

Глава 15

ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. МЕТОД ВИРТУАЛЬНЫХ ФОТОНОВ. ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ БЕТА-РАСПАДЕ

В гл. 14 в общем виде исследовалось излучение заряженных частиц, движущихся с ускорением. Были выведены формулы для спектрального и углового распределений излучения для ряда случаев и рассмотрено излучение как нерелятивистских, так и релятивистских заряженных частиц во внешних полях. Настоящая глава посвящена проблемам излучения электромагнитных волн заряженными частицами в атомных и ядерных процессах.

При прохождении через вещество частицы рассеиваются и теряют энергию из-за соударений, как подробно описано в гл. 13. В процессе соударений частицы испытывают ускорение; следовательно, они должны излучать электромагнитную энергию. Излучение, сопровождающее атомные соударения, называют обычно *тормозным излучением*, так как впервые оно наблюдалось в опытах по торможению высокоэнергетического пучка электронов толстой металлической мишенью. Для нерелятивистских частиц потери энергии на излучение незначительны по сравнению с потерями энергии при соударениях, но для ультракомпактных частиц излучение может стать основным фактором, определяющим потери энергии. Рассмотрение тормозного излучения и связанных с ним проблем мы начнем с классического нерелятивистского случая. Затем с помощью полуклассических соображений, подобно тому как было сделано в гл. 13, получим квантовомеханические выражения. Вслед за этим будут учтены наиболее существенные релятивистские эффекты.

Процессы рождения или аннигиляции заряженных частиц также сопровождаются испусканием излучения. Эти процессы являются чисто квантовыми по своей природе. Нельзя даже пытаться дать классическое описание сущности этих явлений. Однако, отвлекаясь от физических причин процесса, мы можем поставить вопрос о спектре и интенсивности сопровождающего его электро-

магнитного излучения. Так, внезапное рождение быстрого электрона при ядерном β -распаде можно для наших целей рассматривать как ускорение первоначально покоявшейся частицы до некоторой конечной скорости за очень короткий интервал времени или же как внезапное «включение» заряда движущейся частицы за тот же самый короткий интервал времени. С помощью этих моделей мы рассмотрим в § 7 и 8 ядерный β -распад и захват орбитального электрона.

При рассмотрении излучения, например в задаче о тормозном излучении или об излучении при β -распаде, существенное значение имеет волновая природа заряженных частиц. В связи с этим необходимо учитывать квантовомеханические поправки, очень сходные с введенными нами ранее при рассмотрении электрических потерь. Это можно сделать относительно просто. Существует, однако, ряд более серьезных трудностей, присущих лишь проблемам излучения. Так, очень трудно учесть изменения траектории частицы под влиянием потерь энергии и импульса при излучении. Это связано не только с трудно учитываемыми эффектами реакции излучения (см. гл. 17), но также с дискретной квантовой природой излучаемых фотонов. В результате даже с учетом квантовомеханических поправок полученные результаты оказываются применимыми в ограниченной области энергий излученных фотонов, малых по сравнению с полной энергией частиц. Поэтому для диапазона высоких частот наши полуклассические выражения будут, вообще говоря, справедливы лишь качественно.

§ 1. Излучение при соударениях

Заряженная частица испытывает при соударении ускорение и, следовательно, излучает. Если вторая соударяющаяся частица также заряжена, то они обе излучают и следует учитывать когерентную сумму излучаемых полей. Так как амплитуда поля излучения определяется (в нерелятивистском случае) произведением заряда на ускорение, то при приблизительно равных зарядах легкие частицы излучают интенсивнее. Во многих случаях масса одной из соударяющихся частиц намного превышает массу другой; тогда при исследовании излучения достаточно рассматривать соударение как взаимодействие более легкой частицы с заданным полем сил. Мы ограничимся лишь этим случаем, отнеся рассмотрение более сложных к задачам в конце главы.

Согласно формуле (14.65), для нерелятивистской частицы с зарядом e и ускорением $c\dot{\beta}(t)$ интенсивность излучения в единицу телесного угла в единичном интервале частот равна

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\beta}) \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2. \quad (15.1)$$

При надлежащем выборе начала отсчета радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$, определяющий положение частицы, по порядку величины равен $\langle v \rangle t$, где $\langle v \rangle$ — характерная скорость частицы. Поэтому второе слагаемое в показателе экспоненты в (15.1) отличается от первого множителем порядка $\langle v \rangle/c$, которым при нерелятивистском движении можно пренебречь. Такое приближенное рассмотрение иногда называют *дипольным приближением* по аналогии с разложением по мультипольям, рассмотренным в гл. 9, § 2. В этом случае получаем приближенную формулу

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\beta}) e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (15.2)$$

При соударении ускорение, обусловленное действием внешнего поля сил, имеет место лишь в течение ограниченного времени τ , так называемого времени соударения:

$$\tau \approx \frac{a}{v}, \quad (15.3)$$

где a — радиус действия сил. Поэтому интеграл в (15.2) берется фактически по интервалу времени порядка τ . Величина τ представляет собой естественный параметр, позволяющий разделить диапазон излучаемых частот на область низких ($\omega\tau \ll 1$) и высоких ($\omega\tau \gg 1$) частот. На низких частотах экспонента в выражении (15.2) не меняется существенно в течение периода ускорения. Это позволяет сразу провести интегрирование

$$\int \dot{\beta}(t) e^{i\omega t} dt \approx \int \dot{\beta}(t) dt = \beta_2 - \beta_1 \equiv \Delta\beta, \quad (15.4)$$

где $c\beta_1$ и $c\beta_2$ — начальная и конечная скорости, а $\Delta\beta$ — изменение вектора β . Для энергии излучения получим

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} \approx \frac{e^2}{4\pi^2 c} |\Delta\beta|^2 \sin^2 \Theta, \quad \omega\tau \ll 1, \quad (15.5)$$

где угол Θ отсчитывается от направления вектора $\Delta\beta$. Полная энергия, излучаемая в единичном интервале частот, в рассматриваемом предельном случае равна

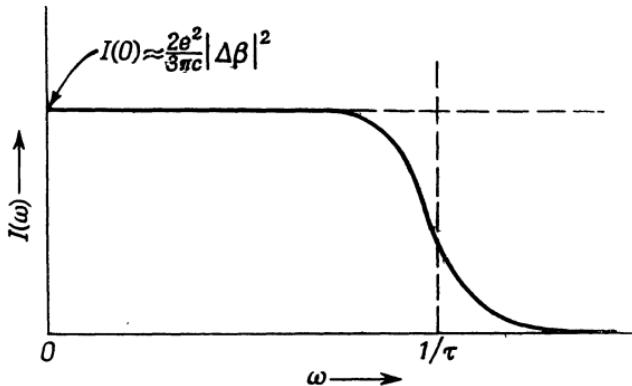
$$I(\omega) \approx \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c} |\Delta\beta|^2, \quad \omega\tau \ll 1. \quad (15.6)$$

В предельном случае высоких частот ($\omega\tau \gg 1$) экспоненциальный множитель в (15.2) очень быстро осциллирует по сравнению с изменением вектора $\dot{\beta}(t)$ во времени. Поэтому среднее значение подынтегрального выражения очень мало и излучение незначительно. Спектральное распределение излучения качественно изобра-

жено на фиг. 15.1. Иногда удобно аппроксимировать спектральное распределение ступенчатой функцией

$$I(\omega) = \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi c} |\Delta\beta|^2, & \omega\tau < 1, \\ 0, & \omega\tau > 1. \end{cases} \quad (15.7)$$

Такое приближение мало пригодно для одиночного соударения с определенной величиной $\Delta\beta$, но оно оказывается вполне удовлетворительным в тех случаях, когда происходит усреднение по многим соударениям с различными $\Delta\beta$.

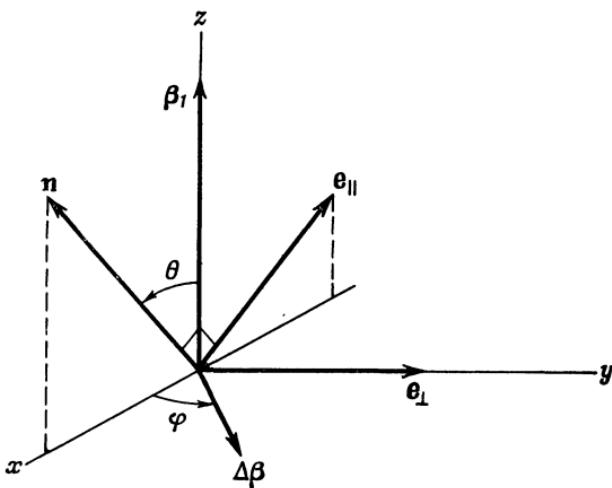


Фиг. 15.1. Спектральное распределение излучения при соударении, характеризуемом временем соударения τ и изменением вектора скорости $\Delta\beta$.

Выражение (15.5) описывает угловое распределение всего излучения без учета поляризации. Иногда интересно вычислить интенсивность излучения для какой-либо определенной поляризации. Обычно при соударениях известны направление налетающей частицы и направление излучения, но неизвестно направление отклоненной частицы и, следовательно, неизвестна величина $\Delta\beta$. Поэтому поляризацию излучения естественно определять относительно плоскости, содержащей направление падающего пучка и направление излучения.

Для простоты рассмотрим отклонения на малый угол, для которых вектор $\Delta\beta$ приближенно можно считать перпендикулярным направлению падения. Без потери общности можно считать, что единичный вектор \mathbf{n} в направлении наблюдения лежит в плоскости xz и составляет угол θ с направлением первичного пучка (фиг. 15.2). Вектор изменения скорости $\Delta\beta$ лежит в плоскости xy , составляя угол ϕ с осью x . Так как направление движения рассеянной частицы не регистрируется, мы будем усреднять результаты

по ф. Единичные векторы \mathbf{e}_{\parallel} и \mathbf{e}_{\perp} характеризуют поляризацию, параллельную и перпендикулярную плоскости, содержащей β_1 и \mathbf{n} .



Ф и г. 15.2.

Направление поляризации излучения задается вектором $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \Delta\beta)$. Этот вектор перпендикулярен \mathbf{n} (как и должно быть) и может быть разложен на две составляющие вдоль \mathbf{e}_{\parallel} и \mathbf{e}_{\perp} :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \Delta\beta) = \Delta\beta (\mathbf{e}_{\parallel} \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{e}_{\perp} \sin \varphi). \quad (15.8)$$

Усредняя по φ квадраты модулей составляющих в выражении (15.8), находим интенсивности излучения для двух возможных поляризаций:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\parallel}(\omega)}{d\Omega} &= \frac{e^2}{8\pi^2 c} |\Delta\beta|^2 \cos^2 \theta, \\ \frac{dI_{\perp}(\omega)}{d\Omega} &= \frac{e^2}{8\pi^2 c} |\Delta\beta|^2. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Полученные угловые распределения справедливы для всех типов нерелятивистских соударений с рассеянием на малые углы. Они были детально подтверждены при исследовании непрерывного спектра тормозного рентгеновского излучения для электронов с кинетической энергией порядка килоэлектрон-вольт. Нетрудно видеть, что сумма интенсивностей для обеих поляризаций согла-суется с выражением (15.5) и приводит к значению (15.6) полной интенсивности излучения.

