

Глава 16

ПОЛЯ МУЛЬТИПОЛЕЙ

В гл. 3 и 4, посвященных электростатике, при исследовании задач с определенными свойствами симметрии относительно начала координат широко использовалось разложение потенциала по сферическим гармоникам. Этот метод полезен не только при решении граничных задач в сферической системе координат, он вообще дает систематический способ представления потенциала в виде разложения по мультипольным моментам плотности заряда при заданных источниках. Для электромагнитных полей, зависящих от времени, разложение по скалярным сферическим гармоникам можно обобщить, используя векторные сферические волны. Эти векторные сферические волны удобно применять при решении краевых задач электромагнитного поля, обладающих сферической симметрией, и при рассмотрении мультипольного излучения ограниченного распределения источников. Простейшие излучающие мультипольные системы уже рассматривались в гл. 9. В настоящей главе будет дано систематическое изложение этого вопроса.

§ 1. Собственные функции скалярного волнового уравнения

Исследование векторной волновой задачи со сферической симметрией мы начнем с решения скалярного волнового уравнения. Скалярное поле $\psi(x, t)$, удовлетворяющее однородному волновому уравнению

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (16.1)$$

можно разложить в интеграл Фурье по времени

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (16.2)$$

где каждая фурье-компоненты удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(x, \omega) = 0 \quad (16.3)$$

с $k^2 = \omega^2/c^2$. В задачах, обладающих симметрией относительно некоторого центра, удобно использовать фундаментальную систему решений в сферических координатах. В гл. 3 мы уже приводили оператор Лапласа в сферических координатах [см. (3.1)]. Разделяя переменные, зависящие от угла и радиуса, получаем известное разложение

$$\psi(x, \omega) = \sum_{l, m} f_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.4)$$

где сферические гармоники Y_{lm} определены соотношением (3.53). Радиальные функции $f_l(r)$ удовлетворяют радиальному уравнению

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_l(r) = 0. \quad (16.5)$$

С помощью подстановки

$$f_l(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} u_l(r) \quad (16.6)$$

можно привести уравнение (16.5) к виду

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right] u_l(r) = 0. \quad (16.7)$$

Это — уравнение Бесселя (3.75) порядка $v = l + 1/2$. Поэтому линейно независимые решения для $f_l(r)$ имеют вид

$$f_l(r) \approx \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(kr), \quad \frac{1}{\sqrt{r}} N_{l+1/2}(kr). \quad (16.8)$$

Обычно вводят так называемые *сферические функции Бесселя и Ханкеля*, обозначаемые через $j_l(x)$, $n_l(x)$, $h_l^{(1, 2)}(x)$ и определяемые следующими выражениями:

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \\ n_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x), \\ h_l^{(1, 2)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} [J_{l+1/2}(x) \pm iN_{l+1/2}(x)]. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Для действительных x функции $h_l^{(2)}(x)$ и $h_l^{(1)}(x)$ комплексно сопряжены. Как можно показать из разложений (3.82) и (3.83), имеют

место соотношения

$$\begin{aligned} j_l(x) &= (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(\frac{\sin x}{x} \right), \\ n_l(x) &= -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(\frac{\cos x}{x} \right). \end{aligned} \quad (16.10)$$

Явные выражения сферических функций для нескольких низших значений l имеют вид

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}, \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad h_0^{(1)}(x) = \frac{e^{ix}}{ix}, \\ j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}, \\ h_1^{(1)}(x) &= -\frac{e^{ix}}{x} \left(1 + \frac{i}{x} \right), \\ j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2}, \\ n_2(x) &= -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x - 3 \frac{\sin x}{x^2}, \\ h_2^{(1)}(x) &= \frac{ie^{ix}}{x} \left(1 + \frac{3i}{x} - \frac{3}{x^2} \right). \end{aligned} \quad (16.11)$$

Из приближенных представлений (3.89) — (3.91) следует, что при малых значениях аргумента $x \ll l$

$$\begin{aligned} j_l(x) &\approx \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \\ n_l(x) &\approx -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \end{aligned} \quad (16.12)$$

где $(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)(2l-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1$. При больших аргументах ($x \gg l$) имеем

$$\begin{aligned} j_l(x) &\approx \frac{1}{x} \sin \left(x - \frac{l\pi}{2} \right), \\ n_l(x) &\approx -\frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{l\pi}{2} \right), \\ h_l^{(1)}(x) &\approx (-i)^{l+1} \frac{e^{ix}}{x}. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Сферические функции Бесселя удовлетворяют следующим рекуррентным формулам:

$$\frac{2l+1}{x} z_l(x) = z_{l-1}(x) + z_{l+1}(x), \quad (16.14)$$

$$z'_l(x) = \frac{1}{2l+1} [lz_{l-1}(x) - (l+1)z_{l+1}(x)],$$

где $z_l(x)$ — любая из функций $j_l(x)$, $n_l(x)$, $h_l^{(1)}(x)$, $h_l^{(2)}(x)$. Определитель Вронского для пары различных сферических функций Бесселя имеет вид

$$W(j_l, n_l) = \frac{1}{\iota} W(j_l, h_l^{(1)}) = -W(n_l, h_l^{(1)}) = \frac{1}{x^2}. \quad (16.15)$$

Общее решение уравнения Гельмгольца (16.3) в сферических координатах можно записать как

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} [A_{lm}^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + A_{lm}^{(2)} h_l^{(2)}(kr)] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.16)$$

где коэффициенты $A_{lm}^{(1)}$ и $A_{lm}^{(2)}$ определяются граничными условиями.

