

Глава 14

ИЗЛУЧЕНИЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

Как известно, заряды, движущиеся с ускорением, излучают электромагнитные волны. В гл. 9 уже были рассмотрены примеры излучения электромагнитных волн при изменении во времени макроскопических распределений плотности зарядов и токов, которые, по существу, представляют собой движущиеся заряды. Мы еще раз вернемся к этой задаче в гл. 16, где будет дано систематическое изложение теории излучения мультиполей. Представляет, однако, интерес исследование электромагнитного излучения, источником которого является движущийся точечный заряд или несколько таких зарядов. Для этих случаев полезно разработать методы расчета, позволяющие связать интенсивность и поляризацию излучения непосредственно с характеристиками движения и траектории заряда. В частности, представляет интерес определение полных потерь на излучение, углового распределения излучения и его частотного спектра. При нерелятивистском движении излучение описывается известной формулой Лармора (см. § 2). Однако для релятивистских частиц появляется целый ряд необычных и интересных эффектов, которым мы и будем уделять основное внимание. В настоящей главе мы получим ряд общих результатов, которые будут затем применены к рассмотрению конкретных примеров излучения зарядов, совершающих заданное движение, в частности во внешних силовых полях. Следующая глава будет посвящена исследованию излучения при атомных или ядерных соударениях.

§ 1. Потенциалы Лиенара — Вихерта и поле точечного заряда

Как было показано в гл. 6, скалярный и векторный потенциалы ограниченного распределения зарядов и токов в свободном пространстве могут быть представлены в виде

$$A_\mu(x, t) = \frac{1}{c} \int \int \frac{J_\mu(x', t')}{R} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) d^3x' dt', \quad (14.1)$$

где $R = |x - x'|$, а наличие δ -функции обеспечивает запаздывающие свойства потенциалов в соответствии с условием причинности. Точечному заряду e , находящемуся в точке с радиусом-вектором $r(t)$ и движущемуся со скоростью $c\beta(t)$, соответствует распределение плотности тока

$$J_\mu(x, t) = ec\beta_\mu \delta[x - r(t)], \quad (14.2)$$

где $\beta_\mu = (\beta, i)$. Для такого распределения плотности источников интегрирование по объему в (14.1) проводится сразу и дает

$$A_\mu(x, t) = e \int \frac{\beta_\mu(t')}{R(t')} \delta \left[t' + \frac{R(t')}{c} - t \right] dt', \quad (14.3)$$

где теперь $R(t') = |x - r(t')|$. Хотя уже выражение (14.3) достаточно удобно для расчета полей, можно провести интегрирование и по dt' , если учесть приведенное в гл. 1, § 2, правило интегрирования выражений с δ -функцией, аргумент которой является функцией переменной интегрирования:

$$\int g(x) \delta[f(x) - a] dx = \left[\frac{g(x)}{|df/dx|} \right]_{f(x)=a}. \quad (14.4)$$

Производная функции $f(t') \equiv t' + [R(t')/c]$ равна

$$\frac{df}{dt'} \equiv \kappa = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} = 1 - n \cdot \beta, \quad (14.5)$$

где $c\beta$ — мгновенная скорость частицы, а $n = R/R$ — единичный вектор, направленный из точки нахождения заряда в точку наблюдения. Подставляя (14.5) в (14.4) и (14.3), получаем потенциалы точечного заряда, называемые *потенциалами Лиенара—Вихерта*:

$$\Phi(x, t) = e \left[\frac{1}{\kappa R} \right]_{\text{запазд}}, \quad (14.6)$$

$$\mathbf{A}(x, t) = e \left[\frac{\beta}{\kappa R} \right]_{\text{запазд}}.$$

Квадратные скобки с индексом «запазд» означают, что величины в скобках следует брать в момент времени $t' = t - [R(t')/c]$. Заметим, что для нерелятивистского движения $\kappa \rightarrow 1$. При этом выражения для потенциалов (14.6) переходят в обычные известные нерелятивистские формулы.

Для определения векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{B} по потенциалам A_μ можно применить соответствующие дифференциальные операторы непосредственно к (14.6). Однако проще исходить из выражения

(14.3). Заметим, что в (14.3) координаты точки наблюдения \mathbf{x} входят лишь в величину R . Следовательно, операцию градиента можно заменить следующим образом:

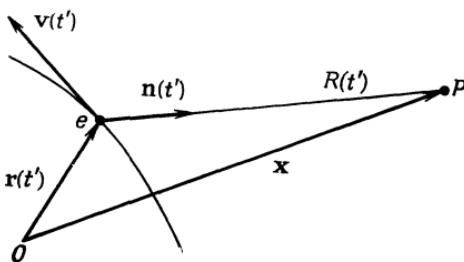
$$\text{grad} \rightarrow \text{grad } R \frac{\partial}{\partial R} = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial R}. \quad (14.7)$$

Поэтому электрическое и магнитное поля можно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e \int \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \delta \left(t' + \frac{R}{c} - t \right) + \frac{1}{cR} (\mathbf{\beta} - \mathbf{n}) \delta' \left(t' + \frac{R}{c} - t \right) \right] dt', \quad (14.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = e \int (\mathbf{n} \times \mathbf{\beta}) \left\{ -\frac{\delta [t' + (R/c) - t]}{R^2} + \frac{1}{cR} \delta' \left(t' + \frac{R}{c} - t \right) \right\} dt'.$$

Штрихи у δ -функции означают дифференцирование по ее аргументу. Переходя к переменной $f(t') = t' + R(t')/c$ и интегрируя по



Фиг. 14.1.

частям слагаемые с производной δ -функции, легко получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= e \left[\frac{\mathbf{n}}{\kappa R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n} - \mathbf{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{запад}}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= e \left[\frac{\mathbf{\beta} \times \mathbf{n}}{\kappa R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{\beta} \times \mathbf{n}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{запад}}. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Удобно сначала выполнить дифференцирование единичного вектора \mathbf{n} . Как видно из фиг. 14.1, скорость изменения \mathbf{n} во времени равна взятому с обратным знаком отношению нормальной составляющей \mathbf{v} к R

$$\frac{d\mathbf{n}}{c dt'} = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{\beta})}{R}. \quad (14.10)$$

Выполняя дифференцирование вектора \mathbf{n} всюду, где он явно входит в выражения (14.9), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= e \left[\frac{\mathbf{n}}{\kappa^2 R^2} + \frac{\mathbf{n}}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{\dot{\beta}}{\kappa^2 R^2} - \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\dot{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{запазд}}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= e \left[\left\{ \frac{\dot{\beta}}{\kappa^2 R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\dot{\beta}}{\kappa R} \right) \right\} \times \mathbf{n} \right]_{\text{запазд}}.\end{aligned}\quad (14.11)$$

Из найденных соотношений видно, что магнитное поле связано с напряженностью электрического поля простым соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad (14.12)$$

где обе части равенства берутся с учетом запаздывания. Оставшиеся в выражениях (14.11) производные можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt'} \beta &= \dot{\beta}, \\ \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} (\kappa R) &= \beta^2 - \beta \cdot \mathbf{n} - \frac{R}{c} \mathbf{n} \cdot \dot{\beta}.\end{aligned}\quad (14.13)$$

Окончательно электрическое поле представляется в виде

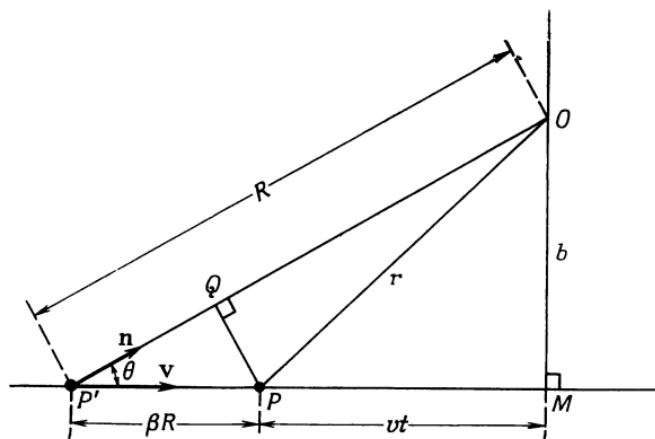
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e \left[\frac{(\mathbf{n} - \dot{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right]_{\text{запазд}} + \frac{e}{c} \left[\frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R} \times \{(\mathbf{n} - \dot{\beta}) \times \dot{\beta}\} \right]_{\text{запазд}}, \quad (14.14)$$

а магнитное поле определяется по (14.12). Выражения для векторов поля (14.14) и (14.12), естественно, распадаются на две части: первая часть («скоростная») зависит лишь от скорости и не зависит от ускорения; вторая часть («ускорительная») линейно зависит от $\dot{\beta}$. Первая часть имеет фактически статический характер, убывая с расстоянием как R^{-2} , тогда как поле, зависящее от ускорения, является типичным поперечным полем излучения, для которого \mathbf{E} и \mathbf{B} перпендикулярны радиусу-вектору и изменяются как R^{-1} .

Для равномерно движущейся частицы зависящее от скорости поле должно, конечно, совпадать с электромагнитным полем, полученным в гл. 11, § 10, из статического кулоновского поля заряда с помощью преобразований Лоренца. Так, например, для поперечной составляющей электрического поля E_1 в точке, расположенной на расстоянии b от прямолинейной траектории заряда, было найдено выражение

$$E_1(t) = \frac{evb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (14.15)$$

При этом начало отсчета времени выбрано так, что в момент $t = 0$ заряд находится на кратчайшем расстоянии от точки наблюдения. Выражение для составляющей поля $E_1(t)$ (14.15) внешне сильно отличается от «скоростной» составляющей поля (14.14). Это кажущееся различие обусловлено тем, что в (14.15) поле выражено



Фиг. 14.2. Положение равномерно движущегося заряда в данный момент и запаздывающий момент времени.

в функции положения заряда в данный момент, а не в запаздывающий момент времени. Чтобы показать эквивалентность обоих выражений, рассмотрим фиг. 14.2. Здесь O — точка наблюдения, P — точка, в которой находится заряд в данный момент t и P' — точка, где он находится в соответствующий запаздывающий момент. Расстояние $P'Q$ равно $\beta R \cos \theta = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{b}}) R$, следовательно, отрезок OQ равен κR . Из треугольников OPQ и $PP'Q$ находим

$$(\kappa R)^2 = r^2 - (PQ)^2 = r^2 - \beta^2 (R \sin \theta)^2.$$

Из треугольника OMP' видно, что $R \sin \theta = b$ и, следовательно,

$$(\kappa R)^2 = b^2 + v^2 t^2 - \beta^2 b^2 = \frac{1}{\gamma^2} (b^2 + v^2 v^2 t^2). \quad (14.16)$$

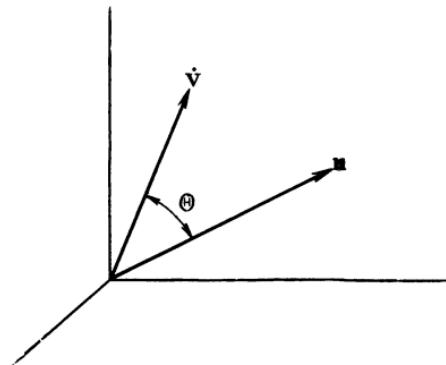
Поперечная составляющая поля, зависящего только от скорости, согласно (14.14), равна

$$E_1(t) = e \left[\frac{b}{\gamma^2 (\kappa R)^3} \right]_{\text{запазд}}. \quad (14.17)$$

Подставляя в это соотношение значение (14.16) для κR ; выраженное через положение заряда в данный момент, мы убеждаемся, что (14.17) и (14.15) эквивалентны. Выражения для остальных составляющих полей \mathbf{E} и \mathbf{B} выводятся аналогично.

**§ 2. Полная мощность,
излучаемая ускоренно движущимся зарядом.
Формула Лармора и ее релятивистское обобщение**

Если заряд, движущийся ускоренно, наблюдать в системе отсчета, в которой его скорость можно считать малой по срав-



Ф и г. 14.3.

нению со скоростью света, то в этой системе отсчета слагаемое поля (14.14), зависящее от ускорения, принимает вид

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{c} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\beta})}{R} \right]_{\text{запазд.}} \quad (14.18)$$

Мгновенный поток энергии определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_a|^2 \mathbf{n}. \quad (14.19)$$

Отсюда следует, что мощность, излучаемая в единицу телесного угла, равна ¹⁾

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |R\mathbf{E}_a|^2 = \frac{e^2}{4\pi c} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\beta})|^2. \quad (14.20)$$

Обозначая через Θ угол между ускорением \dot{v} и \mathbf{n} (фиг. 14.3), можно переписать выражение для излучаемой мощности в виде

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \Theta. \quad (14.21)$$

Мы получили известную характерную угловую зависимость $\sin^2 \Theta$. Из выражения (14.18) следует, что излучение поляризовано в пло-

¹⁾ В выражениях для углового распределения излучения мы будем всегда в явном виде указывать поляризацию, помещая под знаком модуля вектор, параллельный электрическому полю.

скости векторов $\dot{\mathbf{v}}$ и \mathbf{p} . Полная мгновенная мощность излучения определяется интегрированием выражения (14.21) по всем телесным углам:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{c^3}. \quad (14.22)$$

Это известная формула Лармора для нерелятивистского заряда, движущегося с ускорением.