§ 2. Тормозное излучение при нерелятивистских кулоновских соударениях

Излучение с непрерывным спектром чаще всего испускается при соударении быстрой частицы с атомом. В качестве модели процесса рассмотрим вначале соударение быстрой, но нерелятивистской частицы, имеющей заряд ze , массу M и скорость v , с покоящимся точечным зарядом Ze . Предположим для простоты, что отклонение налетающей частицы мало. При этом справедливы приведенные в гл. 13 соображения, ограничивающие величину прицельного параметра. Фактически большая часть рассуждений, проведенных в гл. 13 при рассмотрении энергетических потерь, может быть почти полностью перенесена на наш случай.

Для малых отклонений в кулоновском поле точечного заряда Ze изменение импульса является чисто поперечным и описывается выражением (13.1), умноженным на Z . Таким образом, полное изменение скорости налетающей частицы, характеризуемой прицельным параметром b , равно

$$\Delta v = \frac{2zZe^2}{Mvb}. \quad (15.10)$$

Спектральное распределение излучения можно приближенно описать выражением (15.7) (умноженным на z^2), в котором, согласно (15.3), время соударения $\tau \approx b/v$. Спектр частот простирается от $\omega = 0$ до $\omega_{\max} \approx v/b$

$$I(\omega, b) \approx \begin{cases} \frac{8}{3\pi} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \frac{1}{b^2}, & \omega < \frac{v}{b}, \\ 0, & \omega > \frac{v}{b}. \end{cases} \quad (15.11)$$

Так же как и при рассмотрении потерь энергии, физически интересной величиной является сечение рассеяния, получаемое интегрированием по всем возможным значениям прицельных параметров. В соответствии с этим определим *сечение излучения*

$$\chi(\omega) = \int I(\omega, b) 2\pi b db; \quad (15.12)$$

оно имеет размерность [площадь·энергия/частота]. Классические значения пределов изменения прицельного параметра можно найти из соображений, аналогичных приведенным в гл. 13, § 1. Минимальное значение прицельного параметра [см. формулы (13.5) — (13.7)] равно

$$b_{\min}^{(\text{кл})} \approx \frac{zZe^2}{Mv^2}, \quad (15.13)$$

а максимальное значение определяется условием обрезания спектра (15.11). Если интересоваться значением $\chi(\omega)$ при фиксированной частоте ω , то, очевидно, заметное излучение на этой частоте возможно только в тех случаях, когда прицельный параметр меньше величины

$$b_{\max} \approx \frac{v}{\omega}, \quad (15.14)$$

так как только при выполнении этого условия ускорения будут достаточно велики. Если учесть это ограничение, накладываемое на величину b , то сечение тормозного излучения оказывается равным

$$\chi_{\text{кл}}(\omega) \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda M v^3}{z Z e^2 \omega} \right), \quad (15.15)$$

где λ — численный множитель порядка единицы, учитывающий неопределенность предельных значений прицельного параметра. Полученный результат справедлив лишь для частот, для которых аргумент логарифма велик по сравнению с единицей, что соответствует $b_{\max} \gg b_{\min}$. Это означает, что существует классический верхний предел $\omega_{\max}^{(\text{кл})}$ в спектре частот, определяемый формулой

$$\omega_{\max}^{(\text{кл})} \sim \frac{M v^3}{z Z e^2}. \quad (15.16)$$

Для тяжелых медленных частиц с большим зарядом справедливо классическое выражение для сечения тормозного излучения, но в полной аналогии с теорией энергетических потерь в случае быстрых слабо заряженных частиц начинает существенно сказываться их волновая природа. Квантовые модификации соответствующих формул можно ввести совершенно аналогично тому, как это было сделано в гл. 13, § 3. При учете волновой природы налетающей частицы получаем квантовомеханический нижний предел для прицельного параметра

$$b_{\min}^{(\text{кв})} \approx \frac{\hbar}{M v}. \quad (15.17)$$

Это значит, что сечение тормозного излучения вместо (15.15) описывается приближенной формулой

$$\chi_{\text{кв}}(\omega) \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda M v^2}{\hbar \omega} \right). \quad (15.18)$$

Заметим, что аргумент логарифма отличается от прежнего выражения множителем $Z\eta$, где η определяется выражением (13.42), а Z учитывает заряд ядра. Области применимости классической и квантовомеханической формул определяются в этом случае

по тем же правилам, как и при рассмотрении потерь. Область частот в (15.18) простирается вплоть до максимальной частоты

$$\omega_{\max}^{(кв)} \sim \frac{Mv^2}{\mu}. \quad (15.19)$$

Заметим, что эта предельная частота близка к получающейся из закона сохранения энергии $\omega_{\max} = Mv^2/2\hbar$. Так как классический результат справедлив лишь при $\eta \gg 1$, выполняется соотношение

$$\omega_{\max}^{(кл)} \approx \frac{1}{\eta} \omega_{\max}^{(кв)} \ll \omega_{\max}^{(кв)}. \quad (15.20)$$

Оно показывает, что спектр излучения, описываемый классическими формулами, всегда ограничен лишь очень низкими частотами по сравнению с максимальным значением, определяемым из закона сохранения энергии. Поэтому классическая область представляет незначительный интерес. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь квантовомеханические соотношения.

Хотя верхний предел частоты (15.19) и соответствует приближенно получающемуся из закона сохранения энергии, квантовое выражение для сечения излучения вблизи верхней границы спектра применимо лишь качественно. Причина этого, как уже отмечалось во введении к настоящей главе, заключается в дискретной квантовой природе испускаемых фотонов. Для мягких фотонов, энергия которых значительно меньше максимальной, дискретность природы излучения несущественна, так как уносимые энергия и импульс пренебрежимо малы. Для жестких же фотонов вблизи границы спектра эти эффекты значительны. Один из очевидных возможных способов учета требования сохранения энергии состоит в том, что в определение прицельных параметров (15.14) и (15.17) вводится *средняя* скорость

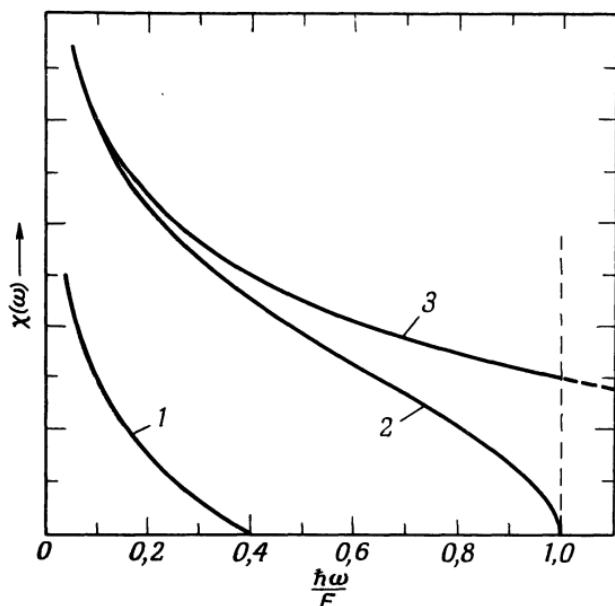
$$\langle v \rangle = \frac{1}{2} (v_{\text{нач}} + v_{\text{кон}}) = \frac{1}{\sqrt{2M}} (\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}), \quad (15.21)$$

где $E = 1/2Mv^2$ — начальная кинетическая энергия частицы, а $\hbar\omega$ — энергия излученного фотона. Подставляя в (15.18) вместо v эту среднюю скорость, получаем

$$\chi_{\text{кв}}(\omega) \approx \frac{16Z^2e^2}{3c} \left(\frac{z^2e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left[\frac{\lambda}{2} \left(\frac{\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}}{\hbar\omega} \right)^2 \right]. \quad (15.22)$$

При $\lambda = 2$ это выражение для сечения тормозного излучения в точности совпадает с квантовомеханическим результатом в борновском приближении, впервые полученным Бете и Гайтлером (1934 г.). Аргумент логарифма равен, очевидно, единице при $\hbar\omega = Mv^2/2$,

так что закон сохранения энергии удовлетворяется. На фиг. 15.3 изображены кривые зависимости сечения излучения от частоты. Приведены кривые, соответствующие формуле Бете — Гайтлера (15.22), «полуклассической» квантовой формуле (15.18) и классической формуле (15.15), в которых положено $\lambda = 2$, $\eta = 10$.



Фиг. 15.3. Зависимость сечения тормозного излучения для кулоновских столкновений от частоты, нормированной к максимальному значению частоты E/\hbar .

Кривая 1 соответствует классическому выражению (для $\eta = 10$), применимому лишь для очень низких частот; кривая 2 — борновскому квантовомеханическому; кривая 3 — полуклассическому выражению (15.18).

Спектральное распределение тормозного излучения иногда характеризуют сечением излучения фотона, имеющим размерность [площадь/энергия]:

$$\hbar\omega\sigma_{\text{торм}}(\hbar\omega)d(\hbar\omega) = \chi(\omega)d\omega. \quad (15.23)$$

Сечение излучения фотона, очевидно, равно

$$\sigma_{\text{торм}} \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \frac{(\dots)}{\hbar\omega}, \quad (15.24)$$

где аргумент логарифма тот же, что и в (15.15) или (15.22). Так как логарифм меняется относительно медленно в зависимости от энергии фотона, то сечение $\sigma_{\text{торм}}$ приблизительно пропорционально $(\hbar\omega)^{-1}$. Это известная характерная особенность спектра тормозного излучения.

Зависимость сечения излучения $\chi(\omega)$ от свойств частиц, участвующих в соударении, определяется множителем $Z^2 z^4 / M^2$. Очевидно, излучение наиболее велико в средах с большим атомным номером. Полная энергия, теряемая на излучение частицей при прохождении ею слоя единичной толщины вещества, содержащего N неподвижных зарядов Ze (атомных ядер) в единице объема, равна

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dx} = N \int_0^{\omega_{\text{макс}}} \chi(\omega) d\omega. \quad (15.25)$$

Используя выражение (15.22) для $\chi(\omega)$ и переходя к переменной интегрирования $x = \hbar\omega/E$, можно переписать формулу для потерь в виде

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dx} = \frac{16}{3} NZ \left(\frac{Ze^2}{\hbar c} \right) \frac{z^4 e^4}{Mc^2} \int_0^1 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \right) dx. \quad (15.26)$$

Безразмерный интеграл оказывается равным единице. Для сравнения приведем отношение потерь энергии на излучение к потерям на соударения (13.13) или (13.44):

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dE_{\text{соуд}}} \approx \frac{4}{3\pi} z^2 \frac{Z}{137} \frac{m}{M} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \frac{1}{\ln B_{\text{кв}}}. \quad (15.27)$$

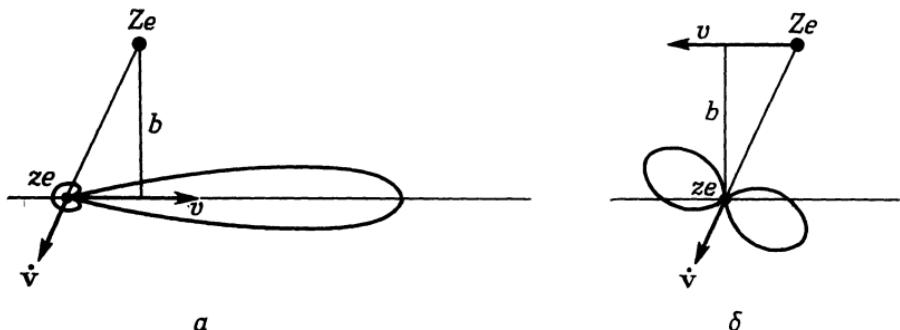
Для нерелятивистских частиц ($v \ll c$) потери на излучение пренебрежимо малы по сравнению с потерями при соударениях. Заметим, что для тех случаев, когда наряду с основным процессом (в данном случае — отклонение частицы в кулоновском поле ядра) учитывается излучение, характерно появление в выражениях постоянной тонкой структуры $e^2/\hbar c = 1/137$. Наличие множителя m/M связано с тем, что потери на излучение определяются ускорением налетающей частицы, тогда как потери при соударениях определяются ускорением электрона.