В качестве примера найдем разложение по сферическим гармоникам функции Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, которая соответствует расходящейся волне и удовлетворяет во всем пространстве уравнению

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (16.17)$$

Как было показано в гл. 9, эта функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \quad (16.18)$$

Разложение функции $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ по сферическим гармоникам можно получить совершенно аналогично тому, как это было сделано при решении уравнения Пуассона в гл. 3, § 8 и 10 [см., в частности, выражения (3.117) и далее и (3.138) и далее]. Подставляя в уравнение (16.17) разложение

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l,m} g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.19)$$

получаем следующее уравнение для $g_l(r, r')$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] g_l = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r'). \quad (16.20)$$

Решение этого уравнения, ограниченное вблизи начала координат и представляющее расходящиеся волны на бесконечности, имеет вид

$$g_l(r, r') = A j_l(kr_<) h_l^{(1)}(kr_>). \quad (16.21)$$

Полагая $A = ik$, получаем правильное значение скачка производной. Окончательно приходим к следующему разложению для функции Грина:

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = ik \sum_{l=0}^{\infty} j_l(kr_<) h_l^{(1)}(kr_>) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (16.22)$$

До сих пор мы интересовались главным образом радиальными функциями, соответствующими скалярному волновому уравнению. Чтобы ввести некоторые понятия, используемые при решении векторного волнового уравнения, вернемся к рассмотрению угловых функций. Угловыми собственными функциями являются сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \phi)$ (3.53), удовлетворяющие уравнению

$$-\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}. \quad (16.23)$$

Как известно из квантовой механики, это уравнение можно представить в операторном виде

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}. \quad (16.24)$$

Дифференциальный оператор $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, где

$$\mathbf{L} = \frac{1}{i} (\mathbf{r} \times \text{grad}), \quad (16.25)$$

совпадает с оператором орбитального момента количества движения в волновой механике.

Составляющие оператора \mathbf{L} удобно выразить через величины

$$\begin{aligned} L_+ &= L_x + i L_y = e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ L_- &= L_x - i L_y = e^{-i\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (16.26)$$

Заметим, что оператор \mathbf{L} действует лишь на угловые переменные и не зависит от r . Из определения (16.25) очевидно, что справедливо операторное уравнение

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0. \quad (16.27)$$

Как легко проверить с помощью явных выражений (16.26), оператор L^2 действительно эквивалентен оператору в левой части уравнения (16.23).

Используя (16.26) и рекуррентные формулы для Y_{lm} , можно установить следующие полезные соотношения:

$$\begin{aligned} L_+ Y_{lm} &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} Y_{l,m+1}, \\ L_- Y_{lm} &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)} Y_{l,m-1}, \\ L_z Y_{lm} &= m Y_{lm}. \end{aligned} \quad (16.28)$$

Наконец, приведем еще следующие операторные уравнения, выражающие коммутативные свойства \mathbf{L} , L^2 и ∇^2 :

$$\begin{aligned} L^2 \mathbf{L} &= \mathbf{L} L^2, \\ \mathbf{L} \times \mathbf{L} &= i\mathbf{L}, \\ L_j \nabla^2 &= \nabla^2 L_j, \end{aligned} \quad (16.29)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r) - \frac{L^2}{r^2}. \quad (16.30)$$

§ 2. Разложение электромагнитных полей по мультиполям

В области, где источники отсутствуют, уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 0, & \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (16.31)$$

При гармонической зависимости величин от времени ($e^{-i\omega t}$) эти уравнения записываются в форме

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= ik\mathbf{B}, & \text{rot } \mathbf{B} &= -ik\mathbf{E}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 0, & \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (16.32)$$

Исключая из первых двух уравнений \mathbf{E} , приходим к следующим уравнениям для вектора \mathbf{B} :

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) \mathbf{B} &= 0, & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{и соотношению, определяющему } \mathbf{E}, \\ \mathbf{E} &= \frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{B}. \end{aligned} \right\} \quad (16.33)$$

Если же мы исключим вектор \mathbf{B} , то получим уравнения для вектора \mathbf{E} :

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} &= 0, & \text{div } \mathbf{E} &= 0 \\ \text{и добавочное соотношение, определяющее вектор } \mathbf{B}, \\ \mathbf{B} &= -\frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (16.34)$$

Совокупность трех формул (16.33) или (16.34) эквивалентна уравнениям Максвелла (16.32).

Определим теперь мультипольные поля **E** и **B**. Из (16.33) очевидно, что каждая декартова составляющая **B** удовлетворяет уравнению Гельмгольца (16.3). Поэтому общее решение для каждой составляющей **B** можно представить в виде (16.16). Объединяя эти выражения, приходим к векторному решению:

$$\mathbf{B} = \sum_{l, m} [\mathbf{A}_{lm}^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + \mathbf{A}_{lm}^{(2)} h_l^{(2)}(kr)] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.35)$$

где \mathbf{A}_{lm} — произвольные постоянные векторы.