Используя ковариантность относительно преобразований Лоренца, можно обобщить формулу Лармора (14.22) на случай произвольной скорости заряда. Энергия электромагнитного излучения ведет себя по отношению к преобразованию Лоренца как четвертая составляющая 4-вектора (см. задачу 11.13). Так как $dE_{\text{изл}} = P dt$, то мощность P инвариантна относительно преобразований Лоренца. Если удастся найти инвариантное относительно преобразований Лоренца выражение, переходящее в формулу Лармора (14.22), при $\beta \ll 1$, то это и будет желаемое обобщение формулы Лармора. Разумеется, существует много лоренц-инвариантных величин, сводящихся к требуемому виду при $\beta \rightarrow 0$. Однако, как очевидно из (14.14), искомое выражение должно зависеть лишь от β и $\dot{\beta}$. При этом ограничении, накладываемом на порядок производных, которые могут входить в соотношение, результат определяется единственным образом. Для нахождения требуемого обобщения перепишем формулу Лармора в виде

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right), \quad (14.23)$$

где m — масса заряженной частицы, а \mathbf{p} — его импульс. Лоренцинвариантное обобщение этого соотношения очевидно:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dp_\mu}{d\tau} \right), \quad (14.24)$$

где $d\tau = dt/\gamma$ — приращение собственного времени, а p_μ означает 4-вектор импульса-энергии заряженной частицы¹⁾. Чтобы убедиться, что выражение (14.24) переходит при $\beta \rightarrow 0$ в (14.23), вычислим скалярное произведение 4-векторов:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \cdot \frac{dp_\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2 - \beta^2 \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2. \quad (14.25)$$

¹⁾ В единственности представления (14.24) можно убедиться следующим образом. Как известно, лоренц-инвариантная величина образуется в результате скалярного умножения 4-векторов или тензоров более высокого ранга. В нашем распоряжении имеются лишь 4-векторы p_μ и $dp_\mu/d\tau$. При этом только выражение (14.24) переходит при $\beta \rightarrow 0$ в формулу Лармора. Можно показать, что тензоры более высокого порядка, например $p_\mu (dp_\nu/d\tau)$, дают либо нуль, либо выражения, пропорциональные (14.24) или m^2 .

Выражая в (14.24) все величины через скорость и ускорение с помощью соотношений $E = \gamma mc^2$, $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, получаем результат Лиенара (1898 г.)

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 [\dot{\mathbf{p}}^2 - (\mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}})^2]. \quad (14.26)$$

Релятивистское выражение для мощности излучения используется, в частности, при расчете ускорителей заряженных частиц. Потери на излучение в ряде случаев являются определяющим фактором, ограничивающим практически достижимую энергию в ускорителе. При заданной внешней силе (т. е. данной скорости изменения импульса) мощность излучения (14.24) обратно пропорциональна квадрату массы ускоряемой частицы. Следовательно, влияние этих радиационных эффектов должно быть наибольшим для электронов. Поэтому мы ограничимся в дальнейшем лишь рассмотрением излучения электронов.

В линейном ускорителе движение одномерно. Как следует из (14.25), в этом случае мощность излучения определяется соотношением

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2. \quad (14.27)$$

Скорость изменения импульса равна изменению энергии частицы на единице пути. Следовательно,

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2, \quad (14.28)$$

так что при прямолинейном движении мощность излучения зависит лишь от внешних сил, определяющих величину изменения энергии частицы с расстоянием, и не зависит от самой энергии или импульса частицы. Для отношения мощности излучения к мощности, поступающей от внешних источников, получим

$$\frac{P}{dE/dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{1}{v} \frac{dE}{dx} \rightarrow \frac{2}{3} \frac{(e^2/mc^2)}{mc^2} \frac{dE}{dx}, \quad (14.29)$$

где последнее выражение справедливо для релятивистских частиц ($\beta \rightarrow 1$). Как следует из (14.29), потери на излучение несущественны, если прирост энергии на расстоянии $e^2/mc^2 = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ не превышает $mc^2 = 0,511 \text{ Мэв}$, т. е. прирост менее $2 \cdot 10^{14} \text{ Мэв/м}$. Обычно приращение энергии в линейном ускорителе меньше или порядка 10 Мэв/м . Таким образом, потери на излучение в линейных ускорителях пренебрежимо малы.

Положение коренным образом меняется для циклических ускорителей типа синхротрона или бетатрона. В таких установках при движении частицы по орбите направление импульса \mathbf{p} быстро

изменяется, а изменение энергии за оборот мало. Это означает, что

$$\left| \frac{dp}{d\tau} \right| = \gamma \omega |p| \gg \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}. \quad (14.30)$$

В этом случае мощность излучения можно приближенно представить в виде

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \omega^2 |p|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{q^2} \beta^4 \gamma^4, \quad (14.31)$$

где использовано соотношение $\omega = c\beta/q$, а q — радиус орбиты. Для потерь энергии на излучение за один оборот имеем

$$\delta E = \frac{2\pi q}{c\beta} P = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{q} \beta^3 \gamma^4. \quad (14.32)$$

Для электронов большой энергии ($\beta \approx 1$) численное значение потерь можно определить по формуле

$$\delta E (M_{эв}) = 8,85 \cdot 10^{-2} \frac{[E (\Gamma_{эв})]^4}{q (м)}. \quad (14.33)$$

Для типичного синхротрона на небольшую энергию $q \approx 1$ м, $E_{макс} \approx 0,3$ Гэв. Следовательно, $\delta E_{макс} \sim 1$ кэв на оборот. Это — величина небольшая, но не пренебрежимо малая по сравнению с приростом энергии на оборот, составляющим обычно несколько килоэлектрон-вольт. Для самых больших электронных синхротронов, где максимальная энергия имеет величину порядка 5 Гэв, радиус орбиты составляет примерно 10 м. При этом потери на излучение оказываются $\sim 5,5$ Мэв на оборот. Так как практически очень трудно получить высокочастотную мощность, обеспечивающую такой прирост энергии на обороте, который был бы много больше этой величины, то значение 5—10 Гэв представляет верхний предел достижимых энергий в циклических электронных ускорителях.

Для расчета мощности излучения в циклических ускорителях удобна формула

$$P (вт) = \frac{10^6}{2\pi} \frac{\delta E (M_{эв})}{q (м)} J (a), \quad (14.34)$$

где J — ток пучка. Она справедлива в том случае, когда излучение различных электронов циркулирующего пучка некогерентно. В крупнейших электронных синхротронах мощность излучения достигает 0,1 вт на 1 мкА тока пучка. Хотя эта излучаемая мощность и очень мала, излучение может быть легко обнаружено и обладает рядом интересных особенностей, которые мы рассмотрим в § 6.

§ 3. Угловое распределение излучения ускоряемого заряда

При нерелятивистском движении ускоряемого заряда угловое распределение мощности излучения описывается простой зависимостью $\sin^2 \Theta$ [см. (14.21)], где угол Θ отсчитывается от направления ускорения. При релятивистском движении поле излучения ускоряемого заряда зависит не только от ускорения, но и от скорости, так что угловое распределение излучения носит более сложный характер. Исходя из (14.14), найдем радиальную составляющую вектора Пойнтинга

$$[S \cdot n]_{\text{запазд}} = \frac{e^2}{4\pi c} \left[\frac{1}{\kappa^6 R^2} |n \times [(n - \beta) \times \dot{\beta}]|^2 \right]_{\text{запазд}}. \quad (14.35)$$

Очевидно, что существует два типа релятивистских эффектов. Один эффект определяется взаимным пространственным расположением векторов β и $\dot{\beta}$. Кроме того, имеется общий релятивистский эффект, связанный с переходом от системы координат, относительно которой частица поконится, к лабораторной системе отсчета и проявляющийся в появлении в знаменателе выражения (14.35) степеней множителя κ , определяемого соотношением (14.5). Для ультрарелятивистских частиц угловое распределение излучения определяется в основном последним эффектом.

Произведение $S \cdot n$ в формуле (14.35) дает поток энергии за единицу времени через единичную площадку, обусловленный излучением заряда в момент $t' = t - R(t')/c$ и регистрируемый в точке наблюдения в момент t . Для определения энергии, излученной за конечный период ускорения, скажем от $t' = T_1$ до $t' = T_2$, следует выполнить интегрирование

$$W = \int_{t=T_1+[R(T_1)/c]}^{t=T_2+[R(T_2)/c]} [S \cdot n]_{\text{запазд}} dt = \int_{t'=T_1}^{t'=T_2} (S \cdot n) \frac{dt}{dt'} dt'. \quad (14.36)$$

Таким образом, желательно знать величину $(S \cdot n)(dt/dt')$, имеющую смысл мощности, излучаемой через единичную поверхность за единицу собственного времени заряда. Мощность, излучаемая в единицу телесного угла, определяется соотношением

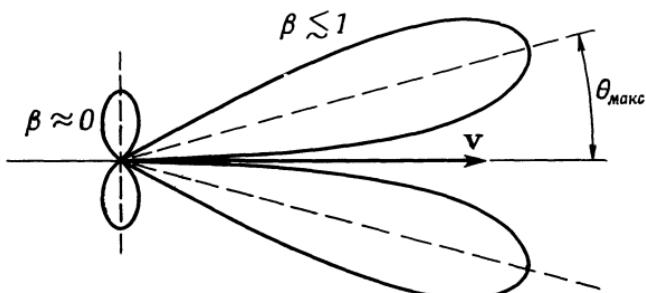
$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2 (S \cdot n) \frac{dt}{dt'} = \kappa R^2 S \cdot n. \quad (14.37)$$

Пусть заряд ускоряется лишь в течение короткого интервала времени, причем за это время β и $\dot{\beta}$ не изменяются существенно по направлению и величине; кроме того, пусть точка наблюдения настолько удалена от заряда, что n и R меняются пренебрежимо мало за время ускорения. При этих условиях величина (14.37)

будет пропорциональной угловому распределению излучаемой энергии. Учитывая выражение (14.35) для вектора Пойнтинга, находим угловое распределение излучения

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}\}|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^5}. \quad (14.38)$$

Проиллюстрируем соотношение (14.38) на простейшем примере прямолинейного движения, для которого β и $\dot{\beta}$ параллельны.



Фиг. 14.4. Распределение излучения заряда, испытывающего ускорение в направлении движения.

Диаграммы излучения для обеих скоростей изображены в различном масштабе: диаграмма для релятивистского движения (соответствующая $\gamma \sim 2$) уменьшена приблизительно в 10^2 раз при том же значении ускорения.

Если ввести угол наблюдения θ , отсываемый от направления β и $\dot{\beta}$, то (14.38) преобразуется к виду

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 v^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (14.39)$$

При $\beta \ll 1$ это соотношение сводится к формуле Лармора (14.21). Однако по мере приближения β к единице диаграмма углового распределения излучения все более и более вытягивается в направлении движения электрона, причем интенсивность излучения возрастает, как схематически показано на фиг. 14.4. Угол, для которого интенсивность излучения максимальна, равен

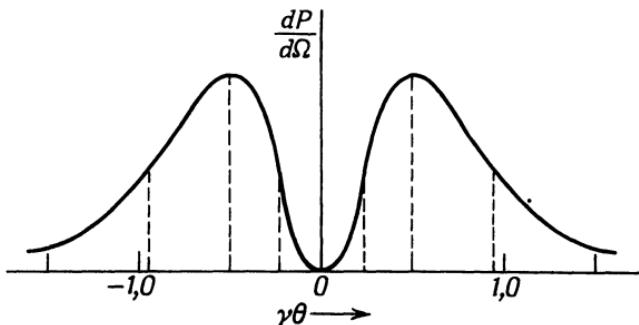
$$\theta_{\max} = \arccos \left[\frac{1}{3\beta} \left(\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right) \right] \rightarrow \frac{1}{2\gamma}, \quad (14.40)$$

где последнее соотношение справедливо в пределе $\beta \rightarrow 1$. В этом предельном случае интенсивность в максимуме пропорциональна γ^8 . Уже при $\beta = 0,5$, что соответствует кинетической энергии электронов порядка 80 кэВ, имеем $\theta_{\max} = 38,2^\circ$. Для релятивистских частиц угол θ_{\max} очень мал: порядка отношения энергии покоя частицы к ее полной энергии. Таким образом, все излучение

сосредоточено в очень узком конусе вокруг направления движения. Для таких малых углов угловое распределение излучения (14.39) можно описать приближенной формулой:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \approx \frac{8}{\pi} \frac{e^2 v^2}{c^3} \gamma^8 \frac{(\gamma\theta)^2}{(1 + \gamma^2\theta^2)^5}. \quad (14.41)$$

Величина γ^{-1} , очевидно, может служить естественной единицей измерения угла. На фиг. 14.5 изображено угловое распределение излучения, причем угол выражен в этих единицах. Максимум распределения расположен при $\gamma\theta = 1/2$, а уровень половинной



Фиг. 14.5. Угловое распределение излучения для релятивистской частицы.

мощности соответствует $\gamma\theta = 0,23$ и $\gamma\theta = 0,91$. Среднеквадратичное значение угла, под которым испускается излучение, в релятивистском предельном случае описывается соотношением

$$\langle \theta^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{\gamma} = \frac{mc^2}{E}. \quad (14.42)$$

Такая картина распределения излучения для релятивистского случая типична независимо от взаимного расположения β и $\dot{\beta}$. Полную мощность излучения можно получить, проведя интегрирование выражения (14.39) по всем углам. Это приводит к соотношению

$$P(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} v^2 \gamma^6 \quad (14.43)$$

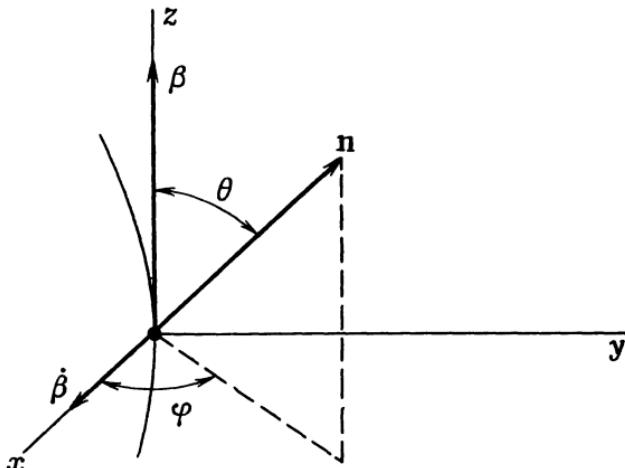
в согласии с (14.26) и (14.27).