§ 3. Тормозное излучение при релятивистском движении

При расчете излучения при соударении релятивистских частиц с атомными ядрами следует ввести некоторые поправки. На первый взгляд может показаться, что нерелятивистское рассмотрение, проведенное в предыдущем параграфе, вообще теряет силу, и необходимо провести заново полностью релятивистское исследование. Однако одно из преимуществ специальной теории относительности (не говоря уже о том, что она верна и, следовательно, необходима) заключается в том, что она позволяет проводить расчет в удобной системе отсчета и лишь на заключительном этапе переходить к лабораторной системе координат. Поэтому, как мы сейчас увидим,

весь расчет тормозного излучения при релятивистском движении, кроме его заключительной части, может быть проведен нерелятивистскими методами.

Отметим два существенных обстоятельства. Прежде всего, как мы знаем, излучение ультрарелятивистской частицы сосредоточено в узком конусе с углом раствора порядка Mc^2/E , где E — полная энергия. Поэтому, если нас не интересуют очень тонкие детали



Фиг. 15.4. Представление излучения, испускаемого релятивистской частицей при соударении: а — в лабораторной системе координат (ядро покончается); б — в собственной системе координат K' (налетающая частица покончается).

явления, достаточно рассмотреть лишь полную энергию, излучаемую на данной частоте. Далее, обычно в процессе соударения (если исключить случаи очень близких соударений) налетающая частица испытывает лишь незначительное отклонение и теряет весьма малую долю своей энергии. В системе отсчета K' , относительно которой налетающая частица первоначально покончается, а ядро движется со скоростью $v \sim c$, движение налетающей частицы в течение всего времени соударения остается нерелятивистским. Поэтому в системе K' процесс излучения может быть описан чисто нерелятивистским образом. Связь между характеристиками излучения, наблюдавшегося в лабораторной системе координат и в системе отсчета K' , схематически представлена на фиг. 15.4.

Теперь мы можем почти полностью повторить все рассуждения, приведенные в § 1 и 2. Нужно лишь установить новые пределы изменения прицельных параметров. Из-за релятивистского сокращения полей (см. гл. 11, § 10) время соударения (11.120) уменьшается в γ раз, где $\gamma = E/Mc^2$. Поэтому значение максимального прицельного параметра будет равно [ср. (15.14)]

$$b_{\max} \approx \frac{\gamma v}{\omega'}, \quad (15.28)$$

где ω' — частота излучения в системе K' . Минимальное значение прицельного параметра в этом случае не равно предполагаемому

значению $\hbar/p = \hbar/\gamma Mv$, хотя эта величина и определяет «размазывание» частицы, обусловленное квантовыми эффектами. Правильное значение b_{\min} по-прежнему дается формулой (15.17), не содержащей множителя γ , в чем легко убедиться из следующего рассуждения. При излучении все элементы распределения заряда должны испытывать одинаковое ускорение в один и тот же момент времени. В противном случае интерференционные эффекты в сильной степени ослабят излучение. Поэтому излучение может быть значительным лишь в том случае, когда протяженность ускоряющего импульса, обусловленного полем пролетающего ядра, велика по сравнению с размером «размазанного» заряда. Протяженность импульса имеет величину порядка b/γ , тогда как поперечный размер области распределения заряда есть величина порядка $\hbar/\gamma Mv$. Отсюда следует, что и при релятивистском движении нижний предел возможных значений прицельного параметра определяется соотношением (15.17).

Используя выражения (15.11) и (15.12) и новые предельные значения прицельного параметра, получаем сечение излучения $\chi'(\omega')$ в системе K'

$$\chi'(\omega') \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda \gamma M v^2}{\hbar \omega'} \right). \quad (15.29)$$

Чтобы переписать полученный результат в лабораторной (нештрихованной) системе отсчета, необходимо знать трансформационные свойства сечения тормозного излучения и частоты. Размерность сечения излучения [площадь·энергия/частота]. Так как энергия и частота преобразуются при преобразовании Лоренца одинаковым образом, а поперечные размеры инвариантны, то сечение тормозного излучения лоренц-инвариантно

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega'). \quad (15.30)$$

Закон преобразования частоты определяется формулой релятивистского допплеровского смещения (11.38)

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \theta'), \quad (15.31)$$

где θ' — угол, под которым излучение испускается в системе K' . Сечение $\chi'(\omega')$ представляет собой *полное* сечение, полученное интегрированием по углам в системе K' . Так как ускорение в этой системе преимущественно поперечное, распределение излучения приблизительно симметрично относительно направления $\theta' = \pi/2$. Следовательно, в среднем $\omega = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \theta')$. Подставляя это значение ω

¹⁾ Этот результат можно получить непосредственно из первоначального преобразования (11.37) $\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)$. Действительно, при $\gamma \gg 1$ и $\theta \ll 1$ имеем $\omega' \approx (\omega/2\gamma) (1 + \gamma^2 \theta^2)$. Так как среднее значение $\gamma^2 \theta^2$ в лабораторной системе имеет порядок единицы, то $\omega' \approx \omega/\gamma$.

в (15.29), получаем для сечения тормозного излучения в лабораторной системе соотношение

$$\chi(\omega) \approx \frac{16 Z^2 e^2}{3 c} \left(\frac{Z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda \gamma^2 M v^2}{\hbar \omega} \right), \quad (15.32)$$

Эта формула отличается от нерелятивистской формулы (15.18) лишь множителем γ^2 в аргументе логарифма. Из закона сохранения энергии следует, что полученное выражение применимо лишь в области частот $0 < \hbar \omega < (\gamma - 1) Mc^2 \approx \gamma Mc^2$. Заметим, что кванты с энергией $Mc^2 \ll \hbar \omega \ll \gamma Mc^2$ в лабораторной системе соответствуют квантам $\hbar \omega' \ll Mc^2$ в системе K' .

Приведенный выше вывод выражения $\chi(\omega)$ в лабораторной системе координат несколько небрежен, так как не содержит строгого рассмотрения зависимости преобразованной частоты от угла. В действительности следовало бы рассмотреть *дифференциальное* сечение излучения в системе K' :

$$\frac{d\chi'(\omega')}{d\Omega'} = A \ln \left(\frac{\lambda \gamma M v^2}{\hbar \omega'} \right) \left[\frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta') \right], \quad (15.33)$$

где A — коэффициент при логарифме в формуле (15.32). Зависящее от угла выражение в квадратных скобках представляет собой сумму двух членов, соответствующих различным поляризациям [см. (15.9)], и нормировано так, чтобы интеграл по полному телесному углу был равен единице. Преобразуя (15.33) к лабораторной системе отсчета согласно (11.38), получаем

$$\frac{d\chi(\omega)}{d\Omega} \approx A \ln \left[\frac{2\lambda \gamma^2 M v^2}{\hbar \omega (1 + \gamma^2 \theta^2)} \right] \frac{3}{2\pi} \frac{\gamma^2 (1 + \gamma^4 \theta^4)}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^4}. \quad (15.34)$$

Угловое распределение имеет резкий максимум в направлении $\theta = 0$. Для $\theta \gamma \gg 1$ зависящий от угла множитель убывает как $(\theta \gamma)^{-4}$. Выражение (15.34), разумеется, неприменимо для углов $\theta \geq 1$. Однако определяемый им порядок величины верен: интенсивность излучения в обратном направлении в γ^4 раз меньше, чем в направлении вперед, и в пределе ($\theta = \pi$) достигает значения

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{d\chi(\omega)}{d\Omega} = \frac{3}{32\pi} \frac{A}{\gamma^2} \ln \left(\frac{\lambda M v^2}{2\hbar \omega} \right). \quad (15.35)$$

Так как почти все излучение сосредоточено в области углов $\theta \ll 1$, можно без большой ошибки приближенно представить элемент телесного угла в виде $d\Omega \approx 2\pi \theta d\theta = (\pi/\gamma^2) d(\gamma^2 \theta^2)$ и провести интегрирование в интервале $0 < \gamma^2 \theta^2 < \infty$. В результате для полного сечения излучения получим

$$\chi(\omega) = A \left[\ln \left(\frac{2\lambda \gamma^2 M v^2}{\hbar \omega} \right) - \frac{13}{12} \right], \quad (15.36)$$

что несущественно отличается от прежнего результата (15.32).

§ 4. Влияние экранирования.

Потери на излучение в релятивистском случае

До сих пор при рассмотрении тормозного излучения мы пренебрегали ролью атомных электронов. Их непосредственное влияние на ускорение налетающей частицы вполне можно не учитывать, так как величина соответствующего эффекта в Z раз меньше эффекта, обусловленного ядром. Однако электроны оказывают косвенное влияние, экранируя заряд ядра. Потенциальная энергия налетающей частицы в поле атома может быть приближенно описана выражением (13.94). Это означает, что при таких соударениях, когда прицельный параметр превышает радиус атома (13.95), излучение незначительно. Можно приближенно учесть этот эффект в предшествовавших вычислениях, определив максимальный прицельный параметр с учетом экранирования атомными электронами

$$b_{\max}^{(\text{экр})} \sim a \approx 1,4 \frac{a_0}{Z^{1/3}}. \quad (15.37)$$

При этом в аргументе логарифма следует использовать меньшую из величин b_{\max} , определяемых по формулам (15.28) и (15.37). Найдем отношение этих величин:

$$\frac{b_{\max}^{(\text{экр})}}{b_{\max}} \approx \frac{192}{Z^{1/3}} \left(\frac{v}{c} \right) \frac{\hbar \omega}{\gamma^2 m v^2}, \quad (15.38)$$

где m — масса электрона и использовано среднее значение частоты $\omega' = \omega/\gamma$. Отсюда видно, что для достаточно низких частот величина $b_{\max}^{(\text{экр})}$ всегда меньше значения b_{\max} , найденного с помощью соотношения (15.28). Отношение предельного значения частоты $\omega_{\text{экр}}$, ниже которого следует использовать параметр $b_{\max}^{(\text{экр})}$, к граничной частоте спектра $\omega_{\max} = (1/\hbar)(\gamma - 1)Mc^2$, равно

$$\frac{\omega_{\text{экр}}}{\omega_{\max}} \approx \frac{Z^{1/3}}{192} \left(\frac{m}{M} \right) \gamma \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2} \approx \begin{cases} \frac{2Z^{1/3}}{192} \frac{m}{M} \left(\frac{c}{v} \right), \\ \frac{Z^{1/3}}{192} \frac{m}{M} \gamma, \end{cases} \quad (15.39)$$

где верхнее значение соответствует нерелятивистской частице, а нижнее — релятивистской. При $\omega < \omega_{\text{экр}}$ аргумент логарифма в выражении (15.32) для сечения излучения перестает зависеть от частоты

$$\frac{b_{\max}^{(\text{экр})}}{b_{\min}} \approx \lambda \frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m} \frac{v}{c}. \quad (15.40)$$

Поэтому сечение тормозного излучения стремится к постоянной величине

$$\chi(\omega) \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \ln \left(\lambda \frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m} \frac{v}{c} \right) \quad (15.41)$$

при $\omega \ll \omega_{\text{экр}}$. Благодаря этому на низких частотах энергия, излучаемая в единичном интервале, остается конечной, а не расходится логарифмически. Совершенно аналогично при учете экранирования ликвидируется расходимость сечения рассеяния вида θ^{-4} , имеющая место для чисто кулоновского поля [см. (13.96)] при рассеянии на малые углы.