Векторные коэффициенты \mathbf{A}_{lm} в (16.35) не вполне произвольны, поскольку должно выполняться условие обращения в нуль дивергенции $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Так как радиальные функции линейно независимы, то условие $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ должно порознь выполняться для обеих сумм в (16.35). Таким образом, коэффициенты \mathbf{A}_{lm} должны удовлетворять соотношению

$$\operatorname{div} \sum_{l, m} h_l(kr) \mathbf{A}_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0. \quad (16.36)$$

Оператор дивергенции может быть заменен операторным множителем

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r^2} \mathbf{r} \times \mathbf{L}, \quad (16.37)$$

где \mathbf{L} — оператор, определяемый согласно (16.25). Подставляя (16.37) в (16.36), приходим к условию

$$\mathbf{r} \cdot \sum_l \left[\frac{\partial h_l}{\partial r} \sum_m \mathbf{A}_{lm} Y_{lm} - \frac{ih_l}{r} \mathbf{L} \times \sum_m \mathbf{A}_{lm} Y_{lm} \right] = 0. \quad (16.38)$$

Из рекуррентных формул (16.14) очевидно, что в общем случае коэффициенты \mathbf{A}_{lm} с данным l связаны с коэффициентами $A_{l'm}$, где $l' = l \pm 1$. Эта связь отсутствует лишь в том случае, когда $(2l + 1)$ векторных коэффициента для каждого значения l подобраны так, что

$$\mathbf{r} \cdot \sum_m \mathbf{A}_{lm} Y_{lm} = 0. \quad (16.39)$$

В этом частном случае окончательное условие на коэффициенты накладывается вторым членом уравнения (16.38):

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{L} \times \sum_m \mathbf{A}_{lm} Y_{lm}) = 0. \quad (16.40)$$

Условие (16.39), означающее поперечность поля относительно радиуса-вектора, в сочетании с уравнением (16.40) позволяет однозначно определить системы векторных угловых функций порядка l для каждого заданного значения m . Эти функции могут

быть найдены непосредственно из (16.39) и (16.40) с учетом общих свойств функций Y_{lm} . Однако нетрудно заметить, что угловое решение имеет вид

$$\sum_{m'} \mathbf{A}_{lm'} Y_{lm'} = \sum_m a_{lm} \mathbf{L} Y_{lm}. \quad (16.41)$$

Из соотношения (16.27) видно, что условие поперечности поля (16.39) удовлетворяется. Аналогично, используя второе из коммутационных соотношений (16.29) и формулу (16.27), можно показать, что выполняется и второе условие (16.40). А то, что функции $f_l(r) \mathbf{L} Y_{lm}$ удовлетворяют волновому уравнению (16.3), следует из последнего соотношения (16.29).

Итак, принимая условие (16.39), мы приходим к следующей системе частных решений, или электромагнитных мультипольных полей:

$$\mathbf{B}_{lm} = f_l(kr) \mathbf{L} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (16.42)$$

$$\mathbf{E}_{lm} = \frac{i}{k} \operatorname{rot} \mathbf{B}_{lm},$$

где

$$f_l(kr) = A_l^{(1)} h_l^{(1)}(kr) + A_l^{(2)} h_l^{(2)}(kr). \quad (16.43)$$

Любая линейная комбинация этих полей с различными индексами l и m удовлетворяет системе уравнений (16.33). Характерной особенностью полученных решений является ортогональность вектора магнитной индукции радиусу-вектору ($\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_{lm} = 0$). Поэтому подобные волны не представляют общего решения уравнений (16.33). Это сферический аналог *поперечных магнитных* (TM), или, иначе говоря, *электрических* цилиндрических волн, рассмотренных в гл. 8.

Если бы мы исходили из системы уравнений (16.34), а не (16.33), мы пришли бы к другой системе мультипольных полей, в которой радиусу-вектору ортогонален вектор \mathbf{E} :

$$\mathbf{E}_{lm} = f_l(kr) \mathbf{L} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad | (16.44)$$

$$\mathbf{B}_{lm} = -\frac{i}{k} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{lm}.$$

Эти сферические волны являются аналогом *поперечных электрических* (TE), или *магнитных*, цилиндрических волн.

Точно так же, как в случае цилиндрических волноводов, можно показать, что полученные две системы мультипольных полей (16.42) и (16.44) образуют полную систему векторных решений уравнений Максвелла. Мы будем называть эти мультипольные поля

соответственно электрическими и магнитными (а не поперечно магнитными и т. п.), так как они определяются, как мы увидим, соответственно плотностью электрического заряда и распределением магнитного момента. Ввиду важной роли векторных сферических гармоник удобно ввести нормированные функции¹⁾

$$\mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (16.45)$$

с условием ортогональности

$$\int \mathbf{X}_{l'm'}^* \cdot \mathbf{X}_{lm} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (16.46)$$

Комбинируя оба типа полей, можно написать общее решение уравнений Максвелла (16.32) в виде

$$\mathbf{B} = \sum_{l,m} \left[a_E(l, m) f_l(kr) \mathbf{X}_{lm} - \frac{i}{k} a_M(l, m) \operatorname{rot}(g_l(kr) \mathbf{X}_{lm}) \right], \quad (16.47)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{l,m} \left[\frac{i}{k} a_E(l, m) \operatorname{rot}(f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}) + a_M(l, m) g_l(kr) \dot{\mathbf{X}}_{lm} \right],$$

где коэффициенты $a_E(l, m)$ и $a_M(l, m)$ определяют амплитуды электрических и магнитных мультипольных полей, соответствующих индексам (l, m) . Радиальные функции $f_l(kr)$ и $g_l(kr)$ имеют вид (16.43). Значения коэффициентов $a_E(l, m)$ и $a_M(l, m)$, так же как и амплитуды в (16.43), определяются источниками и граничными условиями.