В качестве другого примера рассмотрим угловое распределение излучения при мгновенном движении заряда по окружности, когда ускорение $\dot{\beta}$ перпендикулярно скорости заряда β . Выберем систему координат так, чтобы направление мгновенной скорости β совпадало с осью z , а ускорение $\dot{\beta}$ было направлено вдоль x . Определяя направление наблюдения обычными сферическими угловыми коор-

динатами θ, φ , как показано на фиг. 14.6, преобразуем общую формулу (14.38) к виду

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 v^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1-\beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1-\beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (14.44)$$

Заметим, что, хотя детали углового распределения излучения отличаются от распределения при прямолинейном ускоренном



Ф и г. 14.6.

движении, в данном случае тоже имеется характерная релятивистская концентрация излучения в направлении движения. В предельном релятивистском случае ($\gamma \gg 1$) угловое распределение излучения представляется приближенным выражением

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \approx \frac{2}{\pi} \frac{e^2 v^2}{c^3} \gamma^6 \frac{1}{(1+\gamma^2 \theta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \varphi}{(1+\gamma^2 \theta^2)^2} \right]. \quad (14.45)$$

В этом приближении среднеквадратичное значение угла, под которым испускается излучение, определяется той же формулой (14.42), что и при одномерном движении. Полную мощность излучения можно найти или интегрированием (14.44) по всем углам, или из (14.26)

$$P(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2 v^2}{c^3} \gamma^4. \quad (14.46)$$

Интересно сравнить мощность излучения в случае, когда ускорение параллельно скорости [см. (14.43) или (14.27)], с мощностью излучения при ускорении, нормальном скорости [см. (14.46)], при одинаковой величине приложенной силы. При движении по ок-

ружности скорость изменения импульса (равная приложенной силе) равна $\gamma m\dot{v}$. Поэтому (14.46) можно переписать в виде

$$P_{\text{круг}}(t') = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2. \quad (14.47)$$

Сравнивая это выражение с соответствующим выражением (14.27) для прямолинейного движения, находим, что при заданной величине приложенной силы излучение при поперечном ускорении в γ^2 раз превышает излучение для случая продольного ускорения.

§ 4. Излучение заряда при произвольном ультрарелятивистском движении

В каждый момент времени излучение заряженной частицы, совершающей произвольное ультрарелятивистское движение, можно рассматривать как когерентную суперпозицию излучений, обусловленных составляющими ускорения, параллельной и перпендикулярной скорости. Как только что было показано, при одинаковом порядке величины продольной и поперечной сил излучение, обусловленное продольной составляющей, пренебрежимо мало (порядка $1/\gamma^2$) по сравнению с излучением, обусловленным поперечной составляющей. Следовательно, можно пренебречь параллельной составляющей ускорения и приближенно считать, что интенсивность излучения полностью определяется лишь его поперечной составляющей. Другими словами, излучение заряженной частицы при произвольном ультрарелятивистском движении в каждый момент времени приближенно совпадает с излучением заряда, движущегося по дуге окружности с мгновенным радиусом кривизны Q , определяемым формулой

$$Q = \frac{\dot{v}^2}{\dot{v}_\perp} \approx \frac{c^2}{\dot{v}_\perp}, \quad (14.48)$$

где \dot{v}_\perp — поперечная составляющая ускорения. Угловое распределение излучения определяется при этом соотношениями (14.44) или (14.45). Оно представляет собой узкий иглообразный конус, направленный вдоль вектора мгновенной скорости заряда.

Концентрация излучения в узком луче, параллельном направлению скорости, весьма важна при наблюдениях со спектрально чувствительным детектором. Излучение наблюдается лишь в том случае, когда вектор скорости частицы направлен на наблюдателя. При произвольном движении частицы наблюдатель зарегистрирует весьма кратковременный импульс или вспышку излучения (или последовательность таких вспышек, если движение частицы перио-

дическое), как показано на фиг. 14.7. Так как угловая ширина луча есть величина порядка γ^{-1} , то частица будет освещать наблюдателя в течение интервала времени (собственного времени частицы)

$$\Delta t' \sim \frac{q}{c\gamma},$$

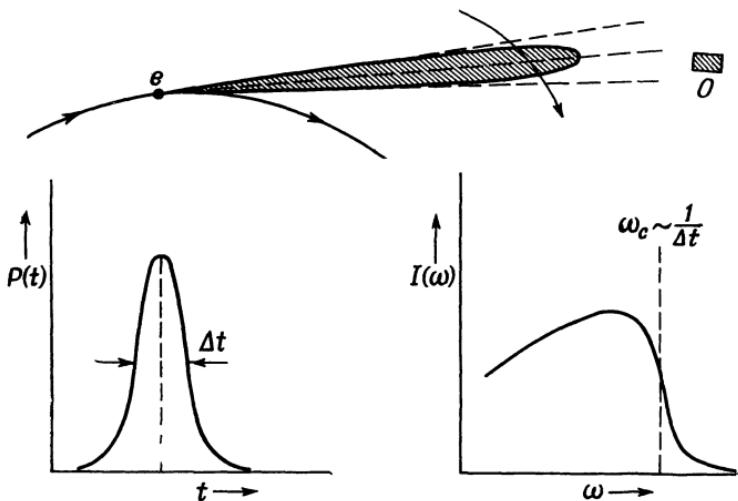
где q — радиус кривизны (14.48). Для наблюдателя это соответствует интервалу

$$\Delta t \sim \left\langle \frac{dt}{dt'} \right\rangle \Delta t',$$

где $\langle dt/dt' \rangle = \langle \kappa \rangle \sim (1/\gamma^2)$. Следовательно, длительность вспышки излучения, регистрируемой детектором, равна

$$\Delta t \sim \frac{1}{\gamma^3} \frac{q}{c}. \quad (14.49)$$

Согласно общим свойствам интеграла Фурье (см. гл. 7, § 3), в импульсе такой длительности заметно представлены спектральные



Ф и г. 14.7. Временные и частотные характеристики излучения движущейся частицы.

Излучение частицы попадает на детектор O в течение времени Δt . Поэтому в спектре излучения представлены частоты до максимальной частоты $\omega_c \sim (\Delta t)^{-1}$.

компоненты вплоть до критической частоты ω_c , которая по порядку величины определяется соотношением

$$\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \left(\frac{c}{q} \right) \gamma^3. \quad (14.50)$$

Для движения частицы по окружности величина c/q равна угловой частоте вращения ω_0 ; при произвольном движении она также играет роль характерной частоты движения. Как следует

из (14.50), при $E \gg mc^2$ релятивистская частица излучает широкий спектр частот вплоть до частоты, в γ^3 раз превышающей основную частоту. В синхротроне на 200 МэВ величина γ_{\max} составляет около 400. Следовательно, ω_c имеет порядок $6 \cdot 10^7 \omega_0$. Так как в этом случае частота обращения $\omega_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ гц}$, то спектр излучаемых частот простирается приблизительно до $2 \cdot 10^{16} \text{ гц}$, что соответствует длине волны 1000 Å. Следовательно, хотя основная частота лежит в области 100 Мгц, спектр излучаемых частот заходит в видимую область. В § 6 будет подробно рассмотрен характер углового распределения излучения для различных спектральных компонент и найдена зависимость полной энергии излучения от частоты.

§ 5. Спектральное и угловое распределения энергии, излучаемой ускоренными зарядами

В § 4 с помощью качественной оценки было показано, что энергия, излучаемая зарядом, движущимся с релятивистской скоростью, распределена по широкому диапазону частот. Ширина частотного спектра была оценена на основании свойств интегралов Фурье. Для точного количественного расчета воспользуемся теоремой Парсеваля из теории интегралов Фурье.

Соотношение для мощности излучения в единицу телесного угла имеет общий вид

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2, \quad (14.51)$$

где

$$\mathbf{A}(t) = \left(\frac{c}{4\pi} \right)^{1/2} [R\mathbf{E}]_{\text{запад}}, \quad (14.52)$$

а \mathbf{E} — напряженность электрического поля (14.14). В (14.51) в отличие от § 3 мгновенная мощность рассматривается в зависимости от времени в лабораторной системе отсчета, так как желательно знать частотный спектр с точки зрения наблюдателя. Для определенности будем считать, что ускорение отлично от нуля в течение некоторого конечного интервала времени или по крайней мере убывает для отдаленных прошлых и будущих моментов, так что полная излученная энергия конечна. Предположим также, что точка наблюдения настолько удалена от заряда, что область, проходимая зарядом, в течение интервала, когда он ускоряется, видна из нее под малым телесным углом.

Полная энергия, излученная в единицу телесного угла, определяется интегрированием (14.51) по времени

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(t)|^2 dt. \quad (14.53)$$

С помощью преобразования Фурье можно выразить этот результат в виде интеграла по частотам. Введем фурье-амплитуду $\mathbf{A}(\omega)$ функции $\mathbf{A}(t)$

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t) e^{i\omega t} dt \quad (14.54)$$

и обратное преобразование

$$\mathbf{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (14.55)$$

Тогда формулу (14.53) можно переписать в виде

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathbf{A}^*(\omega') \cdot \mathbf{A}(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t}. \quad (14.56)$$

Изменим порядок интегрирования по времени и по частоте. Легко убедиться, что интеграл по времени является фурье-представлением δ -функции $\delta(\omega' - \omega)$. Поэтому выражение для энергии, излучаемой в единицу телесного угла, может быть преобразовано к виду

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega. \quad (14.57)$$

Равенство выражений (14.57) и (14.53), справедливое при выполнении некоторых общих математических ограничений, накладываемых на функцию $\mathbf{A}(t)$, представляет собой частный случай теоремы Парсеваля. Так как знак частоты не имеет физического смысла, обычно проводят интегрирование лишь по положительным частотам. При этом соотношение

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\omega \quad (14.58)$$

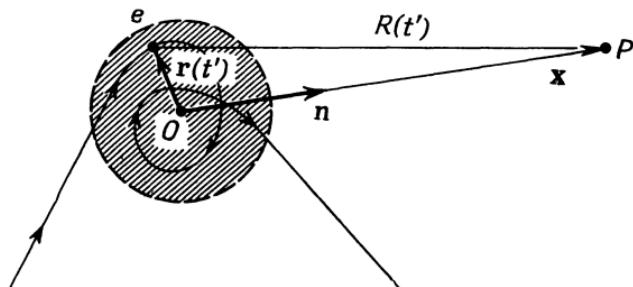
определяет величину $dI(\omega)/d\Omega$, равную энергии, излучаемой в единицу телесного угла в единичном интервале частот:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(\omega)|^2 + |\mathbf{A}(-\omega)|^2. \quad (14.59)$$

Если величина $\mathbf{A}(t)$ действительная, то, согласно (14.55), $\mathbf{A}(-\omega) = \mathbf{A}^*(\omega)$, так что

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = 2|\mathbf{A}(\omega)|^2. \quad (14.60)$$

Полученное соотношение устанавливает количественную связь между изменением излучаемой энергии во времени и ее частотным спектром.



Фиг. 14.8.

Воспользовавшись формулой (14.14) для электрического поля ускоренного заряда, можно получить общее выражение для энергии, излученной в единицу телесного угла в единичном интервале частот, в виде интеграла вдоль траектории частицы. Для этого нужно найти фурье-амплитуду (14.54) функции $\mathbf{A}(t)$, определяемой выражением (14.52). Согласно (14.14),

$$\mathbf{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \dot{\beta}) \times \dot{\beta}]}{\kappa^3} \right]_{\text{запад}} dt, \quad (14.61)$$

где индекс у скобок означает, что величина вычисляется для момента $t = t' + R(t')/c$. Заменяя переменную t на t' , получаем

$$\mathbf{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t' + [R(t')/c])} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \dot{\beta}) \times \dot{\beta}]}{\kappa^2} dt'. \quad (14.62)$$

Поскольку предполагается, что точка наблюдения достаточно удалена от области пространства, в которой ускоренно движется частица, единичный вектор \mathbf{n} можно считать постоянным во времени. Кроме того, $R(t')$ можно приближенно представить в виде

$$R(t') \approx x - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t'), \quad (14.63)$$

где x — расстояние точки наблюдения P от начала отсчета O , а $\mathbf{r}(t')$ определяет положение частицы относительно O , как показано на фиг. 14.8. При этом выражение (14.62) с точностью до общего фазового множителя принимает вид

$$\mathbf{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t - [\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c])} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \dot{\beta}) \times \dot{\beta}]}{\kappa^2} dt. \quad (14.64)$$

Здесь для сокращения записи опущены штрихи у переменной интегрирования. Соответствующее выражение для энергии (14.60), излучаемой в единичном интервале частот в единицу телесного угла, имеет вид

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \dot{\beta}) \times \dot{\beta}]}{(1 - \beta \cdot \mathbf{n})^2} e^{i\omega(t - [\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c])} dt \right|^2. \quad (14.65)$$

При заданном законе движения известна зависимость $\mathbf{r}(t)$ и могут быть найдены $\beta(t)$ и $\dot{\beta}(t)$, а следовательно, интеграл может быть вычислен как функция от ω и направления \mathbf{n} . При рассмотрении ускоренного движения группы заряженных частиц выражение (14.65) для амплитуды поля одного заряда следует заменить когерентной суммой амплитуд $A_j(\omega)$ каждого из зарядов группы (см. задачи 14.11, 15.2 и 15.3).