За исключением случая предельно низких скоростей, частота экранирования $\omega_{\text{экр}}$ очень мала по сравнению с нерелятивистским значением $\omega_{\text{макс}}$. Так, $\omega_{\text{экр}}/\omega_{\text{макс}} \approx 0,07$ для электронов с кинетической энергией 100 кэВ, падающих на мишень из золота ($Z = 79$). Для более тяжелых нерелятивистских частиц отношение еще меньше. Это означает, что в нерелятивистском случае изображенные на фиг. 15.3 спектральные зависимости изменятся лишь на очень малых частотах.

Для ультрарелятивистских частиц экранирование может быть «полным». Полное экранирование возникает при $\omega_{\text{экр}} > \omega_{\text{макс}}$. Это имеет место при энергии, превышающей некоторое критическое значение

$$E_{\text{экр}} = \left(\frac{192M}{Z^{1/3}m} \right) Mc^2. \quad (15.42)$$

Для электронов $E_{\text{экр}} \approx 42$ МэВ в алюминии ($Z = 13$) и 23 МэВ в свинце ($Z = 82$). Соответствующие величины для μ -мезонов составляют $2 \cdot 10^6$ и 10^6 МэВ. Из-за наличия множителя M/m влияние экранирования существенно лишь для электронов. При $E > E_{\text{экр}}$ сечение тормозного излучения на всех частотах имеет постоянную величину (15.41). На фиг. 15.5 изображены кривая сечения тормозного излучения (15.41) в предельном случае полного экранирования и соответствующая кривая по теории Бете — Гайтлера. Квантовомеханическое рассмотрение, проведенное этими авторами, приводит к дополнительному коэффициенту, медленно меняющемуся от 1 при $\omega = 0$ до 0,75 при $\omega = \omega_{\text{макс}}$. Тормозное излучение электронной компоненты космических лучей и электронов на выходе ускорителей на большие энергии соответствует предельному случаю полного экранирования. Поэтому в этих случаях спектральное распределение фотонов описывается типичной зависимостью $(\hbar\omega)^{-1}$.

В § 2 были рассмотрены потери на излучение в нерелятивистском случае и показано, что они пренебрежимо малы по сравнению с потерями энергии при соударениях. Для ультрарелятивистских

частиц и особенно электронов этот вывод уже не верен. В предельном случае $\gamma \gg 1$ потери на излучение определяются приближенной формулой

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dx} \approx \frac{16}{3} N \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \int_0^{\gamma M c^2 / \hbar} \ln \left(\frac{b_{\text{макс}}}{b_{\text{мин}}} \right) d\omega, \quad (15.43)$$

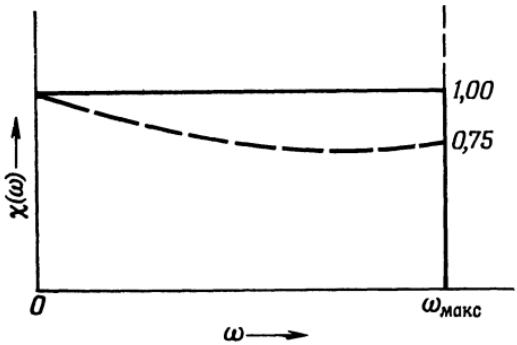
где вид аргумента логарифма зависит от того, какая из величин ω и $\omega_{\text{экр}}$ больше. При слабом экранировании ($\omega_{\text{экр}} \ll \omega_{\text{макс}}$) получаем приближенное выражение

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dx} \approx \frac{16}{3} N \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \ln(\lambda\gamma) \gamma Mc^2. \quad (15.44)$$

Для более высоких энергий, когда имеет место полное экранирование, полученное выражение заменяется формулой

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dx} \approx \left[\frac{16}{3} N \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda \cdot 192M}{Z^{1/3} m} \right) \right] \gamma Mc^2, \quad (15.45)$$

откуда видно, что при достаточно больших энергиях потери на излучение становятся пропорциональными энергии частиц.



Фиг. 15.5. Сечение тормозного излучения в предельном случае полного экранирования.

Постоянное значение сечения соответствует полуклассическому результату; пунктирная кривая соответствует квантовомеханическому расчету в борновском приближении.

Сравнение потерь на излучение с потерями при соударениях в последнем случае дает

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dE_{\text{сoud}}} \approx \frac{4}{3\pi} \left(\frac{Z z^2}{137} \right) \frac{m}{M} \frac{\ln(\lambda \cdot 192M / Z^{1/3} m)}{\ln B_{\text{KB}}} \gamma. \quad (15.46)$$

Значение γ , для которого это отношение равно единице, зависит от вида частиц и величины Z . Для электронов $\gamma \sim 200$ для воздуха и ~ 20 для свинца. При более высоких энергиях потери на тормозное излучение превышают потери за счет соударений, а для ультраквантитативистских частиц они представляют собой основной вид потерь.

При энергиях, для которых тормозное излучение является доминирующим, применима формула (15.45), соответствующая случаю полного экранирования. Здесь удобно ввести характерную единицу пути X_0 , называемую *радиационной длиной* и равную расстоянию, при прохождении которого энергия частицы убывает в e раз. Согласно закону сохранения энергии, можно переписать (15.45) в виде

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{X_0},$$

откуда следует, что

$$E(x) = E_0 e^{-x/X_0}, \quad (15.47)$$

где радиационная длина

$$X_0 = \left[\frac{16}{3} N \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda \cdot 192M}{Z^{1/3} m} \right) \right]^{-1}. \quad (15.48)$$

Для электронов, например, величина X_0 равна 32 г/см^2 (270 м) в воздухе при нормальных значениях температуры и давления; 19 г/см^2 ($7,2 \text{ см}$) в алюминии и $4,4 \text{ г/см}^2$ ($0,39 \text{ см}$) в свинце¹⁾. При рассмотрении прохождения космических лучей или искусственно ускоренных частиц больших энергий через вещество удобно использовать понятие радиационной длины X_0 , так как ею определяются не только потери энергии, но и образование электрон-позитронных пар излученными фотонами и тем самым все развитие каскадных электронных ливней.

§ 5. Метод виртуальных фотонов Вейцзеккера — Вильямса

При рассмотрении испускания тормозного излучения и других процессов, при которых имеет место электромагнитное взаимодействие релятивистских частиц, физическая интерпретация явлений значительно облегчается при применении так называемого *метода виртуальных фотонов*. В этом методе используется сходство поля движущейся заряженной частицы с импульсом электромагнитного поля (см. гл. 11, § 10) и устанавливается связь между эффектами, возникающими при соударениях релятивистской заряженной частицы с некоторой системой, и соответствующими эффектами, обусловленными взаимодействием излучения (виртуальных фотонов) с этой же системой. Метод был независимо разработан в 1934 г. Вейцзеккером и Вильямсом.

¹⁾ Приведенные значения отличаются приблизительно на 20—30% от данных Росси [87], который при вычислениях использовал более точные коэффициенты: 4 вместо $16/3$ и Z ($Z + 1$) вместо Z^2 в (15.48).

В любом процессе соударения имеются «налетающая частица» и «система, испытывающая удар» (рассеивающая система). Возмущающее действие полей налетающей частицы заменяется эквивалентным импульсом излучения, который можно представить в виде спектрального разложения по виртуальным фотонам. Затем вычисляется взаимодействие фотонов (рассеяние или поглощение) с рассеивающей системой. Таким образом устанавливается связь между взаимодействием заряженных частиц и взаимодействием фотонов. В приводимой ниже таблице указано, какой радиационный процесс соответствует тому или иному виду взаимодействия налетающей и рассеянной частиц.

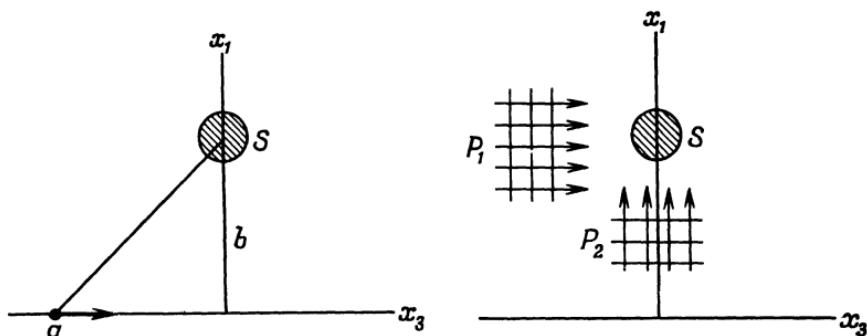
Соответствие между взаимодействием частиц и радиационными процессами

Тип взаимодействия частиц	Налетающая частица	Рассеивающая система	Соответствующий радиационный процесс	b_{\min}
Тормозное излучение при соударениях электрона (или легкой частицы) с ядром	Ядро	Электрон (легкая частица)	Рассеяние виртуальных фотонов кулоновского поля ядра на электроне (легкой частице)	\hbar/Mv
Ионизация атомов при соударениях (при дальних соударениях)	Ионизирующая частица	Атом	Освобождение атомных электронов виртуальными фотонами	a
Расщепление ядер	Электрон	Ядро	Фоторасщепление ядер виртуальными фотонами	
Рождение π -мезонов в электрон-ядерных соударениях	Электрон	Ядро	Фоторождение π -мезонов при взаимодействии виртуальных фотонов с ядрами	{ Большая из величин $\hbar/\gamma mv$ и R }

Как видно из таблицы, рассеивающая система не всегда совпадает с лабораторной мишенью. При рассмотрении тормозного излучения рассеивающей системой следует считать более легкую из соударяющихся частиц, так как для нее мощность излучения больше. При тормозном излучении в электрон-электронных столкновениях,

как следует из симметрии задачи, необходимо брать сумму двух полей, поочередно считая каждый из электронов рассеивающей системой, покоящейся в начальный момент в некоторой системе координат.

Метод виртуальных фотонов основан на предположении о том, что эффекты, обусловленные различными спектральными компонентами эквивалентного излучения, складываются некогерентно. Это утверждение справедливо в том случае, когда возмущение, обусловленное



Фиг. 15.6. Релятивистская заряженная частица, пролетающая вблизи от рассеивающей системы S , и эквивалентный импульс излучения.

полями, можно считать малым, и непосредственно связано с принятым в § 2 допущением о малом смещении рассеивающей частицы за время соударения.

Спектральное распределение электромагнитного поля, эквивалентного налетающей частице с зарядом q и скоростью $v \approx c$, проходящей на прицельном расстоянии b от рассеивающей системы S , можно найти из выражений для полей, приведенных в гл. 11, § 10:

$$\begin{aligned} E_1(t) &= q \frac{\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ B_2(t) &= \beta E_1(t), \\ E_3(t) &= -q \frac{\gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (15.49)$$

При $\beta \approx 1$ поля $E_1(t)$ и $B_2(t)$ полностью эквивалентны волновому пакету P_1 линейно поляризованного излучения, падающему на систему S в направлении x_3 , как показано на фиг. 15.6. В выражения (15.49) не входит магнитное поле, которое образовало бы вместе с полем $E_3(t)$ волновой пакет P_2 , падающий в направлении x_1 . Тем не менее если движение заряженной частицы вблизи системы S в выбранных координатах является нерелятивистским, то можно добавить требуемое магнитное поле и образовать импульс P_2 .