§ 3. Свойства полей мультиполей. Энергия и момент количества движения мультипольного излучения

Прежде чем устанавливать связь общего решения уравнений (16.47) с характеристиками ограниченного распределения источников, исследуем свойства полей отдельных мультипольных гармоник (16.42) и (16.44). В ближней зоне ($kr \ll 1$) радиальная функция $f_l(kr)$ пропорциональна функции n_l , определяемой соотношением (16.12), если, конечно, коэффициент перед n_l не обращается в нуль. Не рассматривая этого случая, мы заключаем, что при $kr \rightarrow 0$ магнитное поле для электрического (l, m) -мультиполя стремится к значению

$$\mathbf{B}_{lm} \approx -\frac{k}{l} \mathbf{L} \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}, \quad (16.48)$$

¹⁾ Для $l = 0$ считаем, по определению, $\mathbf{X}_{l'm} = 0$. Сферически симметричные решения однородных уравнений Максвелла существуют лишь в предельном случае статики $k \rightarrow 0$.

где коэффициент пропорциональности выбран из соображений удобства последующих вычислений. Для нахождения электрического поля нужно вычислить ротор от правой части в (16.48). Приведем здесь полезное операторное тождество

$$i \operatorname{rot} \mathbf{L} = \mathbf{r} \nabla^2 - \operatorname{grad} \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (16.49)$$

Согласно (16.42), напряженность электрического поля имеет предельное значение

$$\mathbf{E}_{lm} \approx -\frac{i}{l} \operatorname{rot} \mathbf{L} \left(\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}} \right). \quad (16.50)$$

Так как функция Y_{lm}/r^{l+1} удовлетворяет уравнению Лапласа, то первое слагаемое в (16.49) равно нулю. Второй член в (16.49) эквивалентен в данном случае оператору $l \operatorname{grad}$. В результате получаем следующее выражение для напряженности электрического поля (l, m) -мультиполя электрического типа на близких расстояниях:

$$\mathbf{E}_{lm} \approx -\operatorname{grad} \left(\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}} \right). \quad (16.51)$$

Это поле в точности совпадает с полученным в гл. 4, § 1, электростатическим мультипольным полем. Заметим, что величина вектора магнитного поля \mathbf{B}_{lm} меньше величины электрического поля \mathbf{E}_{lm} в kr раз. Следовательно, в ближней зоне магнитное поле мультиполя электрического типа всегда гораздо меньше электрического поля. Для мультипольных полей магнитного типа [см. (16.44)], очевидно, векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} меняются ролями в соответствии с подстановкой

$$\mathbf{E}_E \rightarrow -\mathbf{B}_M, \quad \mathbf{B}_E \rightarrow \mathbf{E}_M. \quad (16.52)$$

В дальней, или волновой, зоне ($kr \gg 1$) вид полей мультиполей зависит от наложенных граничных условий. Для определенности рассмотрим случай расходящихся волн, соответствующий излучению ограниченного источника. При этом радиальная функция $f_l(kr)$ пропорциональна сферической функции Ханкеля $h_l^{(1)}(kr)$. Из асимптотических выражений (16.13) следует, что в волновой зоне магнитное поле электрического (l, m) -мультиполя принимает значение

$$\mathbf{B}_{lm} \approx (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \mathbf{L} Y_{lm}. \quad (16.53)$$

Электрическое поле можно представить в виде

$$\mathbf{E}_{lm} = \frac{(-i)^l}{k^2} \left[\operatorname{grad} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \mathbf{L} Y_{lm} + \frac{e^{ikr}}{r} \operatorname{rot} \mathbf{L} Y_{lm} \right]. \quad (16.54)$$

Так как мы уже воспользовались асимптотическими выражениями для сферических функций Ханкеля, было бы неоправданным удерживать степени $1/r$ выше первой. Учитывая это и используя тождество (16.49), получаем

$$\mathbf{E}_{lm} = -(-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \left[\mathbf{n} \times \mathbf{L} Y_{lm} - \frac{1}{k} (\mathbf{r} \nabla^2 - \text{grad}) Y_{lm} \right], \quad (16.55)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор, направленный вдоль радиуса. Второй член, равный произведению некоторой безразмерной функции углов на $1/kr$, очевидно, может быть опущен в предельном случае $kr \gg 1$. В результате для вектора напряженности электрического поля в волновой зоне получаем

$$\mathbf{E}_{lm} = \mathbf{B}_{lm} \times \mathbf{n}, \quad (16.56)$$

где вектор \mathbf{B}_{lm} дается соотношением (16.53). Эти выражения характерны для поля излучения, векторы которого нормальны радиусу и убывают с расстоянием по закону $1/r$. Для установления соответствующих соотношений для магнитных мультиполей достаточно воспользоваться подстановкой (16.52).

Мультипольным разложением поля, создаваемого источником излучения, удобно пользоваться для вычисления энергии и момента количества движения, уносимых излучением. Для определенности рассмотрим (l, m) -мультиполь электрического типа. Согласно (16.47), поля записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{lm} &= a_E(l, m) h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{lm} e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{E}_{lm} &= \frac{i}{k} \text{rot } \mathbf{B}_{lm}. \end{aligned} \quad (16.57)$$

Для монохроматических полей среднее по времени значение плотности энергии равно

$$u = \frac{1}{16\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*). \quad (16.58)$$

В волновой зоне оба слагаемых равны между собой. Следовательно, в сферическом слое между r и $r + dr$ (при $kr \gg 1$) заключена энергия

$$dU = \frac{|a_E(l, m)|^2}{8\pi} |h_l^{(1)}(kr)|^2 r^2 dr \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{X}_{lm} d\Omega. \quad (16.59)$$

Используя условие нормировки (16.46) и асимптотические выражения (16.13) для сферической функции Ханкеля, найдем

$$\frac{dU}{dr} = \frac{|a_E(l, m)|^2}{8\pi k^2}; \quad (16.60)$$

величина dU/dr не зависит от радиуса. Случай (l, m) -мультиполя магнитного типа отличается лишь заменой $a_E(l, m)$ на $a_M(l, m)$.

