b > 1} \approx \frac{(ze)^2}{v^2} \omega_p^2 \ln \left( \frac{1,123 k_D v}{\omega_p} \right) \quad (13.88)$$

Объединяя это выражение с результатом задачи 13.3, получаем значение полных потерь энергии частицы, движущейся в плазме. Наличие в аргументе логарифма величины  $\omega_p$  связано с тем, что частица теряет свою энергию квантами  $\hbar \omega_p$  аналогично тому, как наличие средней частоты  $\langle \omega \rangle$  в выражении (13.44) указывает на то, что энергия теряется путем квантовых переходов в атомах. Дискретность потерь энергии проявляется при прохождении электронов через тонкие металлические фольги. Это явление может быть использовано для определения эффективной плазменной частоты в металлах.

## § 6. Упругое рассеяние быстрых частиц атомами

В предыдущих параграфах были рассмотрены потери энергии частицами при прохождении через вещество. При этом предполагалось, что частица движется по прямолинейной траектории. В действительности это предположение не выполняется строго. Как уже отмечалось в § 1, любая передача импульса между взаимодействующими частицами приводит к их отклонению на некоторый угол. В вводных замечаниях к настоящей главе мы уже говорили о том, что соударения с электронами обусловливают потери энергии, тогда как соударения с атомами определяют рассеяние. Если пренебречь экранированием кулоновского поля ядра атомными электронами, то угловое отклонение, испытываемое быстрой частицей с импульсом  $p = \gamma M v$  и зарядом  $ze$  при прохождении на прицельном расстоянии  $b$  от тяжелого ядра с зарядом  $Ze$ , определяется, согласно (13.3), выражением

$$\theta \approx \frac{2zZe^2}{pvb}. \quad (13.89)$$

Дифференциальное сечение рассеяния  $d\sigma/d\Omega$  (имеющее размерность площади на единицу телесного угла на атом) определяется соотношением

$$nb db d\phi = n \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (13.90)$$

где  $n$  — число частиц, падающих на единичную площадку в единицу времени. Левая часть равенства (13.90) определяет число частиц со значениями прицельных параметров от  $b$  до  $b + db$ , попадающих за единицу времени в область азимутальных углов между  $\phi$  и  $\phi + d\phi$ . В правой части стоит число частиц, рассеянных за единицу

ницу времени в направлении, определяемом полярными углами ( $\theta, \phi$ ) в элемент телесного угла  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ . Соотношение (13.90) выражает закон сохранения числа частиц, так как между  $\theta$  и  $b$  имеется функциональная связь. Классическое выражение для дифференциального сечения рассеяния можно поэтому переписать в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (13.91)$$

Здесь следует брать абсолютное значение производной, так как, вообще говоря,  $db$  и  $d\theta$  могут иметь противоположные знаки, а сечение рассеяния, по определению, — положительная величина. Если  $b$  является многозначной функцией  $\theta$ , то в (13.91) следует взять сумму по всем значениям  $b$ .

Учитывая соотношение (13.89), связывающее  $b$  и  $\theta$ , можно найти отнесенное к одному атому резерфордовское сечение рассеяния на малые углы

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left( \frac{2ze^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}. \quad (13.92)$$

Заметим, что все  $Z$  электронов атома дают сечение рассеяния, в  $Z$  раз меньшее сечения рассеяния на ядре. Поэтому влиянием электронов можно пренебречь, за исключением их экранирующего действия. Закон Резерфорда (13.92) для рассеяния на малые углы оказывается справедливым и при квантовомеханическом рассмотрении независимо от спина падающих частиц. Для больших углов следует учитывать спиновые эффекты, но для нерелятивистских частиц и в квантовомеханическом случае остается справедливой классическая формула Резерфорда, вытекающая из (13.4):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{ze^2}{2Mv^2} \right)^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}. \quad (13.93)$$

Так как наиболее интенсивное рассеяние происходит для углов  $\theta \ll 1$  и даже при  $\theta = \pi/2$  выражение для малых углов (13.92) не отличается от формулы Резерфорда больше чем на 30%, то выражение (13.92) дает вполне удовлетворительные по точности результаты для всех углов, для которых справедливо описание с помощью центрального неэкранированного кулоновского поля.