При этом мы не изменим физической картины, так как частицы системы S реагируют лишь на электрическое поле. Даже в том случае, когда частицы системы S подвержены действию магнитных сил, добавочное магнитное поле, которое мы вводим, заменяя поле $E_3(t)$ импульсом излучения P_2 , все равно не имеет существенного значения, поскольку относительное влияние P_2 , как будет показано, всегда мало.

Как следует из гл. 14, § 5, и в частности из соотношений (14.51), (14.52) и (14.60), спектральная плотность энергии эквивалентного импульса излучения P_1 (поток энергии через единичную площадку в единичном интервале частот) дается выражением

$$I_1(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E_1(\omega)|^2, \quad (15.50)$$

где $E_1(\omega)$ — фурье-амплитуда (14.54) поля $E_1(t)$, определяемого соотношением (15.49). Аналогично спектральное распределение для импульса излучения P_2 имеет вид

$$I_2(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E_3(\omega)|^2. \quad (15.51)$$

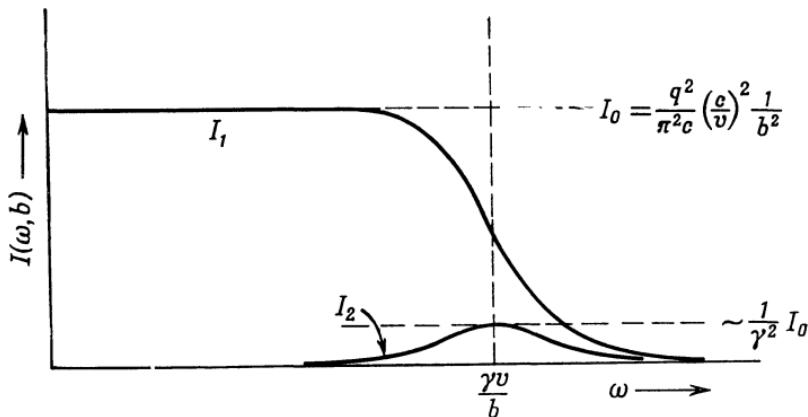
Соответствующие интегралы Фурье были вычислены в гл. 13 [см. (13.29) и (13.30)]. Таким образом, спектральные распределения можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} I_1(\omega, b) \\ I_2(\omega, b) \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \frac{1}{b^2} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right)^2 K_1^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right), \\ \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right)^2 K_0^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right). \end{array} \right. \quad (15.52)$$

Мы видим, что выражение для интенсивности импульса излучения P_2 содержит множитель γ^{-2} ; таким образом, для ультракрэлиативистских частиц влияние этого импульса мало. Качественно полученные спектральные распределения изображены на фиг. 15.7. Вид кривых легко понять, вспомнив, что распределение электромагнитного поля для импульса излучения P_1 имеет колоколообразную форму с характерной шириной $\Delta t \sim b/\gamma v$. Поэтому спектр излучения содержит все частоты вплоть до максимальной ω_{\max} , которая имеет величину порядка $1/\Delta t$. С другой стороны, поле импульса P_2 близко по форме к волне синусоиды с частотой $\omega \sim \gamma v/b$. Поэтому его спектр состоит из узкой области частот с центром вблизи $\gamma v/b$.

При исследовании соударений следует просуммировать спектральные распределения (15.52) по различным возможным значениям прицельных параметров. В результате получим величину энергии эквивалентного поля излучения, приходящегося на единичный интервал частоты. Как всегда в подобных задачах, необходимо определить минимальное значение прицельного параметра

b_{\min} . Метод виртуальных фотонов дает хорошие результаты лишь в том случае, когда можно выбрать такое значение b_{\min} , что для $b > b_{\min}$ эффекты, обусловленные налетающей частицей, можно с достаточной точностью заменить эффектами, вызванными эквивалентным импульсом излучения, тогда как при малых b влияние полей частиц пренебрежимо мало или может быть учтено каким-либо другим способом. Предположим, что мы каким-то образом



Фиг. 15.7. Частотные спектры двух эквивалентных импульсов излучения.

определили соответствующее значение b_{\min} . Тогда спектральное распределение интенсивности можно проинтегрировать по всем возможным прицельным параметрам:

$$I(\omega) = 2\pi \int_{b_{\min}}^{\infty} [I_1(\omega, b) + I_2(\omega, b)] b db. \quad (15.53)$$

Здесь учтено влияние обоих импульсов излучения P_1 и P_2 . Это интегрирование уже было проведено в гл. 13, § 3 [см. (13.35)]. В результате получаем

$$I(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left\{ x K_0(x) K_1(x) - \frac{v^2}{2c^2} x^2 [K_1^2(x) - K_0^2(x)] \right\}, \quad (15.54)$$

где

$$x = \frac{\omega b_{\min}}{\gamma v}. \quad (15.55)$$

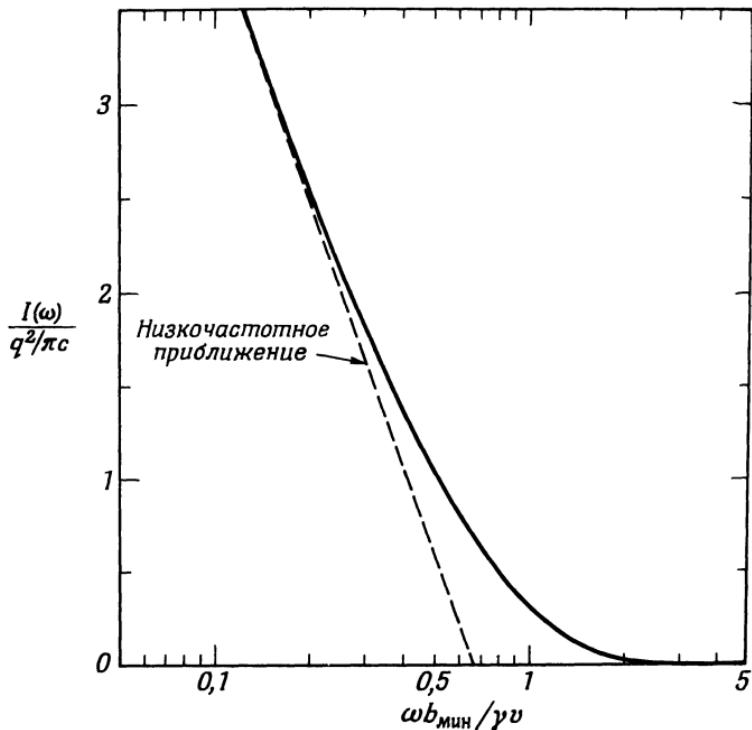
На низких частотах $\omega \ll \gamma v / b_{\min}$ энергия излучения в единичном интервале частот принимает вид

$$I(\omega) \approx \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[\ln \left(\frac{1,123 \gamma v}{\omega b_{\min}} \right) - \frac{v^2}{2c^2} \right]; \quad (15.56)$$

на высоких частотах $\omega \gg \gamma v / b_{\min}$ интенсивность излучения экспоненциально спадает

$$I(\omega) \approx \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) e^{-2(\omega b_{\min}/\gamma v)}. \quad (15.57)$$

На фиг. 15.8 изображены зависимость $I(\omega)$ по (15.54) для случая $v \approx c$ и кривая, соответствующая низкочастотному приближению (15.56). Видно, что спектральное распределение интенсивности



Фиг. 15.8. Спектральное распределение виртуальных фотонов для релятивистской частицы.

Энергия в единичном интервале частот отнесена к $q^2/\pi c$, частота — к $\gamma v / b_{\min}$. Число виртуальных фотонов в единичном интервале энергии можно получить, разделив значение ординаты на $\hbar \omega$.

содержит главным образом низкочастотные фотоны и имеет хвост, простирающийся до частот порядка $2\gamma v / b_{\min}$.

Число $N(\hbar\omega)$ виртуальных фотонов данной частоты, приходящихся на единичный интервал энергии, определяется соотношением

$$I(\omega) d\omega = \hbar\omega N(\hbar\omega) d(\hbar\omega). \quad (15.58)$$

Для предельного случая низких частот оно равно

$$N(\hbar\omega) \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{q^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{c}{v} \right)^2 \frac{1}{\hbar\omega} \left[\ln \left(\frac{1,123\gamma v}{\omega b_{\min}} \right) - \frac{v^2}{2c^2} \right]. \quad (15.59)$$

Остановимся теперь на вопросе о выборе минимального прицельного параметра b_{\min} . Для тормозного излучения, как отмечалось в § 3, $b_{\min} = \hbar/Mv$, где M — масса более легкой частицы. В задаче об ионизации атомов при соударениях $b_{\min} \approx a$, т. е. совпадает с радиусом атома; более близкие соударения следует рассматривать как соударения налетающей частицы со свободными электронами. В случае расщепления ядер электронами или рождения мезонов при взаимодействии ядер с электронами $b_{\min} = \hbar/\gamma Mv$ или $b_{\min} = R$ (радиус ядра) в зависимости от того, какая из этих величин больше. Указанные величины b_{\min} приведены в таблице на стр. 572.

§ 6. Тормозное излучение как рассеяние виртуальных фотонов

Испускание тормозного излучения при соударении налетающей частицы, имеющей заряд ze и массу M , с атомным ядром с зарядом Ze , можно рассматривать как рассеяние виртуальных фотонов кулоновского поля ядра на налетающей частице в системе координат K' , относительно которой налетающая частица покойится. Спектральное распределение виртуальных фотонов определяется соотношением (15.54), где $q = Ze$. Минимальное значение прицельного параметра равно \hbar/Mv , так что спектр частот занимает область вплоть до $\omega' \sim \gamma Mc^2/\hbar$.

Рассеяние виртуальных фотонов на налетающей частице (она является рассеивающим препятствием в системе отсчета K') на малых частотах определяется томсоновским эффективным сечением (14.105), а при энергиях фотонов $\hbar\omega' \geqslant Mc^2$ — формулой Клейна — Нишины (14.106). Таким образом, на частотах ω' , малых по сравнению с Mc^2/\hbar , сечение тормозного излучения $\chi'(\omega')$ в системе отсчета K' определяется формулой

$$\chi'(\omega') \approx \frac{8\pi}{3} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 I(\omega'). \quad (15.60)$$

Так как спектр виртуальных фотонов простирается до частот порядка $\gamma Mc^2/\hbar$, в области $\omega' < Mc^2/\hbar$ можно воспользоваться приближенным выражением (15.56) для $I(\omega')$. Это дает для сечения тормозного излучения значение

$$\chi'(\omega') \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2} \right)^2 \left[\ln \left(\frac{\lambda \gamma Mc^2}{\hbar \omega'} \right) - \frac{1}{2} \right], \quad (15.61)$$

где движение считается ультрапрелиativистским ($v \approx c$).