Среднее по времени значение плотности момента количества движения определяется выражением

$$\mathbf{m} = \frac{1}{8\pi c} \operatorname{Re} [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)]. \quad (16.61)$$

Раскрывая тройное векторное произведение и подставляя выражение (16.57) для электрического поля, получаем для мультиполя электрического типа

$$\mathbf{m} = \frac{1}{8\pi\omega} \operatorname{Re} [\mathbf{B}^* (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B})]. \quad (16.62)$$

Для момента количества движения излучения в сферическом слое между r и $r + dr$ получаем

$$d\mathbf{M} = \frac{|a_E(l, m)|^2}{8\pi\omega} |h_l^{(1)}(kr)|^2 r^2 dr \int \operatorname{Re} [\mathbf{X}_{lm}^*(\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_{lm})] d\Omega. \quad (16.63)$$

В волновой зоне (16.63) с учетом явных выражений (16.45) для \mathbf{X}_{lm} приводится к виду

$$\frac{d\mathbf{M}}{dr} = \frac{|a_E(l, m)|^2}{8\pi\omega k^2} \int \operatorname{Re} [Y_{lm}^* \mathbf{L} Y_{lm}] d\Omega. \quad (16.64)$$

Используя соотношения (16.28) для составляющих $\mathbf{L} Y_{lm}$ и ортогональность сферических гармоник, можно убедиться, что отлична от нуля лишь составляющая $d\mathbf{M}$ в направлении z , причем

$$\frac{dM_z}{dr} = \frac{m}{\omega} \frac{|a_E(l, m)|^2}{8\pi k^2}. \quad (16.65)$$

Сравнивая этот результат с величиной энергии излучения (16.60), получаем, что отношение z -составляющей момента количества движения к энергии равно

$$\frac{M_z}{U} = \frac{m}{\omega} = \frac{m\hbar}{\hbar\omega}. \quad (16.66)$$

Очевидная квантовая интерпретация этого соотношения состоит в том, что излучаемый (l, m) -мультиполем фотон с энергией $\hbar\omega$ уносит $m\hbar$ единиц z -составляющей момента количества движения. Продолжая квантовомеханическую аналогию, следует ожидать, что отношение абсолютного значения момента количества движения к энергии должно быть равно

$$\frac{M_{\text{кв}}}{U} = \frac{(M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)^{1/2}}{U} = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\omega}. \quad (16.67)$$

Однако из соотношений (16.64) и (16.65) следует классический результат

$$\frac{M_{\text{кл}}}{U} = \frac{|M_z|}{U} = \frac{|m|}{\omega}. \quad (16.68)$$

Это расхождение обусловлено квантовой природой электромагнитного поля отдельного фотона. Если z -составляющая момента количества движения точно определена, то, согласно принципу неопределенности, точные значения остальных составляющих неизвестны, а среднеквадратичное значение момента количества движения выражается формулой (16.67). Если же поле излучения содержит большое число фотонов (классический предел), то среднеквадратичные значения поперечных составляющих момента количества движения могут быть сколь угодно малыми по сравнению со среднеквадратичным значением составляющей вдоль оси z . В этом случае справедлив классический результат (16.68)¹⁾.

В квантовомеханической интерпретации величины излученного момента количества движения, приходящейся на один фотон в мультипольных полях, используются правила отбора для мультипольных переходов между квантовыми состояниями. Мультипольный переход порядка (l, m) связывает начальное квантовое состояние, характеризуемое полным моментом количества движения J и z -составляющей момента M , с конечным квантовым состоянием, для которого J' лежит в диапазоне $|J - l| \leq J' \leq J + l$ и $M' = M - m$. Наоборот, для двух состояний (J, M) и (J', M') возможны лишь такие мультипольные переходы порядка (l, m) , при которых $|J - J'| \leq l \leq (J + J')$ и $m = M - M'$.

Для завершения квантовомеханического описания мультипольного перехода остается установить, сохраняется или изменяется при переходе четность состояния. Четность начального состояния равна произведению четности конечного состояния на четность поля мультиполя. Для определения четности поля мультиполя достаточно рассмотреть поведение вектора магнитного поля \mathbf{B}_{lm} при преобразовании инверсии относительно центра ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$). Чтобы убедиться, что четность поля мультиполя определяется вектором \mathbf{B}_{lm} , напомним, что взаимодействие заряженной частицы и электромагнитного поля определяется скалярным произведением $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$. Вектор \mathbf{A}_{lm} обладает четностью, противоположной четности вектора \mathbf{B}_{lm} , так как применение оператора ротора изменяет четность. Поэтому, поскольку \mathbf{v} — нечетный полярный вектор, состояния, связанные оператором взаимодействия $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$, будут отличаться по четности на четность вектора магнитной индукции \mathbf{B}_{lm} .

¹⁾ Детальное обсуждение этого круга вопросов дано в статье [75]. В этой работе показано, что для поля мультиполя, содержащего N фотонов, квадрат момента количества движения равен $[N^2 m^2 + Nl(l+1) - m^2]\hbar^2$

Для мультиполей электрического типа магнитное поле дается выражением (16.57). Преобразование инверсии ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) эквивалентно замене ($r \rightarrow r, \theta \rightarrow \pi - \theta, \varphi \rightarrow \varphi - \pi$) в сферических координатах. Оператор \mathbf{L} инвариантен относительно преобразования инверсии. Следовательно, свойства четности \mathbf{B}_{lm} для мультиполей электрического типа определяются поведением функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Согласно (3.53) и (3.50), четность Y_{lm} равна $(-1)^l$. Таким образом, четность мультипольных полей электрического типа порядка (l, m) равна $(-1)^l$. В частности, четность вектора магнитного поля \mathbf{B}_{lm} равна $(-1)^l$, а четность электрического поля \mathbf{E}_{lm} равна $(-1)^{l+1}$, так как $\mathbf{E}_{lm} \sim \text{rot } \mathbf{B}_{lm}$.