Отклонения от кулоновского приближения сказываются при очень больших и очень малых углах, соответствующих малым и большим прицельным параметрам. При больших значениях  $b$  вследствие экранирующего действия атомных электронов потенциал спадает быстрее, чем по закону  $1/r$ . Согласно модели Ферми — Томаса, потенциал можно приближенно описать выражением

$$V(r) \approx \frac{ze^2}{r} e^{-r/a}, \quad (13.94)$$

где радиус атома  $a$  определяется соотношением

$$a \approx 1,4a_0 Z^{-1/3}, \quad (13.95)$$

а  $a_0 = \hbar^2/me^2$  — боровский радиус атома водорода. Для значений прицельного параметра порядка  $a$  или больших потенциал (13.94) быстро убывает, что приводит к гораздо более быстрому спаданию угла рассеяния с ростом  $b$ , чем следует из формулы (13.89). Это означает, что сечение рассеяния на малых углах не возрастает как  $\theta^{-4}$ , а замедляет свой рост и стремится к постоянному значению при  $\theta = 0$ .

Простые вычисления с экранированным кулоновским потенциалом приводят к следующему общему выражению для сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left( \frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{(\theta^2 + \theta_{\min}^2)^2}, \quad (13.96)$$

где  $\theta_{\min}$  — предельное значение угла, начиная с которого сечение рассеяния уже существенно отличается от значения, определяемого соотношением (13.92). Оно может быть определено как с классической точки зрения, так и с квантовомеханической. Так же как при нахождении  $b_{\min}$ , при исследовании энергетических потерь следует воспользоваться большим из полученных значений угла. Классическое значение  $\theta_{\min}$  можно вычислить, положив в (13.89)  $b = a$ . В результате находим

$$\theta_{\min}^{(кл)} \approx \frac{zZe^2}{pva}. \quad (13.97)$$

С точки зрения квантовой механики конечные размеры рассеивающей частицы означают, что траектория в классическом приближении локализована в пределах  $\Delta x < a$ ; следовательно, минимальная неопределенность в поперечной составляющей импульса падающей частицы должна быть  $\Delta p \geq \hbar/a$ .

Для соударений, в которых передаваемый импульс (13.1) велик по сравнению с  $\hbar/a$ , применима классическая формула Резерфорда. При меньших передачах импульса квантовомеханическое размытие должно сглаживать кривую сечения рассеяния. В результате приходим к следующему квантовомеханическому выражению для  $\theta_{\min}$ :

$$\theta_{\min}^{(кв)} \approx \frac{\hbar}{pa}. \quad (13.98)$$

Заметим здесь, что отношение классического значений предельного угла  $\theta_{\min}$  к квантовомеханическому, равное  $zZe^2/\hbar v$ , согласуется с отношением (13.42) классического и квантового значений  $b_{\min}$ . Для быстрых частиц величина  $Zze^2/\hbar v$  для всех веществ, кроме

веществ с очень большим  $Z$ , меньше единицы. Поэтому в качестве  $\theta_{\min}$  следует использовать в расчетах квантовомеханический критерий (13.98). Подставляя в (13.98) выражение (13.95) для радиуса экранирования  $a$ , получаем

$$\theta_{\min}^{(кв)} \approx \frac{Z^{1/3}}{192} \left( \frac{mc}{p} \right), \quad (13.99)$$

где  $p$  — импульс налетающей частицы ( $p = \gamma Mv$ ), а  $m$  — масса электрона.

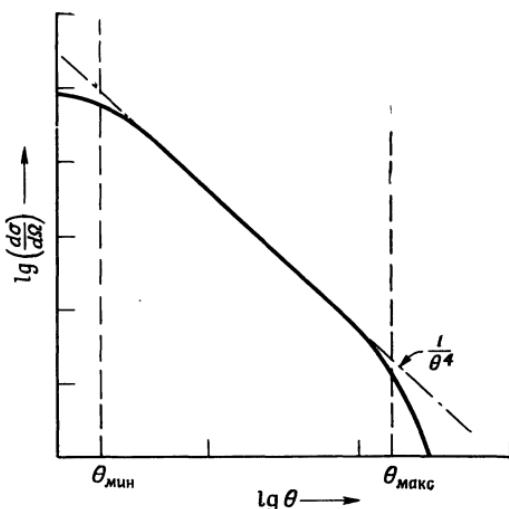
При сравнительно больших углах величина сечения рассеяния начинает заметно отличаться от значения (13.92) вследствие конечного размера ядер. Для электронов и  $\mu$ -мезонов влияние размера ядра сводится к чисто электромагнитному эффекту, тогда как для  $\pi$ -мезонов, протонов и т. д. играют роль также специфические эффекты, связанные с природой ядерных сил. Так как все эти эффекты приводят к понижению величины сечения рассеяния по сравнению с (13.92), мы рассмотрим лишь электромагнитный эффект. Распределение заряда в ядре атома можно весьма приближенно считать однородным внутри сферы радиусом  $R$  и быстро спадающим до нуля вне этой сферы.