Выражение (14.65) обладает тем преимуществом, что интегрирование в нем совершается лишь по интервалу времени, на котором ускорение отлично от нуля, однако в ряде случаев можно получить более простое выражение для спектральной интенсивности излучения, выполняя в (14.64) интегрирование по частям. Как легко показать, векторная часть, т. е. множитель при экспоненте в подынтегральном выражении в (14.64), представляет собой полный дифференциал

$$\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \dot{\beta}) \times \dot{\beta}]}{\omega^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta)}{\omega} \right]. \quad (14.66)$$

Поэтому интегрирование по частям приводит к следующему выражению для спектральной интенсивности:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta) e^{i\omega(t - [\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)/c])} dt \right|^2. \quad (14.67)$$

Следует заметить, что в (14.67) и (14.65) поляризация излучения определяется направлением векторного интеграла. Для определения интенсивности излучения с некоторой заданной поляризацией следует, прежде чем вычислять квадрат модуля, найти скалярное произведение интеграла на соответствующий единичный вектор поляризации.

Если ускоренное движение совершается группой зарядов e_j , в подынтегральном выражении в (14.67) следует произвести замену

$$e\beta e^{-i(\omega/c)\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)} \rightarrow \sum_{j=1}^N e_j \beta_j e^{-i(\omega/c)\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_j(t)}. \quad (14.68)$$

В предельном случае непрерывного распределения движущихся зарядов сумма по j переходит в интеграл по распределению токов $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$:

$$e\beta e^{-i(\omega/c)\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)} \rightarrow \frac{1}{c} \int d^3x \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) e^{-i(\omega/c)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}. \quad (14.69)$$

При этом распределение интенсивности излучения определяется выражением

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int dt \int d^3x \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)] e^{i\omega[t-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})/c]} \right|^2. \quad (14.70)$$

Последнее соотношение может быть получено непосредственно решением неоднородного волнового уравнения для векторного потенциала (14.1).

Представляет интерес излучение движущегося магнитного момента. Найти его легче всего, воспользовавшись установленной в гл. 5 эквивалентностью ротора вектора намагниченности $\mathcal{M}(\mathbf{x}, t)$ и тока

$$\mathbf{J}_M = c \operatorname{rot} \mathcal{M}. \quad (14.71)$$

Подставляя последнее соотношение в (14.70), получаем

$$\frac{dI_M(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi^2 c^3} \left| \int dt \int d^3x \mathbf{n} \times \mathcal{M}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega[t-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})/c]} \right|^2. \quad (14.72)$$

Если система представляет собой точечный магнитный момент $\boldsymbol{\mu}(t)$, находящийся в точке $\mathbf{r}(t)$, то

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\mu}(t) \delta[\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)] \quad (14.73)$$

и энергия, излученная в единичном интервале частот в единицу телесного угла, равна

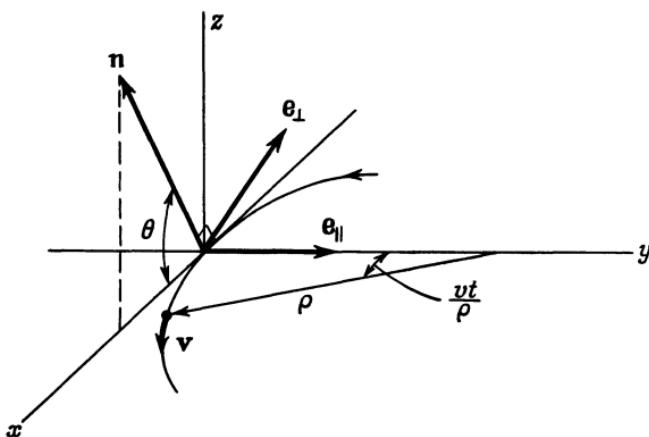
$$\frac{dI_\mu(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi^2 c^3} \left| \int dt \mathbf{n} \times \boldsymbol{\mu}(t) e^{i\omega[t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c]} \right|^2. \quad (14.74)$$

Отвлекаясь от частотной зависимости самих интегралов, заметим, что характерным отличием интенсивности излучения магнитного диполя от интенсивности излучения ускоренного заряда является дополнительный множитель ω^2 .

Выведенные в данном параграфе общие формулы, и в особенности (14.65) и (14.67), будут использованы далее в этой и в последующих главах при исследовании различных проблем, связанных с излучением. Выражение (14.74) для излучения магнитного момента будет применено в гл. 15 при расчете излучения, испускаемого при захвате орбитальных электронов ядром.

§ 6. Спектр излучения релятивистской заряженной частицы при мгновенном движении по окружности

Как было показано в § 4, ультраквантитативистская частица при произвольном ускоренном движении излучает так же, как заряд, движущийся с постоянной скоростью по окружности с радиусом, равным мгновенному радиусу кривизны. Излучение сконцентрировано в узком конусе, ось которого направлена вдоль вектора



Ф и г. 14.9.

скорости и регистрируется наблюдателем как короткий импульс излучения, возникающий при прохождении иглообразного луча через точку наблюдения.

Для определения частотного и углового распределения энергии необходимо вычислить интеграл в (14.67). Так как длительность импульса излучения $\Delta t' \sim q/c\gamma$ очень мала, необходимо знать скорость β и положение $r(t)$ частицы лишь на малой дуге траектории, на которой касательная направлена приблизительно в точку наблюдения. На фиг. 14.9 изображена принятая система отсчета. Отрезок траектории и мгновенный радиус кривизны q лежат в плоскости xy . Так как интеграл берется вдоль траектории, можно без потери общности рассмотрения считать, что единичный вектор n расположен в плоскости xz и образует угол θ с осью x . Интенсивность излучения имеет заметную величину лишь для очень малых θ . Начало отсчета времени выбрано так, чтобы при $t = 0$ частица находилась в начале координат.

Векторный множитель подынтегрального выражения в (14.67) можно записать в виде

$$n \times (n \times \beta) = \beta \left[-e_{||} \sin \left(\frac{vt}{q} \right) + e_{\perp} \cos \left(\frac{vt}{q} \right) \sin \theta \right], \quad (14.75)$$

где $\mathbf{e}_{\parallel} = \mathbf{e}_2$ — единичный вектор в направлении оси y , соответствующий поляризации в плоскости орбиты, $\mathbf{e}_{\perp} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_2$ — вектор нормальной поляризации, приблизительно соответствующий поляризации, нормальной плоскости орбиты (для малых θ). Показатель экспоненты в подынтегральном выражении равен

$$\omega \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] = \omega \left[t - \frac{q}{c} \sin \left(\frac{vt}{q} \right) \cos \theta \right]. \quad (14.76)$$

Так как мы ограничиваемся лишь малыми углами θ и коротким интервалом времени вблизи $t = 0$, можно разложить тригонометрические функции в (14.76) по малым аргументам. В результате получим

$$\omega \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] \approx \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2}{3q^2} t^3 \right]; \quad (14.77)$$

величина β , где это возможно, заменена единицей. Используя оценочные соотношения $t \sim q/c\gamma$ и $\theta \sim \langle \theta^2 \rangle^{1/2}$ [см. (14.42)], легко показать, что отношение опущенных в (14.77) членов к оставленным имеет порядок γ^{-2} .

Используя в (14.75) те же приближения, как и при выводе соотношения (14.77), преобразуем выражение (14.67) для распределения энергии излучения к виду

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} |-\mathbf{e}_{\parallel} A_{\parallel}(\omega) + \mathbf{e}_{\perp} A_{\perp}(\omega)|^2, \quad (14.78)$$

где амплитуды определяются соотношениями¹⁾

$$A_{\parallel}(\omega) \approx \frac{c}{q} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3q^2} \right] \right\} dt, \quad (14.79)$$

$$A_{\perp}(\omega) \approx \theta \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3q^2} \right] \right\} dt.$$

¹⁾ Может показаться, что значения пределов интегрирования в (14.79) $t = \pm\infty$ противоречат допущениям, принятым при переходе от (14.76) к (14.77). Однако для большинства частот фаза экспоненты такова, что подынтегральное выражение в (14.79) является очень быстро осциллирующей функцией; поэтому подынтегральное выражение практически будет отлично от нуля лишь в пределах такого интервала времени, который гораздо меньше, чем необходимо для справедливости допущений, сделанных при переходе к соотношению (14.77). Следовательно, верхний и нижний пределы интегрирования можно принять равными бесконечности, не совершая при этом существенной ошибки. Принятое приближение перестает выполняться лишь при частотах порядка $\omega \sim (c/q) \sim \omega_0$. Но, как было показано в § 4, для релятивистских частиц практически весь спектр излучения соответствует гораздо более высоким частотам.

Произведя замену переменной $x = (ct/\varrho) [(1/\gamma^2) + \theta^2]^{-1/2}$ и вводя параметр

$$\xi = \frac{\omega\varrho}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{3/2}, \quad (14.80)$$

можно преобразовать интегральные представления для $A_{\parallel}(\omega)$ и $A_{\perp}(\omega)$ к виду

$$A_{\parallel}(\omega) = \frac{\varrho}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left[i \frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx, \quad (14.81)$$

$$A_{\perp}(\omega) = \frac{\varrho}{c} \theta \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx.$$

Интегралы (14.81) выражаются через функции Эйри, или модифицированные функции Бесселя,

$$\int_0^{\infty} x \sin \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} K_{2/3}(\xi), \quad (14.82)$$

$$\int_0^{\infty} \cos \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} K_{1/3}(\xi).$$

В результате энергия, излученная в единицу телесного угла в единичном интервале частот, оказывается равной

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega\varrho}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 \left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{(1/\gamma^2) + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right]. \quad (14.83)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках соответствует излучению, поляризованному в плоскости орбиты, второе — излучению, поляризованному перпендикулярно этой плоскости.

Проанализируем теперь этот довольно сложный результат. Прежде всего проинтегрируем выражение по всем частотам и найдем угловое распределение энергии

$$\int_0^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\omega = \frac{7}{16} \frac{e^2}{\varrho} \frac{1}{[(1/\gamma^2) + \theta^2]^{5/2}} \left[1 + \frac{5}{7} \frac{\theta^2}{(1/\gamma^2) + \theta^2} \right]. \quad (14.84)$$

Это выражение описывает все характерные свойства излучения, рассмотренные в § 3. Соотношение (14.84) может быть, конечно, получено непосредственным интегрированием по времени несколько видоизмененного выражения (14.44) для мощности излучения

при движении по окружности. Так же как и в (14.83), первое слагаемое в (14.84) соответствует поляризации, параллельной орбитальной плоскости, а второе — перпендикулярной поляризации. Проинтегрировав по всем углам, мы найдем, что энергия излучения с поляризацией, параллельной орбитальной плоскости, в 7 раз превосходит энергию излучения с перпендикулярной поляризацией. Таким образом, излучение релятивистски движущегося заряда в основном, хотя и не полностью, поляризовано в плоскости движения. Для нерелятивистского движения, как очевидно из (14.65), излучение полностью поляризовано в плоскости движения.

Как следует из свойств модифицированных функций Бесселя [см. (3.103) и (3.104)], интенсивность излучения пренебрежимо мала при $\xi \gg 1$. Согласно (14.80), это соответствует случаю больших углов; чем выше частота, тем меньше критический угол, вне пределов которого интенсивность излучения пренебрежимо мала. Таким образом, излучение сосредоточено в основном вблизи плоскости движения, как видно из (14.84), причем область заметного излучения тем меньше, чем выше отношение частоты к величине c/q . Однако если частота ω становится очень большой, то параметр ξ будет, очевидно, большим для *всех* углов. Следовательно, на таких частотах полная излученная энергия пренебрежимо мала. Критическая частота ω_c , при превышении которой излучение в любом направлении становится пренебрежимо малым, может быть определена из условия $\xi = 1$ для $\theta = 0$. Это приводит к соотношению

$$\omega_c = 3\gamma^3 \left(\frac{c}{q} \right) = 3 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3 \frac{c}{q}. \quad (14.85)$$

Это значение критической частоты, как легко видеть, согласуется с результатом качественной оценки (14.50) (см. § 4). При движении заряда по окружности величина c/q равна основной частоте вращения ω_0 . В этом случае можно определить критическую гармонику $\omega_c = n_c \omega_0$, номер которой равен

$$n_c = 3 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3. \quad (14.86)$$

Так как при $\gamma \gg 1$ излучение сконцентрировано в основном в орбитальной плоскости, представляет интерес вычислить интенсивность излучения (14.83) при $\theta = 0$. Для частот, гораздо меньших критической частоты ($\omega \ll \omega_c$), получим

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} \Big|_{\theta=0} \approx \frac{e^2}{c} \left[\frac{\Gamma(2/3)}{\pi} \right]^2 \left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{\omega q}{c} \right)^{2/3}. \quad (14.87)$$

В противоположном предельном случае $\omega \gg \omega_c$ имеем

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} \Big|_{\theta=0} \approx \frac{3}{2\pi} \frac{e^2}{c} \gamma^2 \frac{\omega}{\omega_c} e^{-2\omega/\omega_c}. \quad (14.88)$$

Из этих предельных выражений видно, что интенсивность излучения при $\theta = 0$ возрастает приблизительно как $\omega^{2/3}$ при частотах ниже критической, достигает максимума в окрестности ω_c и экспоненциально спадает до нуля на более высоких частотах.