Четность мультиполя магнитного типа порядка (l, m) равна $(-1)^{l+1}$. В этом случае напряженность электрического поля \mathbf{E}_{lm} выражается так же, как \mathbf{B}_{lm} для электрических мультиполей. Следовательно, четности полей мультиполей в данном случае противоположны четностям соответствующих мультипольных полей электрического типа того же порядка.

Связав изменения четности с изменениями момента количества движения при квантовом переходе, мы видим, что могут осуществляться лишь определенные комбинации мультипольных переходов. Так, например, для состояний с $J = 1/2$ и $J' = 3/2$ разрешены мультипольные переходы порядка $l = 1, 2$. Если четность обоих состояний одинакова, то условие сохранения четности ограничивает возможности перехода, так что оказываются возможными лишь магнитные дипольные переходы и электрические квадрупольные переходы. Для состояний с различной четностью могут иметь место электрические дипольные или магнитные квадрупольные переходы с излучением или поглощением.

§ 4. Угловое распределение мультипольного излучения

Для произвольного ограниченного распределения источников поле в волновой зоне описывается суперпозицией

$$\mathbf{B} \approx \frac{e^{ikr-i\omega t}}{kr} \sum_{l, m} (-i)^{l+1} [a_E(l, m) \mathbf{X}_{lm} + a_M(l, m) \mathbf{n} \times \mathbf{X}_{lm}], \quad (16.69)$$

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{B} \times \mathbf{n}.$$

Связь коэффициентов $a_E(l, m)$ и $a_M(l, m)$ со свойствами источника будет установлена в следующем параграфе. Среднее по времени значение мощности излучения в единицу телесного угла равно

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi k^2} \left| \sum_{l, m} (-i)^{l+1} [a_E(l, m) \mathbf{X}_{lm} \times \mathbf{n} + a_M(l, m) \mathbf{X}_{lm}] \right|^2. \quad (16.70)$$

Поляризация излучения определяется направлениями векторов, входящих под знак модуля. Мы видим, что угловые распределения излучения для мультипольных моментов электрического и магнитного типов с одинаковыми (l, m) совпадают, тогда как поляризация излучения в этих случаях отличается поворотом векторов на угол 90° . Таким образом, порядок мультиполя может быть определен из измерений углового распределения излучаемой мощности, а характер излучения (электрический или магнитный тип) можно установить лишь на основе поляризационных измерений.

Для отдельного мультиполя порядка (l, m) выражение для углового распределения (16.70) сводится к одному члену

$$\frac{dP(l, m)}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi k^2} |a(l, m)|^2 |\mathbf{X}_{lm}|^2. \quad (16.71)$$

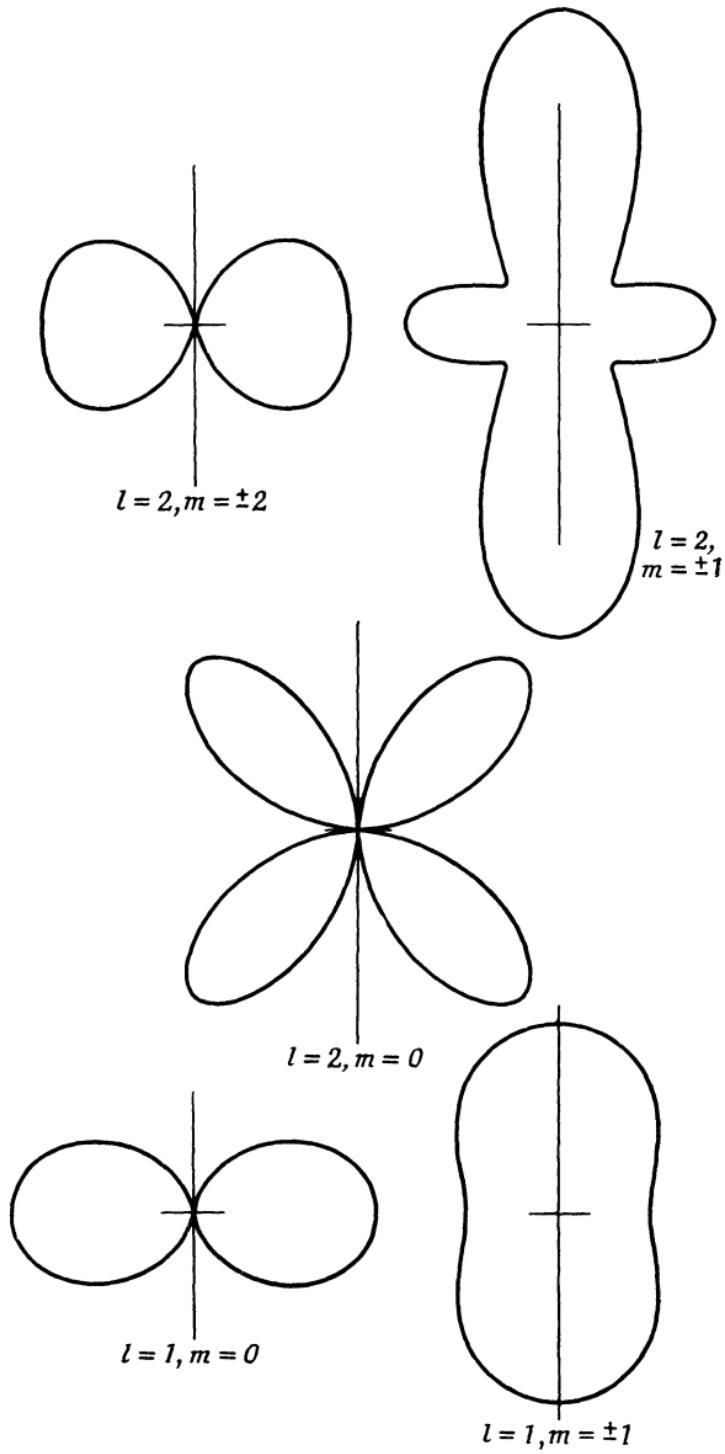
Используя определение (16.45) для \mathbf{X}_{lm} и соотношения (16.28), последнее выражение можно развернуть.