Полученное выражение для сечения тормозного излучения практически совпадает с (15.29) и может быть преобразовано в лабораторную систему координат совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 3. Формулы (15.60) и (15.61), полученные при

использовании томсоновского сечения рассеяния, справедливы лишь для квантов с частотами $\omega' \leqslant Mc^2/\hbar$ в системе K' . Для частот $\omega' \geqslant Mc^2/\hbar$ следует заменить постоянное сечение рассеяния Томсона (14.105) квантовомеханическим значением по формуле Клейна — Нишины (14.106), быстро убывающим с ростом частоты. Это означает, что в системе K' частоты тормозного излучения лежат в области $0 < \omega' \leqslant Mc^2/\hbar$, хотя сам спектр виртуальных фотонов кулоновского поля ядра простирается до гораздо более высоких частот. Физически ограничение спектра в системе K' вытекает из закона сохранения энергии, так как в лабораторной системе отсчета, где $\omega = \gamma\omega'$, спектр частот ограничен областью $0 < \omega < \gamma Mc^2/\hbar$. Детальный расчет с учетом углового распределения излучения по формуле Клейна — Нишины приводит к сечению тормозного излучения, полностью согласующемуся с формулами Бете — Гайтлера (Вейцзеккер, 1934 г.).

Влияние эффекта экранирования на спектр тормозного излучения может быть также учтено методом Вейцзеккера — Вильямса. Спектр виртуальных фотонов для экранированного кулоновского потенциала отличается от (15.56) тем, что аргумент логарифма заменяется на константу, как мы видели в § 4.

Рассмотрение дальнейших применений метода виртуальных фотонов в таких задачах, как ионизация атомов в соударениях и расщепление ядер электронами, мы отнесем к задачам в конце главы.

§ 7. Излучение при бета-распаде

В процессе β -распада происходит спонтанное превращение нестабильных ядер с атомным номером Z в ядра с атомным номером $(Z \pm 1)$, сопровождаемое испусканием электрона ($\mp e$) и нейтрино. Этот процесс символически можно записать следующим образом:

$$Z \rightarrow (Z \pm 1) + e^{\mp} + \nu. \quad (15.62)$$

Освобождающаяся в процессе распада энергия почти полностью распределяется между электроном и нейтрино; на долю ядра отдачи из-за его очень большой массы приходится совершенно незначительная часть энергии. Даже не зная, почему и как происходит β -распад, можно предполагать, что внезапное образование быстро движущихся заряженных частиц должно сопровождаться испусканием излучения. Как уже отмечалось в вводных замечаниях к данной главе, можно либо представлять себе, что первоначально покинувшийся электрон интенсивно ускоряется в течение короткого интервала времени, либо считать, что в течение того же интервала времени происходит быстрое «включение» заряда. Тяжелое ядро получает незначительное ускорение и поэтому его излучение несущественно.

Для расчета примем, что при $t = 0$ в начале координат возникает электрон, обладающий постоянной скоростью $\mathbf{v} = c\beta$. В этом случае, согласно (14.67), угловое и спектральное распределение интенсивности излучения определяется зависимостью

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_0^\infty \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta) \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right] \right\} dt \right|^2. \quad (15.63)$$

Так как вектор β постоянен, то $\mathbf{r}(t) = c\beta t$. При этом угловое распределение интенсивности излучения принимает вид

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \beta^2 \sin^2 \theta \left| \int_0^\infty e^{i\omega(1-\beta \cos \theta)t} dt \right|^2, \quad (15.64)$$

где угол θ отсчитывается от направления движения испускаемого электрона. Отсюда

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \beta^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}, \quad (15.65)$$

а интенсивность полного излучения в единичном интервале частот описывается соотношением

$$I(\omega) = \frac{e^2}{\pi c} \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right]. \quad (15.66)$$

При $\beta \ll 1$ формула (15.66) принимает вид $I(\omega) \approx 2e^2\beta^2/3\pi c$, откуда видно, что для β -частиц низкой энергии излучение незначительно.

Спектральное распределение интенсивности (15.66) является типичным спектром тормозного излучения; число фотонов в единичном интервале энергии равно

$$N(\hbar\omega) = \frac{e^2}{\pi \hbar c} \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right) \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right]. \quad (15.67)$$

Это излучение называют иногда *внутренним тормозным излучением* в отличие от тормозного излучения той же самой β -частицы при прохождении через вещество. Может показаться, что в противоречии с законом сохранения энергии спектр простирается в бесконечность. Качественное согласие с законом сохранения энергии можно получить, учитя принцип неопределенности. На фиг. 15.9 качественно изображена зависимость скорости электрона от времени.

Наше вычисление основано на скачкообразном изменении скорости за бесконечно малое время ускорения τ . Однако, как известно, согласно принципу неопределенности при заданной неопределенности в энергии ΔE неопределенность во времени не может быть меньше $\Delta t \sim \hbar/\Delta E$. При рождении β -частицы $\Delta E = E = \gamma mc^2$, так что время τ должно быть по порядку величины равным \hbar/E . Это дает

для границы спектра частот значение $\omega_{\max} \sim E/\hbar$, что по крайней мере качественно согласуется с требованием, налагаемым законом сохранения энергии.

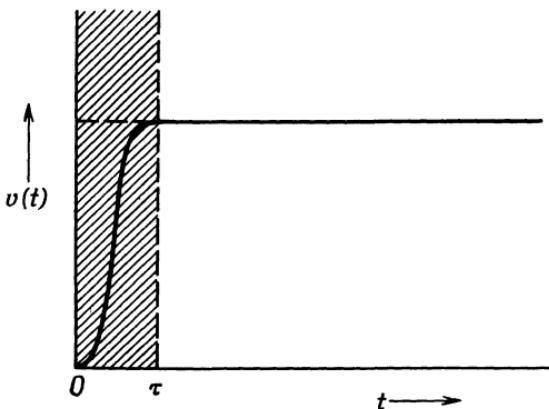
Полная энергия излучения приближенно описывается соотношением

$$E_{\text{изл}} = \int_0^{\omega_{\max}} I(\omega) d\omega \approx \frac{e^2}{\pi \hbar c} \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right] E. \quad (15.68)$$

Для очень быстрых частиц отношение энергии излучения к энергии частицы равно

$$\frac{E_{\text{изл}}}{E} \approx \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left[\ln \left(\frac{2E}{mc^2} \right) - 1 \right]. \quad (15.69)$$

Отсюда видно, что энергия излучения составляет лишь очень малую долю полной энергии, выделяемой при β -распаде, даже



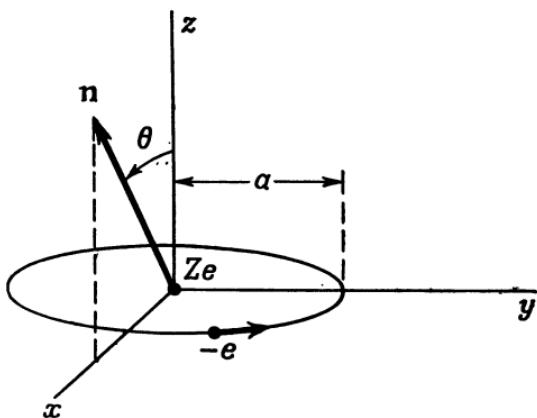
Ф и г. 15.9.

в наиболее интенсивных β -процессах ($E_{\max} \sim 30 \text{ mc}^2$). Тем не менее испускаемое излучение может наблюдаться и представляет большой интерес для физиков-ядерщиков.

В реальном процессе β -распада выделяемая энергия распределяется между электроном и нейтрино, так что электроны характеризуются непрерывным спектром энергии, простирающимся до некоторой максимальной частоты. Поэтому спектр излучения (15.66) следует усреднить по энергетическому распределению β -частиц. Кроме того, учет квантовомеханических эффектов приводит к изменениям вблизи верхней границы спектра фотонов. Таковы важнейшие поправки, которые нужно учесть для количественного сравнения теории с экспериментом. Однако общий характер излучения и полукачественное его описание верно даются уже нашим классическим вычислением.

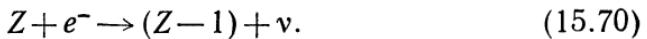
§ 8. Излучение при захвате орбитальных электронов. Исчезновение заряда и магнитного момента

При β -распаде внезапное рождение быстрого электрона приводит к возбуждению излучения. К аналогичному результату приводит исчезновение орбитального электрона при его захвате ядром. Захват орбитального электрона представляет собой процесс, в котором орбитальный электрон, движущийся вокруг нестабильного



Ф и г. 15.10.

ядра с атомным номером Z , захватывается ядром, в результате чего оно превращается в ядро нового вида с атомным номером ($Z - 1$). При этом одновременно испускается нейтрин, уносящее избыток энергии. Символически этот процесс можно записать следующим образом:



Так как в отсутствие излучения энергию распада уносят практически неуловимые нейтрино, то спектр фотонов, излучаемых при захвате орбитальных электронов, является важным источником информации о выделяемой энергии.

Рассмотрим упрощенную модель, в которой атомный электрон движется с постоянной угловой частотой ω_0 по круговой орбите радиусом a . Орбита лежит в плоскости xy , как показано на фиг. 15.10, причем ядро расположено в центре окружности. Направление наблюдения задано вектором n , который лежит в плоскости xz и характеризуется полярным углом θ . Скорость электрона равна

$$\mathbf{v}(t) = -\mathbf{e}_1 \omega_0 a \sin(\omega_0 t + \alpha) + \mathbf{e}_2 \omega_0 a \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (15.71)$$

где α — произвольная постоянная фаза. Пусть электрон исчезает в момент $t = 0$. Тогда спектральное распределение интенсивности излучения (14.67) может быть приближенно представлено в виде

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^0 \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{v}(t)] e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (15.72)$$

Эта формула получена в предположении $(\omega a/c) \ll 1$ (дипольное приближение); в этом случае экспоненциальный множитель, учитывающий запаздывание, можно заменить единицей. Интеграл в выражении (15.72) можно переписать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^0 (\dots) dt = -\omega_0 a (\mathbf{e}_\perp I_1 + \mathbf{e}_\parallel I_2 \cos\theta), \quad (15.73)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^0 \cos(\omega_0 t + \alpha) e^{i\omega t} dt, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^0 \sin(\omega_0 t + \alpha) e^{i\omega t} dt, \end{aligned} \quad (15.74)$$

а \mathbf{e}_\perp и \mathbf{e}_\parallel — единичные векторы поляризации, соответственно нормальный и параллельный плоскости, проходящей через \mathbf{n} и ось z . Интегралы берутся элементарно, и в результате распределение интенсивности принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} &= \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c^3} \frac{\omega_0^2 a^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \times \\ &\times [(\omega^2 \cos^2 \alpha + \omega_0^2 \sin^2 \alpha) + \cos^2 \theta (\omega^2 \sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha)]. \end{aligned} \quad (15.75)$$

Так как электрон может быть захвачен в любой точке орбиты, необходимо провести усреднение по всем фазовым углам α , что дает

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\omega_0 a}{c} \right)^2 \frac{\omega^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (15.76)$$

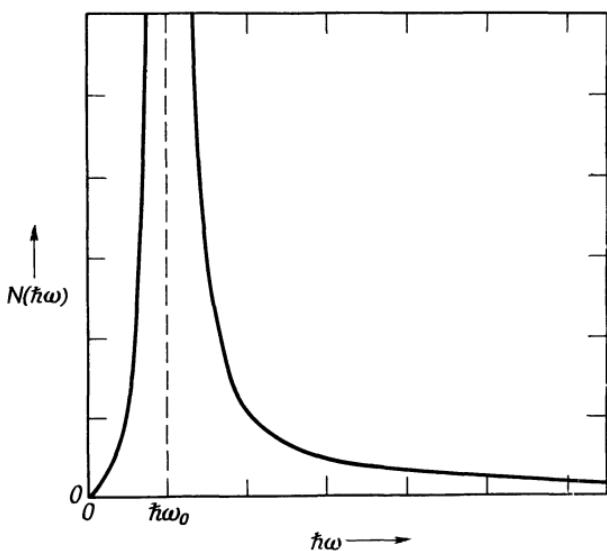
Полная энергия излучения в единичном интервале частот определяется выражением

$$I(\omega) = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c} \left(\frac{\omega_0 a}{c} \right)^2 \left[\frac{\omega^2 (\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right], \quad (15.77)$$

а число фотонов в единичном интервале энергии равно

$$N(\hbar\omega) = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{\omega_0 a}{c} \right)^2 \left[\frac{\omega^2 (\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right] \frac{1}{\hbar\omega}. \quad (15.78)$$

Для $\omega \gg \omega_0$ выражение в квадратных скобках стремится к единице и спектр принимает вид, характерный для тормозного излучения. Однако при $\omega \approx \omega_0$ интенсивность резко возрастает (в нашем приближении до бесконечности). На фиг. 15.11 изображено спектральное распределение числа фотонов. Наличие особой точки при $\omega = \omega_0$ может показаться странным, однако ее следовало ожидать. Действительно, если электрон все время находится на орбите,



Фиг. 15.11. Спектральное распределение фотонов, излучаемых в результате исчезновения заряда электрона при захвате орбитального электрона.