Угловые размеры области, в которой сосредоточено излучение на данной фиксированной частоте, можно оценить, вычислив угол θ_c , для которого $\xi(\theta_c) \approx \xi(0) + 1$. Для низкочастотной области ($\omega \ll \omega_c$) величина $\xi(0)$ очень мала и, таким образом, $\xi(\theta_c) \approx 1$. Это условие дает

$$\theta_c \approx \left(\frac{3c}{\omega_0} \right)^{1/3} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^{1/3}. \quad (14.89)$$

Мы видим, что ширина угловой области излучения для низкочастотных составляющих гораздо больше среднеквадратичного значения $\langle \theta^2 \rangle^{1/2} \sim \gamma^{-1}$. В высокочастотном предельном случае ($\omega > \omega_c$) величина $\xi(0)$ гораздо больше единицы. При этом интенсивность убывает с увеличением угла приблизительно по закону

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} \approx \frac{dI(\omega)}{d\Omega} \Big|_{\theta=0} e^{-3\omega\gamma^2\theta^2/\omega_c}. \quad (14.90)$$

Критический угол, определяемый спаданием интенсивности в e раз, оказывается равным

$$\theta_c \approx \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{3\omega} \right)^{1/2}. \quad (14.91)$$

Очевидно, что высокочастотные составляющие заключены в угловой области, размеры которой гораздо меньше средних. На фиг. 14.10 изображен качественный ход кривых углового распределения интенсивности для различных диапазонов частот.

Спектральное распределение полной энергии, излученной при пролете частицы, можно определить, проинтегрировав выражение (14.83) по углам:

$$I(\omega) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} \cos \theta d\theta \approx 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\theta \quad (14.92)$$

(напомним, что через θ обозначен угол, дополнительный к широте).

Для низкочастотной области можно получить оценку интеграла, воспользовавшись угловым распределением (14.87) при $\theta = 0$ и значением (14.89) критического угла θ_c . При этом

$$I(\omega) \sim 2\pi\theta_c \frac{dI(\omega)}{d\Omega} \Big|_{\theta=0} \sim \frac{e^2}{c} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^{1/3}. \quad (14.93)$$

Отсюда видно, что интенсивность излучения при $\omega \ll \omega_c$ возрастает как $\omega^{1/3}$. Такая зависимость приводит к очень монотонной,

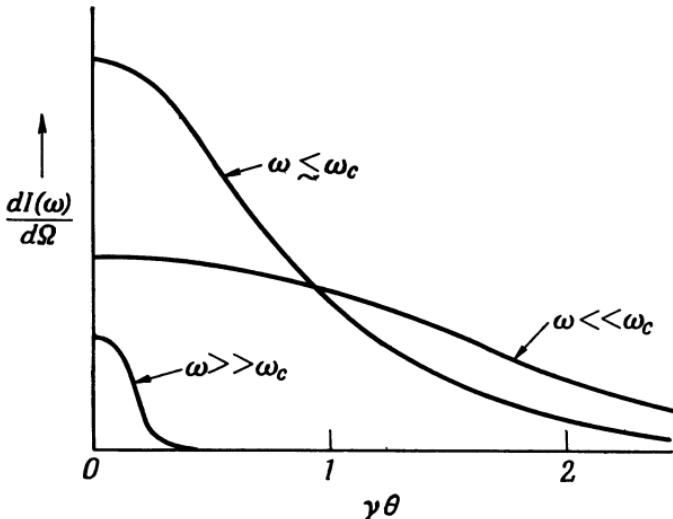
плоской форме спектра на частотах ниже ω_c . В другом предельном случае высоких частот, когда $\omega \gg \omega_c$, можно проинтегрировать (14.90) по углам и получить довольно точный результат

$$I(\omega) \approx \sqrt{3\pi} \frac{e^2}{c} \gamma \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/2} e^{-2\omega/\omega_c}. \quad (14.94)$$

Выполняя соответствующее интегрирование по углам общего выражения (14.83) для распределения излучения, находим

$$I(\omega) \approx 2\sqrt{3} \frac{e^2}{c} \gamma \frac{\omega}{\omega_c} \int_{2\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx. \quad (14.95)$$

В пределе $\omega \ll \omega_c$ это выражение переходит в (14.93) с численным коэффициентом 3,25; для $\omega \gg \omega_c$ оно совпадает с (14.94).



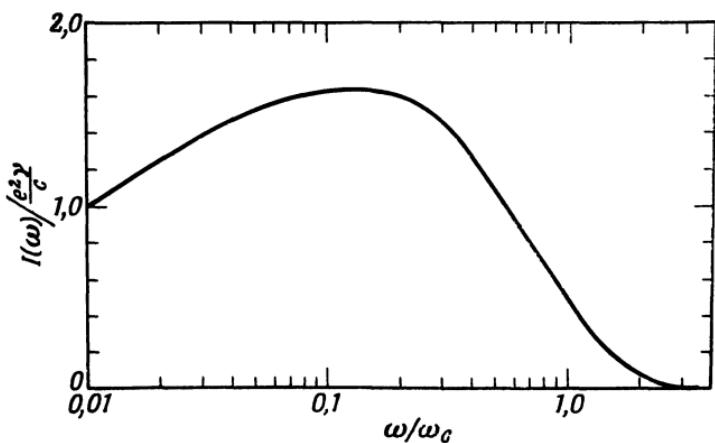
Фиг. 14.10. Угловое распределение интенсивности излучения при разных частотах.

При частотах, сравнимых с критической частотой ω_c , излучение сосредоточено в угловой области порядка γ^{-1} . Для много меньших частот размеры угловой области больше, а для больших частот, наоборот, меньше.

Зависимость $I(\omega)$ от частоты показана на фиг. 14.11. Максимальная интенсивность по порядку величины равна $e^2\gamma/c$, а полная излученная энергия имеет порядок $e^2\gamma\omega_c/c = 3e^2\gamma^4/\varrho$. Последняя величина согласуется со значением $4\pi e^2\gamma^4/3\varrho$ для радиационных потерь за оборот в циклических ускорителях [см. (14.32)].

Излучение, описываемое соотношениями (14.83) и (14.95), называют *синхротронным излучением*, так как впервые оно наблюдалось в электронных синхротронах (1948 г.). Соответствующие теоретические расчеты для движения по окружности, однако, гораздо

раньше выполнил Шотт (1912 г.). При периодическом движении по окружности спектр излучения в действительности дискретен и состоит из набора частот, кратных основной частоте $\omega_0 = c/q$. Так как заряженная частица периодически повторяет свое движение с частотой $c/2\pi q$ оборотов в секунду, более удобно говорить об угловом распределении мощности излучения на n -й гармонике,



Фиг. 14.11. Зависимость интенсивности синхротронного излучения от частоты.

Интенсивность отнесена к $\gamma e^2/c$, а частота — к ω_c [см. (14.85)].

а не об энергии излучения в единичном интервале частот при пролете частицы. Чтобы получить выражение для потери мощности на гармонике, следует лишь умножить величину $I(\omega)$, определяемую соотношением (14.95), или $dI(\omega)/d\Omega$, определяемую соотношением (14.83), на частоту вращения $c/2\pi q$ для перехода от энергии излучения к мощности или на $\omega_0 = c/q$ для перехода от интенсивности, отнесенной к единичному интервалу частот, к интенсивности, отнесенной к одной гармонике. В результате получим

$$\frac{dP_n}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c}{q} \right)^2 \frac{dI(\omega)}{d\Omega} \Big|_{\omega=n\omega_0},$$

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c}{q} \right)^2 I(\omega = n\omega_0). \quad (14.96)$$

Найденные теоретические соотношения были подробно сопоставлены с экспериментальными данными ¹⁾. Для этого было необходимо усреднить спектры излучения по периоду цикла ускорения, так как энергия электронов непрерывно возрастает (см. задачу 14.13). При максимальной энергии 80 МэВ спектр излучения занимает

¹⁾ См., например, [40] и в особенности [111].

область от основной частоты $\omega_0 \approx 10^9$ гц до $\omega_c \approx 10^{16}$ гц, ($\lambda \sim 1700$ Å). Излучение перекрывает видимую область и имеет голубовато-белый цвет. Результаты тщательных измерений полностью согласуются с теорией.

Синхротронное излучение наблюдалось также при исследовании солнечных пятен и Крабовидной туманности; кроме того, им, по-видимому, объясняется излучение Юпитера на частоте $\sim 10^3$ Мгц. Спектр излучения Крабовидной туманности простирается от области радиочастот до далекой ультрафиолетовой области, при этом излучение очень сильно поляризовано. Детальное исследование показывает, что электроны с энергией до 10^{12} эв возбуждают такое синхротронное излучение при своем движении по круговой или спиральной орбите в магнитном поле порядка 10^{-4} гаусс (см. задачу 14.15). Источником радиоизлучения Юпитера являются, по-видимому, электроны, захваченные поясами Van Аллена, расположенные на расстоянии порядка нескольких радиусов от поверхности Юпитера. В настоящее время еще не ясно, является ли это излучение синхротронным излучением, испускаемым релятивистскими электронами, или это так называемое циклотронное излучение нерелятивистских электронов, движущихся по спиральным траекториям в магнитном поле планеты. Во всяком случае, наблюдаемое излучение сильно поляризовано параллельно экваториальной плоскости Юпитера, как и следует ожидать для частиц, захваченных полем диполя и движущихся по спиральным траекториям вдоль силовых линий.

§ 7. Рассеяние на свободных зарядах. Формула Томсона

Если плоская монохроматическая электромагнитная волна падает на свободную частицу с зарядом e и массой m , то частица испытывает ускорение и, следовательно, излучает. Направление излучения не совпадает с направлением падающей волны, частота же его при нерелятивистском движении совпадает с частотой падающего поля. В целом этот эффект можно рассматривать как рассеяние падающего излучения.

Мгновенное значение мощности излучения для частицы с зарядом e при нерелятивистском движении определяется формулой Лармора (14.21):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \Theta, \quad (14.97)$$

где Θ — угол между направлением наблюдения и ускорением. Ускорение обусловлено действием падающей плоской электромагнитной волны. Обозначая волновой вектор через \mathbf{k} , а вектор поля-

ризации — через \mathbf{e} , запишем электрическое поле волны в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e} E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}. \quad (14.98)$$

Согласно нерелятивистскому уравнению движения, ускорение равно

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{e} \frac{e}{m} E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}. \quad (14.99)$$

Если предположить, что смещение заряда за период колебания много меньше длины волны, то средний по времени квадрат ускорения $\dot{\mathbf{v}}^2$ будет равен $1/2 \text{Re}(\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}^*)$. При этом средняя мощность, излучаемая в единицу телесного угла, равна

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta. \quad (14.100)$$

Так как описываемое явление проще всего рассматривать как рассеяние, удобно ввести эффективное дифференциальное сечение рассеяния, определив его следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Энергия, излучаемая в единицу телесного угла за единицу времени}}{\text{Поток энергии падающей волны через единичную площадку за единицу времени}}. \quad (14.101)$$

Поток энергии падающей волны определяется средним по времени значением вектора Пойнтинга для плоской волны, т. е. равен $c|E_0|^2/8\pi$. Таким образом, согласно (14.100), для дифференциального эффективного сечения рассеяния получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta. \quad (14.102)$$

Если падающая волна распространяется в направлении оси z , а вектор поляризации составляет угол ψ с осью x , как показано на фиг. 14.12, то угловое распределение определяется множителем

$$\sin^2 \Theta = 1 - \sin^2 \theta \cos^2(\varphi - \psi). \quad (14.103)$$

Для неполяризованного падающего излучения дифференциальное сечение рассеяния получается усреднением по углу ψ , что приводит к соотношению

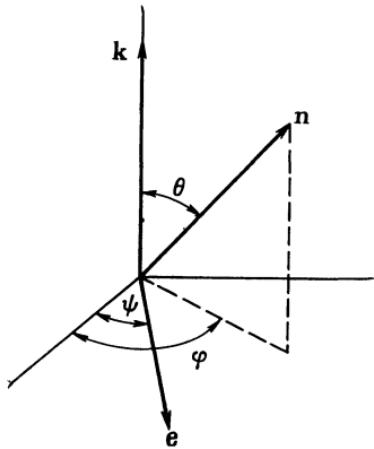
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (14.104)$$

Это — так называемая *формула Томсона* для рассеяния падающего излучения на свободном заряде. Она описывает рассеяние рентгеновских лучей на электронах или γ -лучей на протонах. Угловое

распределение излучения изображено на фиг. 14.13 (сплошная кривая). Для полного эффективного сечения рассеяния, так называемого *томсоновского сечения рассеяния*, получаем

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (14.105)$$

Для электронов $\sigma_T = 0,665 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$. Величина $e^2/mc^2 = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, имеющая размерность длины, называется обычно *классическим радиусом электрона*, так как однородное распределение заряда, равного заряду электрона, должно иметь радиус такого порядка, чтобы собственная электростатическая энергия была равна массе покоя электрона (см. гл. 17).



Ф и г. 14.12.