$$\begin{aligned} \frac{dP(l, m)}{d\Omega} = & \frac{c |a(l, m)|^2}{8\pi k^2 l(l+1)} \left\{ \frac{1}{2} (l-m)(l+m+1) |Y_{l, m+1}|^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (l+m)(l-m+1) |Y_{l, m-1}|^2 + m^2 |Y_{l, m}|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (16.72)$$

Простейшие угловые распределения представлены в следующей таблице.

	$ \mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi) ^2$		
	$m=0$	$m=\pm 1$	$m=\pm 2$
$l=1$ (диполь)	$\frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta$	$\frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta)$	
$l=2$ (квадруполь)	$\frac{15}{8\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$	$\frac{5}{16\pi} (1 - 3 \cos^2 \theta + 4 \cos^4 \theta)$	$\frac{5}{16\pi} (1 - \cos^4 \theta)$

Как ясно из таблицы, дипольные распределения соответствуют диполю, осциллирующему параллельно оси z ($m = 0$), или двум диполям, колеблющимся соответственно вдоль осей x и y со сдвигом фазы на 90° ($m = \pm 1$). На фиг. 16.1 представлены кривые распределения интенсивности дипольного и квадрупольного излучения в зависимости от полярного угла. Приведены угловые распределения мультиполей с $l = 1$ и $l = 2$. Общее распределение излучения



Фиг. 16.1. Распределение дипольного и квадрупольного излучения (диаграмма излучения).

мультиполя порядка l определяется, согласно (16.70), когерентной суперпозицией $(2l + 1)$ гармоник, соответствующих различным m .

С помощью формулы (3.69) легко убедиться, что квадраты модулей векторных сферических гармоник удовлетворяют правилу сумм

$$\sum_{m=-l}^l |\mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}. \quad (16.73)$$

Отсюда следует, что если источник состоит из набора мультиполей порядка l с коэффициентами $a(l, m)$, не зависящими от m , и излучение этих мультиполей складывается некогерентным образом, то угловое распределение излучения будет изотропным. Такое положение обычно имеет место в атомных и ядерных радиационных переходах, если начальное состояние системы не подобрано специальным образом.

Полная мощность излучения мультиполя порядка (l, m) определяется интегрированием выражения (16.71) по всем углам. Так как векторы \mathbf{X}_{lm} нормированы к единице, мощность излучения равна

$$P(l, m) = \frac{c}{8\pi k^2} |a(l, m)|^2. \quad (16.74)$$

В общем случае угловое распределение излучения источника определяется когерентной суммой (16.70). Как легко показать с помощью интегрирования по углам, интерференционные члены не дают вклада в полное излучение. Поэтому полная мощность излучения равна просто некогерентной сумме мощностей излучения отдельных мультиполей

$$P = \frac{c}{8\pi k^2} \sum_{l, m} [|a_E(l, m)|^2 + |a_M(l, m)|^2]. \quad (16.75)$$

§ 5. Источники мультипольного излучения. Мультипольные моменты

После того как рассмотрены свойства полей мультиполей, найдено угловое распределение излучения, найдена величина энергии излучения и момента количества движения, обратимся к установлению связи между полями и создающими их источниками. Пусть имеется ограниченное распределение заряда $q(x, t)$, тока $\mathbf{J}(x, t)$ и вектора намагниченности $\mathcal{M}(x, t)$. Будем, кроме того, считать, что все временные зависимости могут быть разложены в ряд или интеграл Фурье, и ограничимся рассмотрением источников, гармонически меняющихся во времени:

$$q(x) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{J}(x) e^{-i\omega t}, \quad \mathcal{M}(x) e^{-i\omega t} \quad (16.76)$$

(подразумевается, что мы берем действительную часть от соответствующих комплексных величин). Более общая зависимость от времени может быть получена линейной суперпозицией.

Так как мы рассматриваем случай, когда плотность намагниченности отлична от нуля, следует различать векторы **B** и **H**. Уравнения Максвелла в случае гармонических источников записываются в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= ik \mathbf{B}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} + ik \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi Q, \end{aligned} \quad (16.77)$$

а уравнение непрерывности имеет вид

$$i\omega Q = \operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (16.78)$$

Чтобы воспользоваться полученным выше представлением (16.47) общего решения однородных уравнений Максвелла, запишем уравнения относительно полей

$$\mathbf{B} \quad \text{и} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \mathbf{J}. \quad (16.79)$$

При этом мы придем к следующим двум системам уравнений, аналогичным системам (16.33) и (16.34):

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) \mathbf{B} &= -\frac{4\pi}{c} (\operatorname{rot} \mathbf{J} + c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathcal{M}), \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \mathbf{E}' = \frac{i}{k} (\operatorname{rot} \mathbf{B} - 4\pi \operatorname{rot} \mathcal{M}) \end{aligned} \quad (16.80)$$