то его спектр излучения представляет собой резкую спектральную линию при $\omega = \omega_0$. Внезапное прекращение периодического движения приводит к уширению спектрального распределения в окрестности характеристической частоты.

С точки зрения квантовой механики излучение происходит при виртуальном радиационном переходе электрона из состояния с $l = 1$ (главным образом с $2p$ -орбиты) в состояние с $l = 0$, в котором он может быть поглощен ядром. Поэтому частоту ω_0 следует отождествить с характерной частотой рентгеновского спектра, соответствующей переходу $2p \rightarrow 1s$, т. е. $\hbar\omega_0 \approx 3Z^2e^2/8a_0$. Аналогично радиус орбиты фактически определяется соответствующим дипольным моментом. Принимая для оценки $a \approx a_0/Z$, где a_0 — боровский радиус, получаем для спектра фотонов (15.78)

$$N(\hbar\omega) \approx \frac{3}{32\pi} Z^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \frac{1}{\hbar\omega} \left[\frac{\omega^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right]. \quad (15.79)$$

Наиболее существенными характеристиками спектрального распределения являются наличие резкого максимума в области рентгеновского спектра и зависимость от квадрата атомного номера Z^2 .

До сих пор рассматривалось излучение, сопровождающее исчезновение заряда орбитального электрона в процессе электронного захвата. Но электрон, кроме заряда, обладает еще магнитным моментом. Исчезновение магнитного момента также приводит к появлению излучения, спектр которого имеет совершенно иной характер. Спектральное и угловое распределение интенсивности излучения, обусловленного движущимся точечным магнитным моментом, определяется формулой (14.74). Вектор магнитного момента электрона можно считать постоянным до момента исчезновения $t = 0$. Тогда в дипольном приближении распределение интенсивности излучения определяется выражением

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^0 \mathbf{n} \times \boldsymbol{\mu} e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (15.80)$$

Отсюда получаем

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \boldsymbol{\mu}^2 \sin^2 \Theta, \quad (15.81)$$

где Θ — угол между вектором $\boldsymbol{\mu}$ и направлением наблюдения \mathbf{n} .

При полуклассическом рассмотрении можно считать, что магнитный момент электрона равен по величине $\boldsymbol{\mu} = \sqrt{3} (e\hbar / 2mc)$, но может наблюдаться лишь его проекция $\mu_z = \pm (e\hbar / 2mc)$ на произвольную ось. Примем, например, что момент прецессирует вокруг этой оси, составляя с ней угол $\alpha = \arctg \sqrt{2}$, в результате чего в среднем отличной от нуля оказывается лишь составляющая момента вдоль оси. Как легко показать, при усреднении $\sin^2 \Theta$ в (15.81) с учетом этой прецессии получаем величину $2/3$ независимо от направления наблюдения. В результате выражение для распределения интенсивности по углам и частотам принимает вид

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{8\pi^2 c} \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^2. \quad (15.82)$$

Полная энергия излучения в единичном интервале частот определяется выражением

$$I(\omega) = \frac{e^2}{2\pi c} \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^2, \quad (15.83)$$

а соответствующее число фотонов в единичном интервале энергии равно

$$N(\hbar\omega) = \frac{e^2}{2\pi\hbar c} \frac{\hbar\omega}{(mc^2)^2}. \quad (15.84)$$

Полученные спектральные выражения характеризуются совершенно иной зависимостью от частоты, чем спектр тормозного излучения. С ростом частоты спектральная интенсивность неограниченно увеличивается. Конечно, классические результаты можно считать справедливыми лишь в предельном случае низких частот. Можно считать, что и в данной задаче, как и при рассмотрении излучения при β -распаде (см. § 7), применимы соображения, основанные на принципе неопределенности, так что во всяком случае обеспечивается выполнение закона сохранения. Фактически приходится вводить поправку, учитывающую, что процесс захвата орбитального электрона всегда сопровождается испусканием нейтрино. Как можно показать, вероятность испускания нейтрино пропорциональна квадрату его энергии E_ν . Если фотон не испускается, то вся энергия распада сообщается нейтрино: $E_\nu = E_0$. Однако если происходит излучение фотона с энергией $\hbar\omega$, то энергия нейтрино уменьшается до значения $E'_\nu = E_0 - \hbar\omega$. При этом вероятность испускания нейтрино снижается в $(E_\nu/E'_\nu)^2$ раз, причем

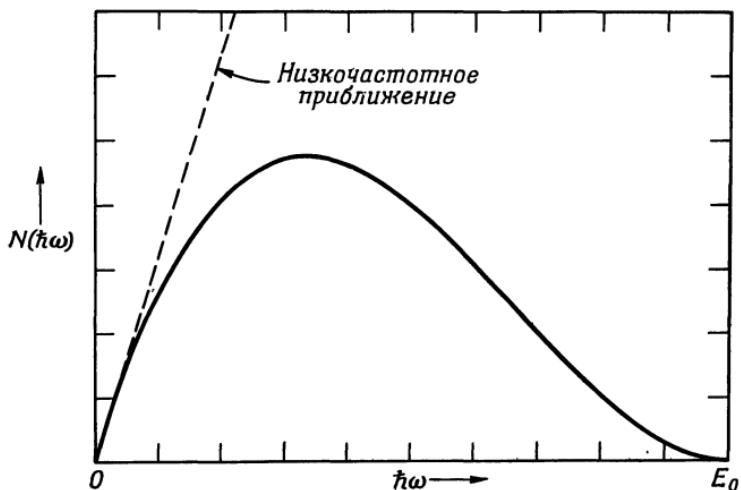
$$\left(\frac{E_\nu}{E'_\nu}\right)^2 = \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E_0}\right)^{-2}. \quad (15.85)$$

Поэтому в полученные классические спектральные распределения (15.83) и (15.84) следует ввести поправку, умножив их на коэффициент (15.85), учитывающий кинематику испускания нейтрино. С учетом этой поправки классический фотонный спектр принимает вид

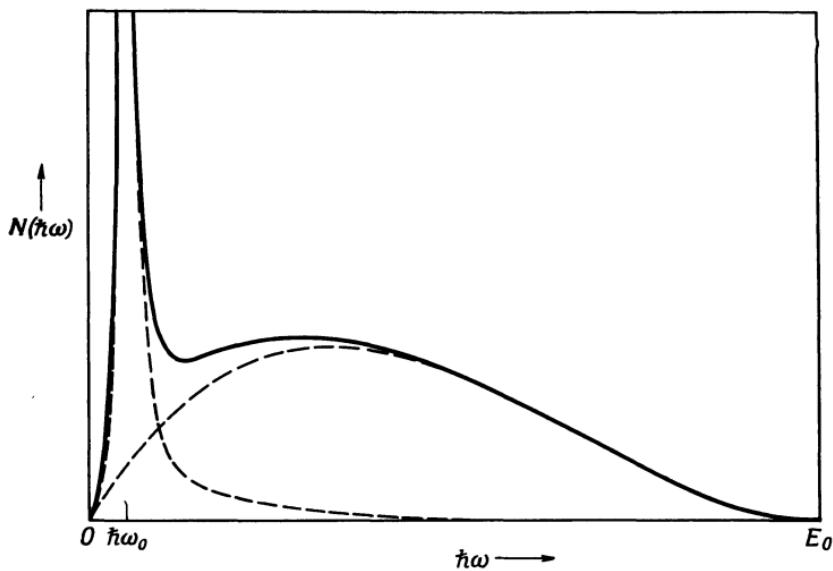
$$N(\hbar\omega) = \frac{e^2}{c^2 2\pi\hbar c} \frac{\hbar\omega}{(mc^2)^2} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E_0}\right)^2. \quad (15.86)$$

Это выражение фактически совпадает с точным квантовомеханическим результатом. Исправленное спектральное распределение (15.86) и распределение, описываемое неисправлением классическим выражением (15.84), сопоставлены на фиг. 15.12. Очевидно, учет вероятности испускания нейтрино принципиально важен для получения правильной картины распределения фотонов по энергиям. Для обычного тормозного излучения аналогичные поправки менее важны, так как большая часть фотонов обладает энергиями, гораздо меньшими максимально допустимой величины.

Полное излучение, испускаемое при захвате орбитального электрона, определяется суммой вкладов, обусловленных исчезновением электрического заряда и магнитного момента. В соответствии с различным характером зависимостей (15.79) и (15.86) в высокочастотном конце спектра преобладает излучение, связанное с магнитным моментом, если только освобождаемая энергия не очень мала, в то время как в низкочастотной части спектра доминирует слагаемое, обусловленное исчезновением электриче-



Ф и г. 15.12. Спектральное распределение фотонов, излучаемых в результате исчезновения магнитного момента электрона при захвате орбитального электрона.



Ф и г. 15.13. Типичное спектральное распределение фотонов, излучаемых при захвате орбитального электрона, сопровождающееся выделением энергии E_0 .

Пунктирными кривыми изображены слагаемые, обусловленные исчезновением заряда электрона и его магнитного момента.

ского заряда, особенно для атомов с большим Z . На фиг. 15.13 изображено типичное полное спектральное распределение фотонов для атомов с $Z \sim 20 - 30$. Наблюдения, выполненные на большом числе различных ядер, подтверждают общие особенности найденных спектральных распределений и позволяют определять величину освобождаемой энергии E_0 .

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Краткое классическое рассмотрение тормозного излучения проведено в курсах Ландау и Либшица [63], гл. 9, § 4, и Пановского и Филиппа [78], гл. 19. Полуклассическое исследование, аналогичное нашему, но гораздо более сжатое, приведено в книге Росси [87], гл. 2, § 12.

Строго говоря, теория тормозного излучения требует применения квантовомеханического описания. Последнее можно найти, например, в книге Гайтлера [50]. Метод виртуальных фотонов (метод Вейцзеккера — Вильямса) достаточно хорошо описан лишь в одной работе, а именно в классической статье Вильямса [117]. Краткое изложение метода имеется в книгах Гайтлера [50] и Пановского и Филиппа [78], гл. 18, § 5.