Это означает, что в пределах ядра электростатический потенциал меняется не как  $1/r$ , а по параболическому закону и имеет конечную величину при  $r = 0$ :

$$V(r) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{zZe^2}{R} \left( 1 - \frac{r^2}{3R^2} \right) & \text{при } r < R, \\ \frac{zZe^2}{r} & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (13.100)$$

Кулоновское поле точечного заряда обладает той особенностью, что для него квантовомеханическое значение эффективного сечения рассеяниядается классической формулой Резерфорда. Поэтому для точечных ядер нет необходимости различать области углов, соответствующие прицельным параметрам, меньшим или большим квантовомеханического значения предельного прицельного параметра  $b_{\min}^{(кв)}$ , определяемого соотношением (13.40). При учете конечного размера ядер, однако, будет сказываться конечность де-бройлевской длины волны налетающей частицы. Если рассмотреть волновые пакеты, налетающие на ядро, которое можно считать областью с относительно постоянным (внутри сферы  $r = R$ ) потенциалом (13.100), то результат будет существенно отличаться от простой формулы (13.92). Картина здесь весьма схожа с рассмотренной в гл. 9 дифракцией на сфере. Рассеяние происходит лишь в пределах углов, меньших  $\sim \lambda/R$ , где  $\lambda$  — соответствующая длина волны (деленная на  $2\pi$ ).

Для больших углов волны, идущие от различных частей рассеивающего препятствия, интерферируют, что приводит к быстрому убыванию рассеянного поля или, возможно, к появлению дополнительных максимумов и минимумов. Так как длина волны частицы



Фиг. 13.6. Зависимость сечения рассеяния на атомах от угла, полученная с учетом экранирующего влияния электронов на малых углах и конечного размера ядер на больших углах.

$\lambda = \hbar/p$ , максимальный угол рассеяния, выше которого сечение рассеяния спадает значительно быстрее, чем по закону  $\theta^{-4}$ , равен

$$\theta_{\max} \approx \frac{\hbar}{pR}. \quad (13.101)$$

Используя простую оценку для  $R$ , а именно  $R \approx 1/2 (e^2/mc^2) A^{1/3} = 1,4 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см}$ , получаем для численного значения этого угла

$$\theta_{\max} \approx \frac{274}{A^{1/3}} \left( \frac{mc}{p} \right). \quad (13.102)$$

Отметим здесь, что для всех значений  $Z$  и  $A$  имеем  $\theta_{\max} \gg \theta_{\min}$ . Если импульс падающей частицы настолько мал, что  $\theta_{\max} \gtrsim 1$ , то конечность размера ядра не оказывается существенно на результатах рассеяния. Для алюминиевой мишени  $\theta_{\max} = 1$  при  $p \sim 50 \text{ Мэв}/c$ , что соответствует кинетической энергии  $\sim 50 \text{ Мэв}$  для электронов,  $12 \text{ Мэв}$  для  $\mu$ -мезонов и  $1,3 \text{ Мэв}$  для протонов. Только при энергиях, превышающих указанные значения, конечность размеров ядер оказывается на рассеянии. Для приведенного значения импульса  $\theta_{\min}^{(\text{кв})} \sim 10^{-4} \text{ рад}$ .

На фиг. 13.6 качественно показан характер зависимости сечения рассеяния от угла. Пунктирная линия соответствует приближению Резерфорда (13.92) для малых углов, сплошной линией изображена качественная зависимость сечения рассеяния с учетом экранирования и конечного размера ядер. Полное сечение рассеяния можно

определить, проинтегрировав (13.96) по всем телесным углам:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi \approx 2\pi \left( \frac{2zZe^2}{\rho v} \right)^2 \int_0^\infty \frac{\theta d\theta}{(\theta_{\min}^2 + \theta^2)^2}. \quad (13.103)$$

Окончательно получим

$$\sigma \approx \pi \left( \frac{2zZe^2}{\rho v} \right)^2 \frac{1}{\theta_{\min}^2} = \pi a^2 \left( \frac{2zZe^2}{\hbar v} \right)^2, \quad (13.104)$$

причем при выводе последнего выражения было использовано значение (13.98) для  $\theta_{\min}^{(кв)}$ . Из полученного выражения видно, что при больших скоростях полное сечение рассеяния может быть гораздо меньше классической величины геометрической «площади сечения» атома  $\pi a^2$ .