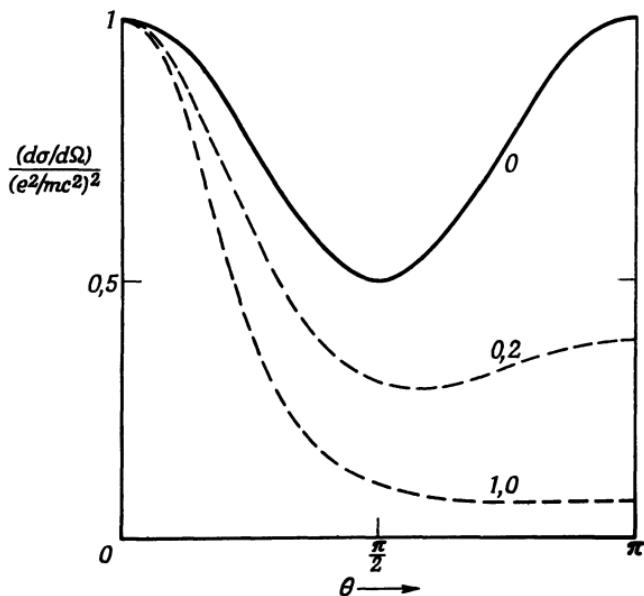
Классический результат Томсона справедлив лишь на низких частотах. Если частота ω становится сравнимой с величиной mc^2/\hbar , т. е. если энергия фотона $\hbar\omega$ сравнима или превышает энергию покоя, то начинают существенно сказываться квантовомеханические эффекты. Возможна и другая интерпретация указанного критерия: можно ожидать появления квантовых эффектов, когда длина волны излучения становится сравнимой или меньше комптоновской длины волны частицы \hbar/mc . На высоких частотах угловое распределение излучения более сконцентрировано в направлении падающей волны, как показано пунктирными кривыми на фиг. 14.13; при этом, однако, сечение излучения для нулевого угла всегда совпадает с определенным по формуле Томсона.

Полное сечение рассеяния оказывается меньше томсоновского сечения рассеяния (14.105). Это так называемое *комптоновское рассеяние*. Для электронов оно описывается формулой Клейна — Нишины. Здесь мы приведем для справок асимптотические выра-

жения полного сечения рассеяния, определяемого по формуле Клейна — Нишины:

$$\sigma_{KN} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \begin{cases} \frac{8\pi}{3} \left(1 - \frac{2\hbar\omega}{mc^2} + \dots \right), & \hbar\omega \ll mc^2, \\ \pi \frac{mc^2}{\hbar\omega} \left[\ln \left(\frac{2\hbar\omega}{mc^2} \right) + \frac{1}{2} \right], & \hbar\omega \gg mc^2. \end{cases} \quad (14.106)$$

Для протонов отклонения от формулы Томсона возникают при энергиях фотонов, превышающих приблизительно 100 Мэв. Эта



Ф и г. 14.13. Дифференциальное сечение рассеяния неполяризованного излучения на свободных электронах.

Сплошная кривая — классический результат Томсона. Пунктирные кривые соответствуют результатам расчета по квантовомеханической формуле Клейна — Нишины. Цифры у кривых указывают значения $\hbar\omega/mc^2$.

величина гораздо меньше критического значения $\hbar\omega \sim Mc^2 \sim 1 \text{ Гэв}$, которое можно было бы ожидать, исходя из аналогии с комптон-эффектом для электронов. Это обусловлено тем, что в отличие от электрона протон нельзя рассматривать как точечную частицу, характеризуемую лишь электромагнитным взаимодействием; протон — более сложное образование с размазанным распределением заряда с радиусом порядка $0,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, обусловленным сильными взаимодействиями с π-мезонами. Отличие от томсоновского рассеяния (быстрое убывание сечения рассеяния) проявляется при энергиях фотонов порядка энергии покоя π-мезона (140 Мэв).

§ 8. Когерентное и некогерентное рассеяние

При рассеянии рентгеновских лучей на атомах угловое распределение (14.104) наблюдается в широком интервале углов, по крайней мере для легких элементов. Однако в направлении падающего излучения рассеяние оказывается много больше величины, определяемой томсоновским сечением рассеяния. Объясняется это когерентным сложением амплитуд излучения для всех электронов. Как следует из соотношения (14.18), поле излучения, испускаемого системой свободных заряженных частиц, определяется формулой

$$\mathbf{E}_a = \frac{1}{c} \sum_j e_j \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{p}}_j)}{R_j} \right]_{\text{запазд.}} \quad (14.107)$$

Воспользовавшись выражением (14.99) для ускорения, получим

$$E_a = \frac{E_0}{c^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{e}) \sum_j \frac{e_j^2}{m_j} \frac{\exp \{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j - i\omega [t - (R_j/c)]\}}{R_j}. \quad (14.108)$$

При расчете излучения можно аппроксимировать величину R_j , в показателе экспоненты выражением (14.63). Поступая далее совершенно так же, как при переходе от (14.97) к (14.102), можно найти сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 \sin^2 \Theta, \quad (14.109)$$

где вектор

$$\mathbf{q} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} - \mathbf{k} \quad (14.110)$$

равен изменению волнового вектора при рассеянии.

Формула (14.109) относится к свободным заряженным частицам, мгновенное положение которых описывается вектором \mathbf{x}_j . Электроны в атомах не являются свободными. Однако если частота падающего излучения велика по сравнению с характерными частотами связи, то при ускорении импульсом конечной длительности электроны можно рассматривать как свободные частицы. Поэтому при расчете рассеяния высокочастотного (по сравнению с частотами связи) излучения на системе связанных заряженных частиц можно пользоваться выражением (14.109). Для сравнения результатов с экспериментом остается лишь усреднить (14.109) по положениям всех частиц системы. В результате для наблюдаемой величины

сечения рассеяния получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left\langle \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 \right\rangle \sin^2 \Theta, \quad (14.111)$$

где символ $\langle \rangle$ означает усреднение по всем возможным значениям \mathbf{x}_j .

Поведение сечения (14.111) очень сильно меняется в зависимости от величины $|\mathbf{q}|$. Координаты \mathbf{x}_j имеют абсолютные значения порядка линейных размеров системы, которые мы обозначим через a . Поведение сечения сильно отличается в двух областях, для которых соответственно $qa \ll 1$ и $qa \gg 1$. Если θ — угол рассеяния, то величина q равна $2k \sin(\theta/2)$. Поэтому граница между указанными двумя областями соответствует углу θ , при котором

$$2ka \sin \frac{\theta}{2} \sim 1. \quad (14.112)$$

Если частота достаточно низка, так что $ka \ll 1$, то предельный случай $qa \ll 1$ справедлив для всех углов. Если же частота такова, что $ka \gg 1$, то в области углов вблизи направления падающего излучения справедливо приближение $qa \ll 1$, а в области больших углов применимо противоположное приближение $qa \gg 1$. Размеры области, где справедливо приближение $qa \ll 1$, по порядку величины определяются соотношением

$$\theta_c \sim \frac{1}{ka}. \quad (14.113)$$

При $qa \ll 1$ показатели экспонент в (14.111) столь малы, что экспоненты можно приближенно положить равными единице. В этом случае дифференциальное сечение рассеяния принимает вид

$$\lim_{qa \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} \right|^2 \sin^2 \Theta = Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta \quad (14.114)$$

(последнее выражение относится к электронам в атоме с атомным номером Z). В полученном выражении ясно виден эффект когерентности рассеяния всеми частицами, интенсивность которого отличается от интенсивности рассеяния на одной частице множителем, равным *квадрату* числа частиц.

В противоположном предельном случае $qa \gg 1$ показатели экспонент велики и значительно отличаются по величине. Следовательно, среднее значение перекрестных членов в квадрате суммы равно нулю, и остаются лишь квадраты модулей отдельных слага-

гаемых. В результате для сечения рассеяния получим

$$\lim_{qa \rightarrow \infty} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_j \left(\frac{e_j^2}{m_j c^2} \right)^2 \sin^2 \Theta = Z \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta, \quad (14.115)$$

где опять последнее выражение относится к электронам в атоме с атомным номером Z . Эта формула соответствует некогерентному сложению амплитуд рассеяния для отдельных частиц.

При рассеянии рентгеновских лучей на атомах критический угол (14.113) можно оценить, используя в качестве радиуса атома величину (13.95). При этом получаем

$$\theta_c \sim \frac{Z^{1/3}}{\hbar \omega (\text{кэв})}. \quad (14.116)$$

Для углов, меньших θ_c , сечение быстро возрастает до величины порядка (14.114), для больших углов оно в Z раз превышает томсоновское сечение рассеяния (14.115), а для жестких («высокочастотных») рентгеновских или γ -лучей — сечение, определяемое формулой Клейна — Нишины (см. фиг. 14.13).

§ 9. Излучение Вавилова — Черенкова

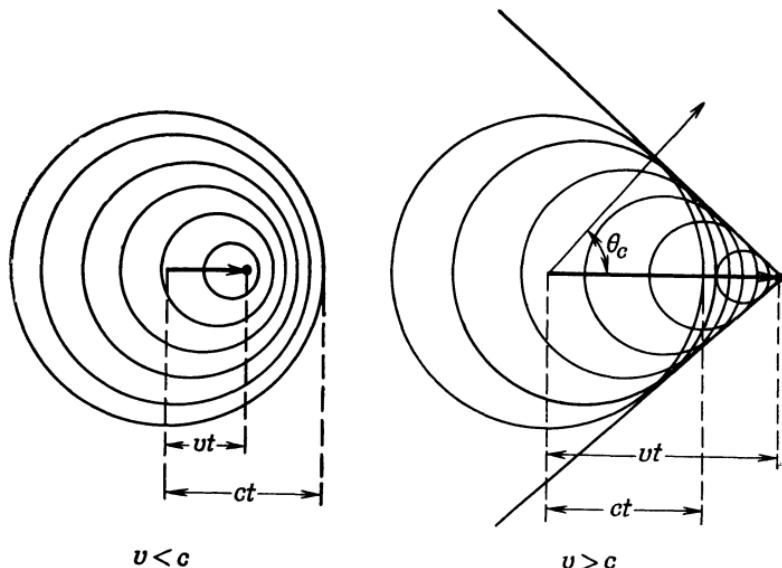
При равномерном прямолинейном движении в свободном пространстве заряженная частица не излучает. Однако частица, движущаяся с постоянной скоростью в материальной среде, может излучать, если ее скорость превышает фазовую скорость распространения электромагнитных волн в среде. Это излучение называется *излучением Вавилова — Черенкова* (или, короче, *черенковским излучением*) по имени открывших его ученых (1937 г.). Это излучение представляет собой коллективный эффект излучения множества атомов среды, электроны которых ускоряются полем проходящей частицы. Ввиду коллективного характера процесса удобно воспользоваться макроскопическим описанием среды, характеризуя ее свойства диэлектрической проницаемостью ϵ , а не исследовать детальные свойства отдельных атомов.

Качественное объяснение эффекта можно получить, рассматривая изменение во времени поля быстрой частицы в диэлектрической среде. Обозначим скорость света в среде через c , а скорость частицы — через v . На фиг. 14.14 изображена последовательность сферических волновых фронтов для движущейся частицы при $v < c$ и $v > c$. Лишь в случае $v > c$ отдельные сферические волновые поверхности интерферируют, обусловливая образование кильватерного волнового фронта за частицей. Нормаль к этой кильватерной волне образует угол θ_C с направлением вектора скорости, где

$$\cos \theta_C = \frac{c}{v}. \quad (14.117)$$

Она и определяет направление распространения черенковского излучения.

В гл. 13, § 4, мы уже нашли поля, соответствующие излучению Вавилова — Черенкова, и даже получили выражение (13.82) для



Ф и г. 14.14. Излучение Вавилова — Черенкова.

Окружности изображают последовательность волновых фронтов поля частицы для случаев, когда скорость меньше и больше скорости света в среде. При $v > c$ происходит образование «ударной» электромагнитной волны, движущейся в направлении, определяемом черенковским углом θ_c .

интенсивности этого излучения. Однако весьма поучительно рассмотреть эту задачу с помощью потенциалов Лиенара — Вихерта. Как следует из гл. 13, § 4, поля и энергию излучения в немагнитных средах можно рассчитать, рассматривая движение частицы со скоростью $v > c$ в свободном пространстве, производя затем в конечном результате вычислений замену

$$c \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \quad e \rightarrow \frac{e}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (14.118)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость¹⁾. Для упрощения ана-

1) Как видно из (13.54), это соответствует применению потенциалов $\Phi' = \sqrt{\epsilon} \Phi$, $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ и полей $\mathbf{E}' = \sqrt{\epsilon} \mathbf{E}$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$. При этом, например, вектор Пойнтинга оказывается равным

$$\mathbf{S}' = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}' \times \mathbf{B}') \rightarrow \frac{c}{4\pi \sqrt{\epsilon}} (\mathbf{E}' \times \mathbf{B}') = \mathbf{S}.$$

лиза будем считать, что ϵ не зависит от частоты. Однако, поскольку наши конечные результаты будут получены для отдельных спектральных компонент, они легко смогут быть обобщены.

Потенциалы Лиенара — Вихерта для произвольно движущегося точечного заряда были получены в § 1. При этом неявно предполагалось, что скорость частицы меньше скорости света. В этом случае потенциалы (14.6) в данной пространственно-временной точке определяются поведением частицы лишь в *одной* более ранней пространственно-временной точке, а именно в соответствующей «запаздывающей» точке. На левой половине фиг. 14.14 это выражается в том, что любая заданная точка лежит лишь на одной окружности. Если же $v > c$, то, как видно из правой половины рисунка, поле в заданной пространственно-временной точке определяется *двумя* «запаздывающими» положениями. Скалярный потенциал в (14.6) следует теперь заменить выражением

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = e \left[\frac{1}{\kappa R} \right]_1 + e \left[\frac{1}{\kappa R} \right]_2, \quad (14.119)$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум моментам запаздывающего времени t'_1 и t'_2 .