Квантовомеханическое исследование излучения при β -распаде и сравнение результатов с данными эксперимента можно найти в работах Чанга и Фалькова [27], Мартина и Глаубера [71] и в статье Ву в книге под редакцией Зигбана [94].

ЗАДАЧИ

15.1. Нерелятивистская частица с зарядом e и массой m соударяется с покоящейся гладкой жесткой сферой радиусом R . Считая соударение упругим, показать, что в дипольном приближении (в пренебрежении эффектами запаздывания) классическое выражение для дифференциального сечения излучения фотонов в единицу телесного угла в единичном интервале энергии имеет вид

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d(\hbar\omega)} = \frac{R^2}{12\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \frac{1}{\hbar\omega} (2 + 3 \sin^2 \theta),$$

где угол θ отсчитывается от направления падения. Построить угловое распределение излучения. Найти полное сечение тормозного излучения интегрированием по всем углам. Какой фактор (или факторы) определяет верхнюю границу частотного спектра излучения?

15.2. Две частицы с зарядами q_1 и q_2 и массами m_1 и m_2 соударяются под действием электромагнитных (или каких-либо других) сил. Рассмотреть угловое и спектральное распределение излучения, сопровождающего соударение.

а) Показать, что при нерелятивистском движении энергия, излучаемая в единичном интервале частот в единицу телесного угла, для системы ЦМ выражается формулой

$$\frac{dI(\omega, \Omega)}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int e^{-i\omega t} \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{n} \left\{ \frac{q_1}{m_1} \exp \left[i \frac{\omega}{c} \frac{\mu}{m_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}(t) \right] - \right. \right. - \frac{q_2}{m_2} \exp \left[-i \frac{\omega}{c} \frac{\mu}{m_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}(t) \right] \left. \right\} dt \right|^2,$$

где $\mathbf{x} = (x_1 - x_2)$ — вектор, определяющий относительное положение частиц, \mathbf{n} — единичный вектор в направлении наблюдения, $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса.

б) С помощью разложения по времени запаздывания показать, что для двух частиц с одинаковой величиной отношения заряда к массе (например, дейтрана и α -частицы) основной (дипольный) член обращается в нуль, а член следующего порядка малости равен

$$\frac{dI(\omega, \Omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^5} \left(\frac{q_1 \mu^2}{m_1^2} + \frac{q_2 \mu^2}{m_2^2} \right)^2 \left| \int e^{-i\omega t} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) (\ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{n}) dt \right|^2.$$

в) Сопоставить результат, полученный в п. «б», с разложением по мультипольям, приведенным в гл. 9, § 1—3.

15.3. Пусть взаимодействие двух одинаковых точечных частиц с зарядом q и массой m характеризуется отталкиванием на близком расстоянии, эквивалентным столкновению с жесткой сферой радиусом R . Пренебрегая электромагнитным взаимодействием между двумя частицами, определить в первом неисчезающем приближении сечение излучения в системе ЦМ при соударении эквивалентных частиц. Показать, что дифференциальное сечение излучения фотонов в единицу телесного угла в единичном интервале энергии имеет вид

$$\frac{d^2\sigma}{d(\hbar\omega)d\Omega} = \frac{R^2}{60\pi} \left(\frac{q^2}{\hbar c} \right) \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{R}{\hbar c} \right)^2 \hbar\omega \left[1 + \frac{5}{14} P_2(\cos\theta) - \frac{3}{28} P_4(\cos\theta) \right],$$

где угол θ отсчитывается от направления падения. Сравнить полученную зависимость от частоты, относительную величину сечения и т. п. с результатом решения задачи 15.1.

15.4. Частица с зарядом ze , массой m и нерелятивистской скоростью v отклоняется полем с экранированным кулоновским потенциалом $V(r) = -Zze^2e^{-\alpha r}/r$ и в результате этого излучает. Рассмотреть излучение в приближении прямолинейного движения частицы мимо силового центра.

а) Показать, что при прицельном параметре b энергия, излученная в единичном интервале частот при $\omega \ll v/b$, определяется формулой

$$I(\omega, b) = \frac{8}{3\pi} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \alpha^2 K_1^2(ab)$$

и пренебрежимо мала для $\omega \gg v/b$.

б) Показать, что сечение излучения равно

$$\chi(\omega) \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{c}{v} \right)^2 \left[\frac{x^2}{2} \left(K_0^2(x) - K_1^2(x) + \frac{2K_0(x)K_1(x)}{x} \right) \right]_{x_1}^{x_2},$$

где $x_1 = \alpha b_{\min}$, $x_2 = \alpha b_{\max}$.

в) Определить сечение излучения в двух предельных случаях $x_2 \ll 1$ и $x_2 \gg 1$ при $b_{\min} = \hbar/mv$, $b_{\max} = v/\omega$ и $\alpha^{-1} = 1.4a_0 Z^{-1/3}$. Сравнить полученные результаты с приведенными в тексте формулами для случаев наличия и отсутствия экранирования.

15.5. Частица с зарядом ze , массой m и скоростью v движется в фиксированном отталкивающем кулоновском поле с потенциалом $V(r) = Zze^2/r$ по гиперболической траектории. Показать в нерелятивистском дипольном приближении (без дальнейших предположений), что

а) интенсивность излучения частицы с начальным значением прицельного параметра b в единичном интервале частот определяется выражением $I(\omega, b) =$

$$= \frac{8}{3\pi} \frac{(zea\omega)^2}{c^3} e^{-\pi\omega/\omega_0} \left\{ \left[K'_{i\omega/\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]^2 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} \left[K_{i\omega/\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]^2 \right\}.$$

б) сечение излучения равно

$$\chi(\omega) = \frac{16}{3} \frac{(zeav)^2}{c^3} e^{-\pi\omega/\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0} K_{i\omega/\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \left[-K'_{i\omega/\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right].$$

в) полученное сечение излучения в предельном случае $\omega \ll \omega_0$ переходит в приведенное в этой главе выражение для сечения классического тормозного излучения. Найти предельное выражение для случая $\omega \gg \omega_0$.

г) Как изменятся результаты для кулоновского поля притяжения? Гиперболическая траектория может быть описана уравнениями

$$x = a(\varepsilon + ch \xi), \quad y = -b sh \xi, \quad \omega_0 t = \xi + \varepsilon sh \xi,$$

где $a = Zze^2/mv^2$, $\varepsilon = \sqrt{1 + (b/a)^2}$, $\omega_0 = v/a$.

15.6. С помощью метода виртуальных фотонов установить связь между сечением реакции фоторасщепления ядер и реакции расщепления ядер электронами.

а) Показать, что для электронов с энергиями $E = \gamma mc^2 \gg mc^2$ сечение реакции расщепления выражается приближенной формулой

$$\sigma_{\text{эл}}(E) \approx \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \int_{\omega_T}^{E/\hbar} \sigma_{\text{фот}}(\omega) \ln \left(\frac{k\gamma^2 mc^2}{\hbar\omega} \right) \frac{d\omega}{\omega},$$

где $\hbar\omega_T$ — пороговая энергия процесса.

б) Считая, что $\sigma_{\text{фот}}(\omega)$ имеет резонансный характер

$$\sigma_{\text{фот}}(\omega) \approx \frac{A}{2\pi} \frac{e^2}{Mc} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2},$$

где ширина Γ мала по сравнению с величиной $(\omega_0 - \omega_T)$, построить качественную зависимость $\sigma_{\text{эл}}(E)$ от энергии E и показать, что при $E \gg \hbar\omega_0$

$$\sigma_{\text{эл}}(E) \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{Ae^2}{Mc} \frac{1}{\omega_0} \ln \left(\frac{kE^2}{mc^2 \hbar \omega_0} \right).$$

в) Сравнить результаты экспериментов Брауна и Вильсона [23] по возбуждению ядер тормозным излучением и моноэнергетическими электронами и показать, что введенная там величина $F_{\text{exp}}(Z, E)$ приблизительно равна $8\pi/3$ при больших энергиях, если для описания обоих процессов используется спектральное распределение Вейцзеккера — Вильямса, а сечение реакции фоторасщепления имеет резонансную форму.

15.7. Быстрая частица с зарядом ze , массой M и скоростью v соударяется с водородоподобным атомом, состоящим из одного электрона с зарядом $-e$ и массой m , связанного с центральным ядром, имеющим заряд Ze . Все соударения можно разделить на два типа: близкие соударения, при которых частица проходит сквозь атом ($b < d$), и дальние соударения, когда частица пролетает вне атома ($b > d$). За радиус атома d можно принять величину a_0/Z . При близких соударениях взаимодействие падающей частицы с электроном можно рассматривать как проблему соударения двух тел и рассчиты-

вать передаваемую энергию, исходя из сечения рассеяния Резерфорда. При дальних соударениях возбуждение и ионизацию атома можно считать результатом фотоэлектрического эффекта под действием виртуальных фотонов, связанных с полем налетающей частицы.

Будем для простоты считать, что для фотонов с энергией Q , превышающей ионизационный потенциал I , сечение фотоэффекта равно

$$\sigma_\gamma(Q) = \frac{8\pi^2}{137} \left(\frac{a_0}{Z} \right)^2 \left(\frac{I}{Q} \right)^3.$$

(При этом справедлив эмпирический закон $Z^4\lambda^3$ для поглощения рентгеновских лучей, а численный коэффициент выбран так, чтобы выполнялось правило дипольных сумм $\int \sigma_\gamma(Q) dQ = 2\pi^2 e^2 \hbar / mc$.)

а) Вычислить сечения передачи энергии Q при близких и дальних соударениях (выделить, где это возможно, зависимость от Q/I и использовать единицы $2\pi^2 e^2 / mv^2 I^2$). Построить оба распределения при $Q/I > 1$ для нерелятивистского движения налетающей частицы, считая $1/2mv^2 = 103I$.

б) Показать, что число дальних соударений намного превышает число близких, но передача энергии за одно соударение гораздо меньше. Показать, что потери энергии приблизительно поровну делятся между обоими типами соударений, и убедиться, что получающиеся полные потери фактически совпадают с результатом расчета по формуле Бете (13.44).

15.8. При распаде неподвижного π -мезона образуются μ -мезон и нейтрино. Освобождающаяся при этом полная кинетическая энергия равна $(m_\pi - m_\mu)c^2 = 34$ Мэв. Кинетическая энергия μ -мезона 4,1 Мэв. Определить число квантов, излучаемых в единичном интервале энергии при мгновенном рождении μ -мезона. Считая, что излучение фотонов происходит лишь по нормали к направлению движения μ -мезона (в действительности угловое распределение описывается функцией $\sin^2 \theta$), показать, что максимальная энергия фотона равна 17 Мэв. Определить число квантов, излучаемых с энергией, большей 0,1 от максимального значения, и сравнить найденный результат с величиной, экспериментально наблюдаемой при распаде π -мезона на μ -мезон и нейтрино (см. [44, 81]).

15.9. При внутренней конверсии ядро совершает переход из одного состояния в другое и испускает орбитальный электрон. Кинетическая энергия электрона равна разности между энергией перехода и энергией связи электрона. Определить число излученных в единичном интервале энергии квантов для конверсионной линии с энергией 1 Мэв при мгновенном испускании электрона. У какой части электронов энергия меньше чем 99% полной энергии? Можно ли экспериментально наблюдать этот низкоэнергетический хвост конверсионной линии?