### *§ 7. Среднеквадратичное значение угла рассеяния и угловое распределение при многократном рассеянии*

Резерфордовское рассеяние соответствует очень малым углам рассеяния даже для кулоновского поля точечного заряда; для быстрых частиц, кроме того, значение  $\theta_{\max}$  мало по сравнению с единицей. Поэтому вероятность рассеяния на малые углы очень велика. Частица, проходящая слой вещества конечной толщины, испытывает многократные отклонения на малый угол и выходит из слоя под некоторым малым углом рассеяния, представляющим собой статистическую суперпозицию большого числа отклонений. Лишь весьма редко частица будет отклоняться при соударении на большой угол; так как такие события редки, частица испытывает лишь одно подобное соударение. Это обстоятельство позволяет разделить всю область углов на две части: область сравнительно больших углов, соответствующую однократно рассеянным частицам, и область очень малых углов, соответствующую частицам, подвергшимся многократному, или сложному, рассеянию. Полное угловое распределение может быть приближенно определено независимым рассмотрением обеих указанных областей. Промежуточная область так называемого множественного рассеяния дала бы плавный переход от малых углов к большим.

Для области многократного рассеяния, где происходит большое число последовательных отклонений на малые углы, симметрично распределенные относительно направления падения, важнейший характеристикой является среднеквадратичное значение угла рассеяния для одного соударения. Оно определяется соотношением

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\int \theta^2 (d\sigma/d\Omega) d\Omega}{\int (d\sigma/d\Omega) d\Omega}. \quad (13.105)$$

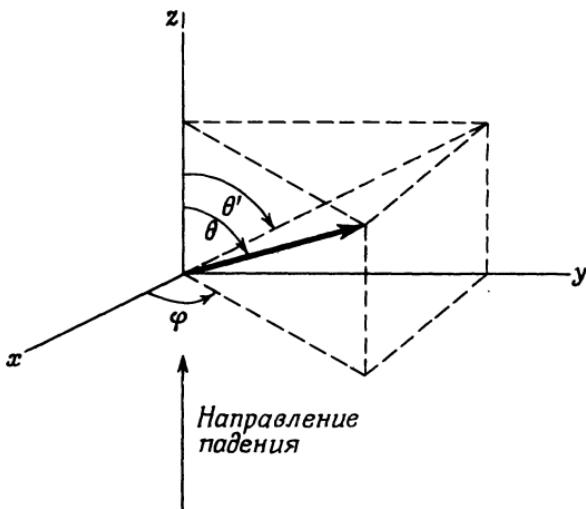
Принимая приближения, введенные в § 6, получаем

$$\langle \theta^2 \rangle = 2\theta_{\min}^2 \ln \left( \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right). \quad (13.106)$$

Если принять квантовое значение (13.99) для  $\theta_{\min}$ , а  $\theta_{\max}$  определять согласно (13.102), то формулу (13.106) можно переписать в следующем виде:

$$\langle \theta^2 \rangle \approx 4\theta_{\min}^2 \ln (210Z^{-1/3}). \quad (13.107)$$

Если конечные размеры ядра несущественны (обычно это имеет место лишь для электронов, а для других частиц — только при



Ф и г. 13.7.

очень низких энергиях), то величину  $\theta_{\max}$  в (13.106) следует положить равной единице. В этом случае аргумент логарифма в (13.107) принимает вид  $(192Z^{-1/3}p/mc)^{1/2}$  вместо  $(210Z^{-1/3})$ .

Часто нас интересует проекция  $\theta'$  угла рассеяния на некоторую плоскость, например плоскость фотэмulsionии или пузырьковой камеры, как показано на фиг. 13.7. Как нетрудно видеть, для малых углов

$$\langle \theta'^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle. \quad (13.108)$$

Каждое единичное отклонение описывается формулой Резерфорда (13.92), «обрезанной» должным образом при  $\theta_{\min}$  и  $\theta_{\max}$ , со средним значением угла рассеяния или его проекции, равным нулю, и средним квадратом  $\langle \theta^2 \rangle$ , определяемым согласно (13.106).

Так как последовательные соударения являются независимыми событиями, то можно воспользоваться центральной предельной теоремой математической статистики, согласно которой для большого числа  $n$  таких соударений угловое распределение приближенно описывается гауссовым распределением относительно направления падения частицы со средним квадратом угла рассеяния  $\langle \Theta^2 \rangle = n \langle \theta^2 \rangle$ . Число соударений, претерпеваемых частицей при прохождении слоя вещества толщиной  $t$  при  $N$  атомах в единице объема, равно

$$n = N\sigma t \approx \pi N \left( \frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{t}{\theta_{\min}^2}. \quad (13.109)$$

Отсюда для среднего квадрата угла рассеяния имеем

$$\langle \Theta^2 \rangle \approx 2\pi N \left( \frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \left( \ln \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right) t, \quad (13.110)$$

или, воспользовавшись выражением (13.107) для  $\langle \theta^2 \rangle$ ,

$$\langle \Theta^2 \rangle \approx 4\pi N \left( \frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 [\ln(210Z^{-1/3})] t. \quad (13.111)$$

Средний квадрат угла рассеяния линейно растет с увеличением толщины  $t$ . При этом для умеренных значений толщин, пока частица не теряет существенной доли своей энергии, основная часть гауссова распределения приходится на очень малые углы отклонения.