Для определения t'_1 и t'_2 найдем, когда обращается в нуль аргумент δ -функции в (14.3):

$$t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c} - t = 0. \quad (14.120)$$

Для частицы, движущейся с постоянной скоростью \mathbf{v} , можно положить $\mathbf{r}(t') = \mathbf{v}t'$. Вводя $\mathbf{X} = (\mathbf{x} - vt)$ — векторное расстояние от *истинного* положения частицы P до точки наблюдения P' , получаем

$$t - t' = \frac{1}{c} |\mathbf{X} + \mathbf{v}(t - t')|. \quad (14.121)$$

Решение этого квадратного уравнения имеет вид

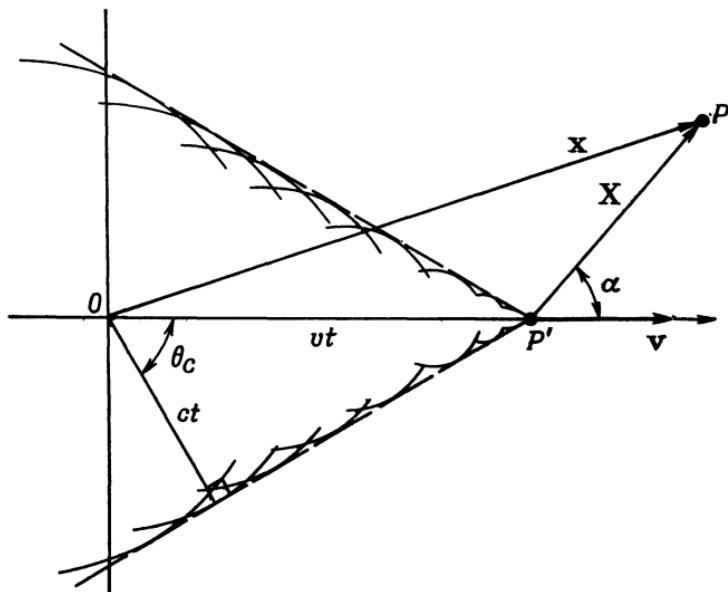
$$t - t' = \frac{-\mathbf{X} \cdot \mathbf{v} \pm \sqrt{(\mathbf{X} \cdot \mathbf{v})^2 - (v^2 - c^2) X^2}}{v^2 - c^2} \quad (14.122)$$

Физический смысл имеют лишь действительные положительные корни. При $v < c$ квадратный корень действителен и больше величины $|\mathbf{X} \cdot \mathbf{v}|$, так что существует лишь одно пригодное решение для $(t - t')$, как и отмечалось ранее. Для $v > c$ дело обстоит иначе. Во-первых, даже при действительном квадратном корне (как это имеет место для направлений, приблизительно параллельных или антипараллельных скорости \mathbf{v}), он меньше по величине, чем $|\mathbf{X} \cdot \mathbf{v}|$. Следовательно, если угол между \mathbf{X} и \mathbf{v} острый, то решения для $(t - t')$ не существует, т. е. поля перед частицей нет. Если α — угол

между \mathbf{X} и \mathbf{v} (фиг. 14.15), то при $\cos^2 \alpha < (1 - c^2/v^2)$ квадратный корень, как легко видеть, принимает чисто мнимые значения. Однако для области углов, удовлетворяющих неравенствам

$$\arccos\left(-\sqrt{1-\frac{c^2}{v^2}}\right) < \alpha < \pi,$$

существует два действительных и положительных значения $(t-t')$, удовлетворяющих (14.121). Таким образом, электромагнит-



Ф и г. 14.15.

ные потенциалы отличны от нуля лишь внутри черенковского конуса, определяемого условием

$$\cos \alpha = -\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)^{1/2}.$$

Как легко показать, двум корням (14.122) соответствуют следующие значения xR :

$$xR = \mp \frac{1}{c} [(X \cdot v)^2 - (v^2 - c^2) X^2]^{1/2}. \quad (14.123)$$

В действительности потенциал (14.119) должен содержать лишь абсолютные величины, поскольку в (14.4) справа должна входить лишь абсолютная величина производной. Таким образом, оба слагаемых в (14.119) складываются и потенциалы могут быть запи-

саны в виде

$$\Phi(x, t) = \frac{2e}{X \sqrt{1 - (v^2/c^2) \sin^2 \alpha}}, \quad (14.124)$$

$$\mathbf{A}(x, t) = \frac{\mathbf{v}}{c} \Phi(x, t).$$

Полученные выражения для потенциалов справедливы внутри черенковского конуса; на его поверхности они обращаются в бесконечность, а вне конуса равны нулю. Они описывают волновой фронт, распространяющийся со скоростью c в направлении θ_C , определяемом согласно (14.117). Обращение их в бесконечность, разумеется, физически нереально. Оно связано с исходным допущением о независимости скорости света в среде от частоты. Для достаточно высоких частот (достаточно коротких длин волн) фазовая скорость в среде приближается к скорости света в свободном пространстве. Учет такой зависимости от частоты приводит к сглаживанию на коротких расстояниях и к исключению особенностей.

Потенциалы (14.124) представляют собой частный случай потенциалов, фурье-амплитуды которых даются выражениями (13.57). В свою очередь поля, определяемые потенциалами (14.124), также являются фурье-амплитудами выражений (13.64) и (13.65), где $\epsilon(\omega)$ следует считать действительной постоянной. Потери энергии на излучение находятся так же, как и в гл. 13, § 4, интегрированием вектора Пойнтинга по поверхности цилиндра [ср. (13.71)], что приводит к окончательному выражению (13.82) для энергии, излучаемой на единице длины.

Приведенное выше описание появления черенковской «ударной волны» при $v > c$ представляет собой адекватное макроскопическое объяснение возникновения черенковского излучения. Если же интересоваться лишь угловым и спектральным распределением излучения, а не его механизмом, то можно с помощью подстановки (14.118) простым, но нестрогим путем получить эти характеристики. Угловое и частотное распределение энергии, излучаемой движущейся частицей, определяется соотношением (14.67):

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2. \quad (14.125)$$

Производя подстановку (14.118), приходим к следующему выражению для энергии, теряемой частицей, движущейся в немагнитной диэлектрической среде:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \epsilon^{1/2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{\epsilon^{1/2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2. \quad (14.126)$$

При равномерном прямолинейном движении $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t$, так что

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \epsilon^{1/2}}{c^3} |\mathbf{n} \times \mathbf{v}|^2 \left| \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i\omega t \left(1 - \frac{\epsilon^{1/2}}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \right) \right] dt \right|^2. \quad (14.127)$$

Интеграл в правой части есть δ -функция. Таким образом,

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \epsilon^{1/2} \beta^2 \sin^2 \theta}{c} |\delta(1 - \epsilon^{1/2} \beta \cos \theta)|^2, \quad (14.128)$$

где угол θ отсчитывается от направления скорости \mathbf{v} . Наличие δ -функции показывает, что энергия излучается лишь в направлении, характеризуемом черенковским углом θ_C :

$$\cos \theta_C = \frac{1}{\beta \epsilon^{1/2}}. \quad (14.129)$$

Присутствие в угловом распределении (14.128) квадрата δ -функции означает, что полная энергия, излученная в единичном интервале частот, бесконечна. Появление этой расходимости связано с предположением, что частица движется в среде неограниченно долго. Для получения разумного результата будем считать, что частица проходит слой диэлектрика в течение времени $2T$. В этом случае расходящийся интеграл в (14.127) заменяется выражением

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_{-T}^T \exp \left[i\omega t \left(1 - \frac{\epsilon^{1/2}}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \right) \right] dt = \frac{\omega T}{\pi} \frac{\sin [\omega T (1 - \epsilon^{1/2} \beta \cos \theta)]}{[\omega T (1 - \epsilon^{1/2} \beta \cos \theta)]}. \quad (14.130)$$

При $\omega T \gg 1$ квадрат модуля этой функции имеет резкий максимум при значении угла θ , равном θ_C . Предполагая, что $\beta > 1/\epsilon^{1/2}$ (при этом угол θ_C существует), произведем интегрирование по углам:

$$\int d\Omega \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)^2 \frac{\sin^2 [\omega T (1 - \epsilon^{1/2} \beta \cos \theta)]}{[\omega T (1 - \epsilon^{1/2} \beta \cos \theta)]^2} = \frac{2\omega T}{\beta \epsilon^{1/2}}; \quad (14.131)$$

отсюда видно, что потери на излучение пропорциональны интервалу времени. Из (14.128) находим полную потерю энергии на излучение в единичном интервале частот при прохождении слоя вещества

$$I(\omega) = \frac{e^2 \omega}{c^2} 2c\beta T \sin^2 \theta_C. \quad (14.132)$$

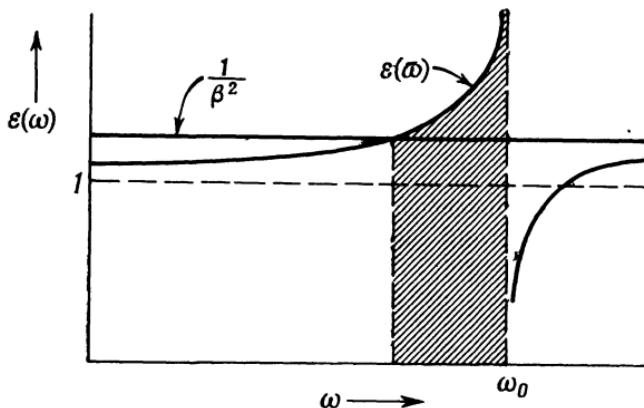
Разделив полученную величину на $2c\beta T$, определим энергию, излученную в единичном интервале частот на единице пути. Нако-

неч, учитывая значение (14.129) угла θ_C , найдем

$$\frac{dI(\omega)}{dx} = \frac{e^2\omega}{c^2} \left[1 - \frac{1}{\beta^2\varepsilon(\omega)} \right], \quad (14.133)$$

где частота ω такова, что $\varepsilon(\omega) > 1/\beta^2$; полученный результат согласуется с (13.82).

Свойства черенковского излучения можно использовать для измерения скорости быстрых частиц. Если частицы с данной скоростью проходят через среду с известной диэлектрической проницаемостью ε , то свет будет испускаться под черенковским углом



Ф и г. 14.16. Область черенковского излучения.

Излучение испускается лишь в заштрихованной полосе частот, для которой выполняется условие $\varepsilon(\omega) > \beta^{-2}$.

(14.129). Таким образом, измерение угла θ_C позволяет определить скорость. Так как диэлектрическая проницаемость среды ε , вообще говоря, зависит от частоты, световое излучение разной длины волны будет испускаться под несколько различающимися углами. На фиг. 14.16 изображена типичная кривая дисперсии $\varepsilon(\omega)$ с областью аномальной дисперсии в верхнем конце интервала частот. Заштрихованная область соответствует полосе частот, в которой существует черенковское излучение. Так как в области аномальной дисперсии диэлектрические среды обладают сильным поглощением, максимум спектрального распределения черенковского излучения лежит несколько ниже резонансного значения частоты. Чтобы выделить малый интервал частот и повысить тем самым точность измерений скорости, можно применять узкополосные фильтры. Для очень быстрых частиц ($\beta \ll 1$) в качестве среды можно использовать газ; тогда диэлектрическая проницаемость мало отличается от единицы, а величину $(\varepsilon - 1)$ можно менять в широких пределах, изменяя давление газа. Счетчики, использующие черенков-

ское излучение, нашли широкое применение в физике частиц высоких энергий как измерители скорости, в качестве масс-спектрометров (в сочетании с устройством для определения импульса), а также в качестве дискриминаторов, которые позволяют устранить нежелательные медленные частицы.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Все руководства по электродинамике в той или иной мере затрагивают вопросы, связанные с излучением ускоренных частиц, хотя и неодинаково подробно. Релятивистские аспекты проблемы более или менее детально рассмотрены в книгах Иваненко и Соколова [53], § 39—43, Ландау и Лифшица [63], гл. 8 и 9, Пановского и Филипс [78], гл. 18 и 19, Зоммерфельда [102], § 29,30. Обширный расчетный материал, касающийся излучения релятивистских частиц, предвосхитивший многие результаты, вновь открытые в период 1940—1950 гг., содержится в интересной монографии Шотта [91]. Вопрос о рассеянии излучения заряженными частицами ясно изложен в книгах Ландау и Лифшица [63], гл. 9, § 11—13, и [64], гл. 14 и 15.

ЗАДАЧИ

14.1. Проверить непосредственным вычислением, что выражения для *всех* составляющих полей **E** и **B** равномерно движущейся частицы, получающиеся из потенциалов Лиенара — Вихерта, совпадают с выражениями, найденными в тексте с помощью преобразований Лоренца. Использовать общий метод, описанный в конце § 1.

14.2. С помощью потенциалов Лиенара — Вихерта найти среднюю по времени мощность излучения в единицу телесного угла для нерелятивистской частицы с зарядом *e*, если:

а) частица совершает гармонические колебания вдоль оси *z* так, что ее мгновенное положение $z(t) = a \cos \omega_0 t$;

б) частица движется с постоянной угловой частотой ω_0 по окружности радиусом *R*, лежащей в плоскости *xy*.

Построить график углового распределения излучения и определить полную мощность излучения в обоих случаях.

14.3. Нерелятивистская частица с зарядом *ze*, массой *m* и кинетической энергией *E* претерпевает лобовое соударение с фиксированным центральным полем сил конечной протяженности. Силы являются отталкивающими и описываются потенциалом *V(r)*, который превышает *E* на близких расстояниях.

а) Показать, что полная излученная энергия определяется формулой

$$\Delta W = \frac{4}{3} \frac{z^2 e^2}{m^2 c^3} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \left| \frac{dV}{dr} \right|^2 \frac{dr}{\sqrt{V(r_{\min}) - V(r)}},$$

где r_{\min} — минимальное расстояние до центра сил, достигаемое при соударении.