Распределение проекций углов отклонения при многократном рассеянии имеет вид

$$P_M(\theta') d\theta' = \frac{1}{V \pi \langle \Theta^2 \rangle} \exp\left(-\frac{\theta'^2}{\langle \Theta^2 \rangle}\right) d\theta', \quad (13.112)$$

где рассматриваются как положительные, так и отрицательные углы  $\theta'$ . Формулу Резерфорда (13.92) при малых углах рассеяния можно выразить через проекцию угла рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\theta'} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{\theta'^3}. \quad (13.113)$$

Это приводит к следующему закону распределения для проекций угла отклонения при однократном рассеянии:

$$P_S(\theta') d\theta' = Nt \frac{d\sigma}{d\theta'} d\theta' = \frac{\pi}{2} Nt \left( \frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{d\theta'}{\theta'^3}. \quad (13.114)$$

Найденный закон углового распределения для однократного рассеяния применим лишь для углов, больших по сравнению с  $\langle \Theta^2 \rangle^{1/2}$ , и определяет «хвост» гауссова распределения.

Вводя в качестве аргумента относительную проекцию угла отклонения

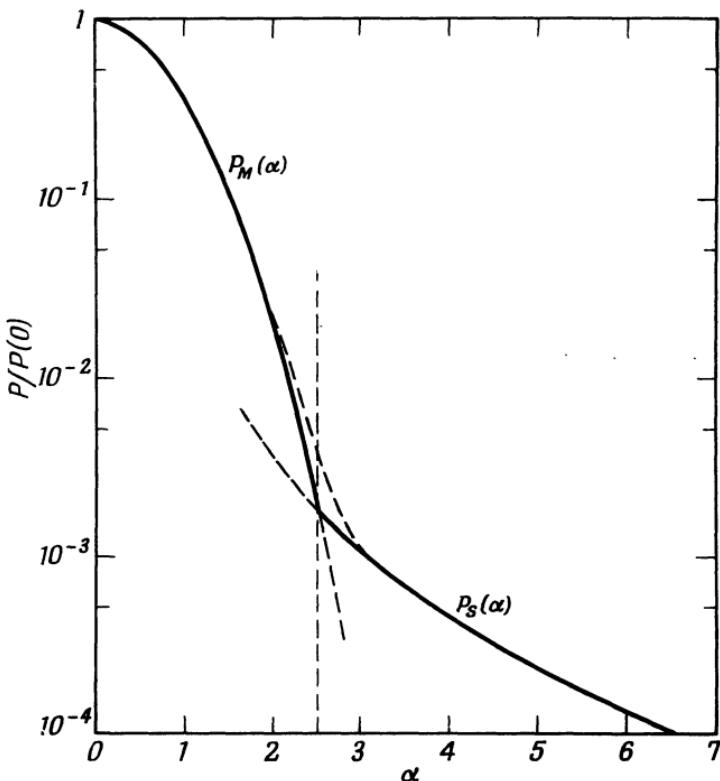
$$\alpha = \frac{\theta'}{\langle \Theta^2 \rangle^{1/2}}, \quad (13.115)$$

можно переписать угловое распределение для многократного и однократного рассеяния в виде

$$P_M(\alpha) d\alpha = \frac{1}{V\pi} e^{-\alpha^2} d\alpha, \quad (13.116)$$

$$P_S(\alpha) d\alpha = \frac{1}{8 \ln(210Z^{-1/3})} \frac{d\alpha}{\alpha^3},$$

где использовано соотношение (13.111) для  $\langle \Theta^2 \rangle$ . Заметим, что в выбранных единицах относительные распределения для многократного и однократного рассеяния не зависят от толщины слоя,



Фиг. 13.8. Распределение проекций углов отклонения при многократном и однократном рассеянии.

Плавный переход в области множественного рассеяния ( $\alpha \sim 2-3$ ) от многократного рассеяния на малые углы (приближенно следующего гауссову закону) к упругому рассеянию на большие углы (пропорционального  $\alpha^{-3}$ ) показан пунктиром.

а определяются лишь значением  $Z$ , причем зависимость от  $Z$  тоже довольно слабая. Действительно, величина  $8 \ln(210Z^{-1/3})$  равна 36,0 при  $Z = 13$  (для алюминия) и 31,0 при  $Z = 82$  (для свинца). Общий характер угловых распределений рассеяния показан на фиг. 13.8. Переход от многократного рассеяния к одиночным соуда-

рениям происходит вблизи  $\alpha \approx 2,5$ . В этой точке функция распределения Гаусса убывает примерно до  $1/600$  своего максимального значения. Таким образом, распределение, соответствующее однократному рассеянию, представляет лишь весьма малый «хвост» кривой многократного рассеяния.

Имеются два обстоятельства, обусловливающие отклонение хода углового распределения от изображенных на фиг. 13.8 простых зависимостей. Закон Гаусса представляет собой предельную форму углового распределения, соответствующую очень большим  $n$ . Если толщина  $t$  такова, что определяемое соотношением (13.109) число соударений  $n$  не очень велико (скажем,  $n \leq 100$ ), то распределение характеризуется кривой для однократного рассеяния (для углов, меньших  $\alpha \approx 2,5$ ) и максимум распределения при малых углах становится более резким, чем у гауссовой кривой. Если же, наоборот, толщина слоя слишком велика, то средний квадрат угла рассеяния  $\langle \Theta^2 \rangle$  становится сравнимым с углом  $\theta_{\max}$  (13.102), ограничивающим угловую ширину распределения при однократном рассеянии. Для еще больших толщин кривая, соответствующая многократному рассеянию, перекрывает область углов, соответствующих однократному рассеянию, так что кривая углового распределения не имеет хвоста, характерного для однократного рассеяния (см. задачу 13.5).

## § 8. Электропроводность плазмы

Результаты исследования многократного рассеяния могут быть почти непосредственно применены к совершенно отличной на первый взгляд проблеме определения электропроводности плазмы. Для простоты мы будем рассматривать так называемый газ Лоренца, содержащий в единице объема  $N$  фиксированных ионов с зарядом  $Ze$  и  $NZ$  свободных электронов. Кроме того, пренебрежем электрон-электронными взаимодействиями. Приближение фиксированных ионов представляется разумным, по крайней мере для плазмы, у которой кинетическая температура электронов и ионов примерно одинакова. Влияние электрон-электронных соударений будет рассмотрено несколько позже.

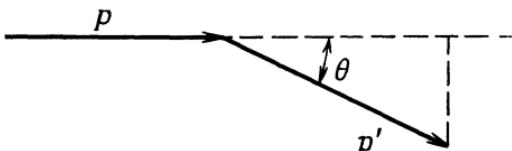
Простая теория электропроводности Друде, вкратце изложенная в гл. 7, § 8, основана на рассмотрении уравнения движения одного электрона

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} - m\mathbf{v}\mathbf{v}, \quad (13.117)$$

где  $v$  — частота соударений. Для низких частот электропроводность  $\sigma$ , обусловленная движением электронов, определяется равенством

$$\sigma = \frac{NZe^2}{mv}. \quad (13.118)$$

Для вычисления соответствующей частоты соударений заметим, что слагаемое  $mvv$  в (13.117) определяет скорость убывания продольного импульса из-за соударений с ионами при движении электрона под действием приложенного электрического поля. Если угол рассеяния при одном упругом соударении обозначить  $\theta$  (фиг. 13.9), то потеря продольного импульса частицы с импульсом  $p$  будет равна  $p(1 - \cos \theta)$ . Среднее значение этой величины, умноженное на число соударений на единице длины, и определяет



Ф и г. 13.9.

уменьшение продольного импульса на единице длины, т. е. величину  $mv$ . Таким образом,

$$mv = N\sigma p \langle 1 - \cos \theta \rangle, \quad (13.119)$$

где  $\sigma$  — полное сечение рассеяния (13.104). Так как кулоновское рассеяние происходит в основном на очень малые углы, можно принять  $\langle 1 - \cos \theta \rangle \approx 1/2 \langle \theta^2 \rangle$ . Таким образом, потери продольного импульса на единице длины оказываются равными

$$mv \approx \frac{1}{2} N\sigma p \langle \theta^2 \rangle = 4\pi N \frac{(Ze^2)^2}{mv^3} \ln \left( \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right); \quad (13.120)$$

здесь использовано выражение (13.106) для  $\langle \theta^2 \rangle$ . Подставляя (13.120) в (13.118), получаем выражение для электропроводности

$$\sigma(v) \approx \frac{mv^3}{4\pi Ze^2 \ln(\theta_{\max}/\theta_{\min})}. \quad (13.121)$$

Найденный результат относится к электронам со скоростью  $v$ .