б) Показать, что если взаимодействие описывается кулоновским потенциалом $V(r) = zZe^2/r$, то полная излученная энергия равна

$$\Delta W = \frac{8}{45} \frac{zmv_0^6}{Zc^3},$$

где v_0 — скорость заряда на бесконечности.

14.4. Частица с массой m и зарядом q движется в плоскости, перпендикулярной однородному статическому магнитному полю B .

а) Вычислить полную энергию, излучаемую в единицу времени, выразив ее через заданные выше константы и отношение γ полной энергии частицы к ее энергии покоя.

б) Показать, что если при $t = 0$ частица имела полную энергию $E_0 = \gamma_0 mc^2$, то в момент t , определяемый соотношением

$$t \approx \frac{3m^3c^5}{2q^4B^2} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} \right),$$

она будет обладать полной энергией $E = \gamma mc^2 < E_0$, если $\gamma \gg 1$.

в) Найти кинетическую энергию частицы в момент t , если первоначально частица была нерелятивистской и имела кинетическую энергию ε_0 при $t = 0$.

г) Пусть частица, захваченная дипольным магнитным полем Земли, движется по спирали вдоль силовой линии. Где она будет больше излучать — вблизи экватора или вблизи точки поворота? Почему? Дать количественное обоснование.

14.5. Как и в задаче 14.2, п. «а» заряд e совершает простое гармоническое движение вдоль оси z : $z(t') = a \cos \omega_0 t'$.

а) Показать, что мгновенное значение мощности, излучаемой в единицу телесного угла, равно

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 c \beta^4}{4\pi a^2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \omega t'}{(1 + \beta \cos \theta \sin \omega_0 t')^5},$$

где $\beta = a\omega_0/c$.

б) Произведя усреднение по времени, показать, что средние потери мощности в единицу телесного угла описываются соотношением

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 c \beta^4}{32\pi a^2} \frac{4 + \beta^2 \cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^{7/2}} \sin^2 \theta.$$

в) Построить схематический график углового распределения излучения для нерелятивистского и релятивистского движений.

14.6. Пусть излучающая частица совершает периодическое движение с периодом T . С помощью формулы суммирования Пуассона или другим методом показать, что в этом случае непрерывный спектр излучаемых частот переходит в дискретный спектр, состоящий из частот, кратных основной частоте. Показать, что общее выражение для мощности излучения в единицу телесного угла на m -й гармонике основной частоты $\omega_0 = 2\pi/T$ имеет вид

$$\frac{dP_m}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_0^4 m^2}{(2\pi c)^3} \left| \int_0^{2\pi/\omega_0} \mathbf{v}(t) \times \mathbf{n} \exp \left\{ im\omega_0 \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2.$$

14.7. а) Показать, что для простого гармонического движения заряда, рассмотренного в задаче 14.5, средняя мощность излучения в единицу телесного угла на m -й гармонике равна

$$\frac{dP_m}{d\Omega} = \frac{e^2 c \beta^2}{2\pi a^2} m^2 \operatorname{tg}^2 \theta J_m^2 (m\beta \cos \theta).$$

б) Показать, что в нерелятивистском предельном случае вся мощность излучается на основной гармонике и равна

$$P \approx \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^4 \bar{a^2},$$

где $\bar{a^2}$ — средний квадрат амплитуды колебаний.

14.8. Частица с зарядом e движется с постоянной угловой частотой ω_0 по окружности радиусом R , лежащей в плоскости xy .

а) Показать, что точное выражение для углового распределения мощности излучения на m -й гармонике имеет вид

$$\frac{dP_m}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_0^4 R^2}{2\pi c^3} m^2 \left\{ \left[\frac{dJ_m(m\beta \sin \theta)}{d(m\beta \sin \theta)} \right]^2 + \frac{c^2 g^2 \theta}{\beta^2} J_m^2(m\beta \sin \theta) \right\},$$

где $\beta = \omega_0 R / c$, а $J_m(x)$ — функция Бесселя m -го порядка.

б) Считая движение нерелятивистским, получить приближенное выражение для $dP_m/d\Omega$. Сопоставить с результатами задачи 14.2, п. «б».

в) Считая движение ультрарелятивистским, получить характеристики, приведенные в тексте для релятивистской частицы, движущейся по окружности (при этом полезно использовать формулы из книги Ватсона [114]).

14.9. Согласно принципу соответствия Бора, в предельном случае больших квантовых чисел классическое значение мощности излучения на основной гармонике равно произведению энергии кванта $\hbar\omega_0$ на вероятность перехода (обратное среднее время жизни) между состояниями с главными квантовыми числами n и $n - 1$.

а) Используя нерелятивистское приближение, показать, что для водородоподобного атома классическое выражение для вероятности перехода с круговой орбиты, характеризуемой главным квантовым числом n , на орбиту с квантовым числом $n - 1$ имеет вид

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{Ze^2}{\hbar c} \right)^4 \frac{mc^2}{\hbar} \frac{1}{n^5}.$$

б) Для водорода сравнить классическое значение времени жизни, найденное в п. «а», с точным квантовомеханическим значением для переходов $2p \rightarrow 1s$ ($1,6 \cdot 10^{-9}$ сек), $4f \rightarrow 3d$ ($7,3 \cdot 10^{-8}$ сек), $6h \rightarrow 5g$ ($6,1 \cdot 10^{-7}$ сек).

14.10. При периодическом движении заряда излучение обладает дискретным спектром частот, кратных основной частоте движения. Значительное излучение на высших гармониках может иметь место либо из-за релятивистских эффектов (см. задачи 14.7 и 14.8) даже в случае, когда составляющие скорости строго синусоидальны, либо из-за того, что составляющие скорости меняются не синусоидально, хотя и периодически. Примером второго случая является нерелятивистское эллиптическое движение электрона в атоме водорода.

Орбита при этом может быть определена параметрическими уравнениями

$$x = a(\cos u - \varepsilon), \\ y = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u,$$

где

$$\omega_0 t = u - \varepsilon \sin u;$$

a — главная полуось эллипса, ε — эксцентриситет, ω_0 — угловая частота, u — угол в плоскости орбиты. Параметры эллипса можно выразить через

энергию связи B и момента количества движения L :

$$a = \frac{e^2}{2B}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2BL^2}{mc^4}}, \quad \omega_0^2 = \frac{8B^3}{mc^4}.$$

а) Показать, что мощность излучения на k -й гармонике равна

$$P_k = \frac{4e^2}{3c^3} (k\omega_0)^4 a^2 \left\{ \frac{1}{k^2} \left[[J'_k(k\varepsilon)]^2 + \left(\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right) J_k^2(k\varepsilon) \right] \right\},$$

где $J_k(x)$ — функция Бесселя k -го порядка.

б) Показать, что для круговой орбиты полученный результат согласуется с решением задачи 14.8, п. «а».

14.11. Вместо одиночного заряда e , движущегося с постоянной частотой ω_0 по окружности радиусом R (см. задачу 14.8), рассмотреть движение системы N зарядов, относительные положения которых на окружности фиксированы.

а) Показать, что мощность излучения на m -й гармонике описывается соотношением

$$\frac{dP_m(N)}{d\Omega} = \frac{dP_m(1)}{d\Omega} F_m(N),$$

где $dP_m(1)/d\Omega$ — мощность излучения одного заряда (см. задачу 14.8, п. «а»), а

$$F_m(N) = \left| \sum_{j=1}^N e^{im\theta_j} \right|^2,$$

где θ_j — угловая координата j -го заряда в момент $t = t_0$.

б) Показать, что при равномерном распределении зарядов по окружности излучение происходит лишь на гармониках, кратных $N\omega_0$, а интенсивность излучения возрастает в N^2 раз по сравнению с излучением одиночного заряда. Дать качественное объяснение указанных фактов.

в) Показать без подробных вычислений, что при нерелятивистском движении полная мощность излучения зависит от N приблизительно как β^{2N} и, таким образом, в пределе при $N \rightarrow \infty$ излучение отсутствует.

г) Аналогичным образом показать, что для релятивистских частиц зависимость мощности излучения от N определяется функцией $\exp(-2N/3\gamma^3)$ при $N \gg \gamma^3$, так что опять-таки в пределе $N \rightarrow \infty$ излучение отсутствует.

д) Указать связь между результатами, полученными в п. «в» и «г», и известными излучательными свойствами стационарного тока в замкнутом контуре.

14.12. Рассмотреть в качестве идеализации постоянного тока в контуре систему из N идентичных зарядов q , движущихся по произвольному замкнутому пути с постоянной по величине скоростью v . Соседние заряды находятся на малом постоянном расстоянии Δ друг от друга.

Исходя из выражений Лиенара — Вихерта для полей каждой частицы и не накладывая никаких ограничений на величину скорости v , показать, что в пределе, когда $N \rightarrow \infty$, $q \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$, но $Nq = \text{const}$, $q/\Delta = \text{const}$, система не излучает, а электрическое и магнитное поля системы эквивалентны обычным статическим полям.

(Заметим, что в реальном контуре стационарные положительные ионы в проводнике создают электрическое поле, компенсирующее поле движущихся зарядов.)

14.13. Пусть мгновенный спектр мощности излучения электрона в синхротроне описывается формулой

$$P(\omega, t) \approx \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{Q} \gamma(t) \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/3} e^{-2\omega/\omega_c},$$

где $\omega_c = 3\omega_0 \gamma^3(t)$.

а) Показать, что если энергия электронов растет в течение одного цикла ускорения приблизительно линейно, то усредненный по циклу спектр мощности имеет вид

$$\langle P(\omega, t) \rangle = \frac{2^{2/3}}{3\pi} \frac{e^2}{Q} \gamma_{\max} x^{2/3} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y^{4/3}} dy,$$

где $x = 2\omega/\omega_{\max}$.

б) Найти предельные выражения для спектра мощности при $x \ll 1$ и $x \gg 1$.

в) Пользуясь таблицами значений интеграла, входящего в приведенное выражение (он представляет собой неполную гамма-функцию), или с помощью графического интегрирования численно рассчитать спектр для $x = 0,1; 0,5; 1,0; 1,5$. Построить график зависимости P от $\lg(\omega/\omega_{\max})$ и сравнить его с кривыми, приведенными в работе [40].

14.14. а) В рамках приближений, принятых в § 6 этой главы, показать, что при релятивистском движении частиц по траектории с мгновенным радиусом кривизны Q интенсивность излучения с правой и левой круговой поляризацией в единицу телесного угла в единичном интервале частот определяется выражением

$$\frac{dI_{\pm}(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{6\pi^2 c} \left(\frac{\omega Q}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2 + \theta^2} \right)^2 \left| K_{2/3}(\xi) \pm \frac{\theta}{(1/\gamma^2 + \theta^2)^{1/2}} K_{1/3}(\xi) \right|^2.$$

б) Используя приведенное в п. «а» выражение и формулы § 6, исследовать зависимость поляризации полного излучения от частоты и угла. В частности, определить степень поляризации: 1) на высоких частотах ($\omega > \omega_c$) для всех значений углов; 2) на средних и низких ($\omega < \omega_c$) частотах для больших углов; 3) на средних и низких частотах для очень малых углов.

в) Провести сравнение с экспериментальными результатами, приведенными в работе [56].

14.15. Рассмотреть синхротронное излучение Крабовидной туманности. Электроны с энергиями до 10^{12} эВ движутся в магнитном поле порядка 10^{-4} гаусс.

а) Для $E = 10^{12}$ эВ, $B = 10^{-4}$ гаусс вычислить радиус орбиты Q , основную частоту $\omega_0 = c/Q$ и критическую частоту ω_c .

б) Показать, что спектральное распределение мощности синхротронного излучения для релятивистских электронов с энергией E в постоянном магнитном поле может быть представлено в виде

$$P(E, \omega) = \text{const} \left(\frac{\omega}{E^2} \right)^{1/3} f \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right),$$

где $f(x)$ — функция, равная единице при $x = 0$ и быстро убывающая до нуля при $x \gg 1$ [в задаче 14.13, например, $f \approx \exp(-2\omega/\omega_c)$], а $\omega_c = (3eB/mc)(E/mc^2)^2 \cos \theta$, где θ — угол наклона спиральной траектории.

в) Показать, что при законе распределения электронов по энергии $N(E) dE \sim E^{-n} dE$ спектр мощности синхротронного излучения имеет вид

$$\langle P(\omega) \rangle d\omega \sim \omega^{-\alpha} d\omega.$$

где $\alpha = (n - 1)/2$.

г) Наблюдения радиоизлучения и непрерывного оптического спектра Крабовидной туманности показывают, что в интервале частот от $\omega \sim 10^8$ до $\omega \sim 6 \cdot 10^{15}$ Гц постоянная $\alpha \approx 0,35$. На более высоких частотах интенсивность спектральных компонент излучения быстро убывает с показателем $\alpha \geq 1,5$. Определить показатель степени n в энергетическом спектре электронов и верхнюю границу спектра. Согласуется ли эта граничная энергия с данными, приведенными в п. «а»?

д) Используя решение задачи 14.4, п. «б», определить величину интервала времени, необходимого для того, чтобы энергия электронов уменьшилась от бесконечного значения до 10^{12} эВ в поле 10^{-4} гаусс. В каком отношении находится этот результат с известным временем жизни Крабовидной туманности?

14.16. Считая, что показатель преломления плексигласа в области видимого света равен 1,50, вычислить угол, под которым испускается видимое черенковское излучение электронов и протонов в зависимости от их энергии, выраженной в МэВ. Определить число квантов излучения с длиной волны в диапазоне от 4000 до 6000 Å, излучаемых в плексигласе на пути 1 см электронами с энергией 1 МэВ и протонами с энергиями 500 МэВ и 5 ГэВ.