Нужно провести усреднение по тепловому распределению скоростей. Зависимость от скорости  $v$  в (13.121) определяется в основном множителем  $v^3$ . Аргумент логарифма можно, не совершая значительной ошибки, вычислять для средней скорости. При энергиях, соответствующих даже наиболее горячей плазме, можно пренебречь влиянием размеров ядра, поэтому положим  $\theta_{\max} = 1$ . Выбор величины  $\theta_{\min}$  несколько более сложен. Если действие атомов описывать экранированным потенциалом, то для  $\theta_{\min}$  следует использовать выражение (13.97) или (13.98), где радиус атома  $a$  определяется соотношением (13.95). Взаимодействие при электрон-ионных соударениях в плазме описывается экранированным потенциалом Дебая — Хюккеля (10.113). Следовательно, в этом случае роль

радиуса атома  $a$  в формулах для  $\theta_{\min}$  играет дебаевский радиус  $k_D^{-1}$ . При расчетах следует пользоваться выражением (13.97) или (13.98) в зависимости от того, какая из этих величин больше. С учетом всего сказанного аргумент логарифма в (13.121) принимает вид

$$\Lambda = \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} = \begin{cases} \frac{12\pi N}{k_D^3}, \\ \frac{Ze^2}{\sqrt{3}\hbar\langle u^2 \rangle^{1/2}} \frac{12\pi N}{k_D^3}, \end{cases} \quad (13.122)$$

где  $k_D$  определяется соотношением (10.106) или (10.112), а  $\langle u^2 \rangle^{1/2} = kT/m$ . Если средняя энергия электрона  $3/2kT$  меньше  $13,6 Z^2 \text{ эв}$ , то следует использовать верхнее значение в (13.122), если же она больше этой величины, то нижнее.

При максвелловском распределении скоростей среднее значение  $n$ -й степени скорости равно

$$\langle v^n \rangle = \left( \frac{2kT}{m} \right)^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}. \quad (13.123)$$

Следовательно, значение проводимости (13.121), усредненной по максвелловскому распределению скоростей, оказывается равным

$$\sigma \approx \frac{m}{Ze^2 \ln \Lambda} \left( \frac{2}{\pi} \frac{kT}{m} \right)^{3/2}. \quad (13.124)$$

Этот приближенный результат, полученный весьма нехитрым способом с помощью элементарной теории Друде, отличается множителем 2 от точного значения, найденного исходя из уравнения Больцмана. Физический механизм, используемый в обоих расчетах, одинаков, однако при более строгом исследовании производится усреднение не величины  $v^3$ , а величины  $v^5$ <sup>1</sup>). Поэтому полученные результаты отличаются множителем  $\langle v^5 \rangle / \langle v^2 \rangle \langle v^3 \rangle = 2$ .

При учете электрон-электронных соударений потери продольного импульса возрастают и, следовательно, проводимость меньше, чем удвоенная величина (13.124). Относительное уменьшение

1) Появление добавочного множителя  $v^2$  можно пояснить следующим образом. При наличии электрического поля распределение скоростей, первоначально обладавшее сферической симметрией, искажается в направлении приложенного поля. Величина этого искажения определяет ток и (в соответствии с законом Ома) проводимость. Результирующее искаженное распределение определяется равновесием между действием анизотропного электрического поля и стремлением к изотропии, обусловленным соударениями. Так как эффективное сечение рассеяния обратно пропорционально квадрату скорости, отношение высокоскоростной компоненты анизотропной части распределения к соответствующей компоненте нормального распределения пропорционально  $v^2$ .

зависит от  $Z$  приблизительно как  $Z/(1+Z)$  и меняется от 0,58 при  $Z = 1$  до 1,0 при  $Z \rightarrow \infty$ . Таким образом, выражение (13.124) в приведенном виде может служить хорошим приближением для расчета проводимости водородной или дейтериевой плазмы с учетом влияния электрон-электронных соударений. Используя классическое (низкоэнергетическое) значение (13.122) для  $\Lambda$ , можно придать формуле (13.124) следующую, весьма наглядную форму:

$$\sigma \approx \frac{1}{3} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{\Lambda}{\ln \Lambda} \omega_p. \quad (13.125)$$

Величина  $\Lambda$  имеет порядок  $10^4$  и, таким образом, для типичной водородной плазмы ( $n_e \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $T \sim 10^5 \text{ К}$ )  $\sigma \sim 200 \omega_p \approx \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1}$ . Хотя эта величина и меньше проводимости металлов ( $\sim 10^{16} \text{ сек}^{-1}$ ), но все же она достаточно велика для того, чтобы при исследовании проникновения полей в плазму можно было, как это и делалось в гл. 10, пользоваться приближением бесконечной проводимости.

### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Проблема прохождения частиц через вещество всю жизнь интересовала Нильса Бора. Великолепное изложение вопроса в целом с выяснением характерного взаимоотношения между классическими и квантовомеханическими эффектами представлено в его исчерпывающей обзорной статье [14], опубликованной в 1948 г. Численные таблицы и графические данные о потерях энергии, а также основные формулы приведены в книге Родси [87], гл. 2 и в главе, написанной Бете и Эшкином в книге под редакцией Серге [92]. В книге Родси содержится также и полуклассическое исследование потерь энергии и рассеяния, сходное с нашим. В работах Штернхаймера [105] рассмотрен вопрос о влиянии поляризационных эффектов на потери энергии ультрарелятивистских частиц и приведены в виде графиков многочисленные количественные данные для различных веществ.

Корректный вывод выражения для проводимости плазмы дается в монографии Спитцера [104], гл. 5.

### ЗАДАЧИ

**13.1.** Тяжелая частица с зарядом  $ze$  и массой  $M$ , движущаяся с нерелятивистской скоростью  $v$ , соударяется с первоначально покоявшимся электроном с зарядом  $e$  и массой  $m$ . Показать, используя лишь условие  $M \gg m$  и приближение нерелятивистского движения, что зависимость энергии, переданной при кулоновском соударении электрону, от прицельного параметра  $b$  определяется выражением

$$\Delta E(b) = \frac{2 (ze^2)^2}{mv^2} \frac{1}{b^2 + (ze^2/mv^2)^2}.$$

**13.2. а)** Приняв в квантовомеханическом выражении для потерь энергии  $\hbar(\omega) = 12Z \text{ эв}$ , вычислить величину потерь (в  $\text{Мэв}/\text{см}$ ) в воздухе при нормальных температуре и давлении, в алюминии, меди и свинце для протона и  $\mu$ -мезона с кинетическими энергиями 10, 100 и 1000 Мэв.

б) Выразить полученные потери энергии в единицах  $M\text{эв}\cdot\text{см}^2/\text{г}$  и сравнить результаты для различных веществ. Объяснить, почему потери энергии, выраженные в  $M\text{эв}\cdot\text{см}^2/\text{г}$ , отличаются друг от друга не более чем вдвое, тогда как в единицах  $M\text{эв}/\text{см}$  они существенно различаются.

13.3. Рассмотреть потери энергии для быстрой, но нерелятивистской тяжелой частицы с зарядом  $ze$ , проходящей через электронную плазму, описывая экранированное кулоновское взаимодействие между электронами и налетающей частицей выражением (10.113).

а) Показать, что передача энергии при соударениях с прицельным параметром  $b$  определяется приближенной формулой

$$\Delta E(b) \approx \frac{2(ze^2)^2}{mv^2} k_D^2 K_1^2(k_D b),$$

где  $m$  — масса электрона,  $v$  — скорость налетающей частицы,  $k_D$  — дебаевский радиус, определяемый согласно (10.112).

б) Определить потери на единице пути для соударений с прицельными параметрами, большими  $b_{\min}$ . Считая  $k_D b_{\min} \ll 1$ , записать полученный результат, используя как классическое, так и квантовомеханическое значения  $b_{\min}$ .

13.4. При допущениях, использованных при исследовании многократного рассеяния, показать, что величина проекции  $y$  поперечного смещения налетающей частицы (см. фиг. 13.7) подчиняется гауссовскому распределению

$$P(y) dy = A \exp \left[ \frac{-y^2}{2 \langle y^2 \rangle} \right] dy,$$

где средний квадрат проекции смещения  $\langle y^2 \rangle = (x^2/6) \langle \Theta^2 \rangle$ ,  $x$  — толщина пройденного слоя вещества,  $\langle \Theta^2 \rangle$  — средний квадрат угла рассеяния.

13.5. Если при нахождении «хвоста» углового распределения многократного рассеяния, определяемого «однократным рассеянием», учесть конечные размеры ядер, то, начиная с некоторой критической толщины  $x_c$ , «хвост» исчезает.

а) Определить величину  $x_c$  и вычислить ее значение (в см) для алюминия и свинца, считая налетающую частицу релятивистской.

б) Для полученных значений толщин вычислить число происходящих соударений и определить, применимо ли гауссово приближение.