и

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E}' &= -\frac{4\pi ik}{c} \left(c \operatorname{rot} \mathcal{M} + \frac{1}{k^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{J} \right), \\ \operatorname{div} \mathbf{E}' &= 0, \quad \mathbf{B} = -\frac{i}{k} \left(\operatorname{rot} \mathbf{E}' - \frac{4\pi i}{\omega} \operatorname{rot} \mathbf{J} \right). \end{aligned} \quad (16.81)$$

Для областей вне источников эти системы уравнений переходят, очевидно, в (16.33) и (16.34). Следовательно, общее решение для векторов **B** и **E'** вне источников имеет вид (16.47). Далее, даже в областях, содержащих источники, дивергенция обоих рассматриваемых полей равна нулю. Поэтому и здесь решения будут иметь вид (16.47) с той разницей, что изменится лишь вид радиальных функций $f_l(r)$ и $g_l(r)$, подобно тому как это имеет место в скалярных задачах, например в электростатике или волновой механике.

Рассмотрим, например, вектор магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \sum_{l, m} \left[f_{lm}(r) \mathbf{X}_{lm} - \frac{i}{k} \operatorname{rot} g_{lm}(r) \mathbf{X}_{lm} \right]. \quad (16.82)$$

Вне источников в соответствии с (16.57) и (16.69)

$$\begin{aligned} f_{lm}(r) &\approx a_E(l, m) h_l^{(1)}(kr), \\ g_{lm}(r) &\approx a_M(l, m) h_l^{(1)}(kr). \end{aligned} \quad (16.83)$$

Чтобы определить уравнение, которому удовлетворяет радиальная функция $f_{lm}(r)$ для мультиполей электрического типа в области, содержащей источники, подставим (16.82) в первое из уравнений системы (16.80), умножим скалярно обе стороны уравнения на вектор \mathbf{X}_{lm}^* и проинтегрируем по всем углам. В силу ортогональности все члены левой части уравнения, содержащие $g_{lm}(r)$, обращающиеся в нуль и остается лишь одно слагаемое, содержащее $f_{lm}(r)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_{lm}(r) = -\frac{4\pi}{c} \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot (\text{rot } \mathbf{J} + c \text{ rot rot } \mathcal{M}) d\Omega. \quad (16.84)$$

Подставляя аналогичное разложение для \mathbf{E}' в первое уравнение системы (16.81) и проводя такие же вычисления, приходим к уравнению для функции $g_{lm}(r)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] g_{lm}(r) = -4\pi ik \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \left(\text{rot } \mathcal{M} + \frac{1}{ck^2} \text{ rot rot } \mathbf{J} \right) d\Omega. \quad (16.85)$$

Полученные неоднородные уравнения для $f_{lm}(r)$ и $g_{lm}(r)$ можно решить методом функций Грина. Подходящая функция Грина, удовлетворяющая уравнению (16.20), определяется соотношением (16.21). Обозначив правую часть уравнения (16.84) через $-K_E(r)$, можно представить $f_{lm}(r)$ в виде

$$f_{lm}(r) = ik \int_0^\infty r'^2 j_l(kr_<) h_l^{(1)}(kr_>) K_E(r') dr'. \quad (16.86)$$

В области вне источников $r_< = r'$, а $r_> = r$, так что

$$f_{lm}(r) \approx ik h_l^{(1)}(kr) \int_0^\infty r'^2 j_l(kr') K_E(r') dr'. \quad (16.87)$$

Путем сравнения полученного выражения с (16.83) мы можем определить коэффициент $a_E(l, m)$ для мультиполя электрического типа. Подставляя в явном виде значение $K_E(r)$, определяемое правой частью уравнения (16.84), получаем

$$a_E(l, m) = \frac{4\pi ik}{c} \int j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}^* \cdot (\text{rot } \mathbf{J} + c \text{ rot rot } \mathcal{M}) d^3x. \quad (16.88)$$

Аналогично для коэффициента $a_M(l, m)$ для мультиполя магнитного типа получим

$$a_M(l, m) = -4\pi k^2 \int j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \left(\operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{1}{ck^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{J} \right) d^3x. \quad (16.89)$$

Выражения (16.88) и (16.89) можно преобразовать к более удобному виду с помощью тождества

$$\begin{aligned} & \int j_l(kr) \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} d^3x = \\ & = \frac{i}{V l(l+1)} \int Y_{lm}^* \left\{ \operatorname{div} \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] - k^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} j_l(kr) \right\} d^3x. \end{aligned} \quad (16.90)$$

Здесь \mathbf{A} — произвольный вектор с достаточно хорошими аналитическими свойствами, обращающийся на бесконечности в нуль быстрее, чем r^{-2} . Для доказательства тождества (16.90) выполним интегрирование по частям, в результате чего оператор ротора переносится на вектор \mathbf{X}_{lm} , применим операторное соотношение (16.49) и снова проинтегрируем по частям. Полагая \mathbf{A} равным \mathbf{J} , \mathbf{M} , $\operatorname{rot} \mathbf{J}$, $\operatorname{rot} \mathbf{M}$, можно преобразовать различные слагаемые в формулах (16.88) и (16.89) и прийти к окончательным выражениям

$$\begin{aligned} a_E(l, m) = & \frac{4\pi k^2}{i V l(l+1)} \int Y_{lm}^* \left\{ Q \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] + \right. \\ & \left. + \frac{ik}{c} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}) j_l(kr) - ik \operatorname{div} (\mathbf{r} \times \mathbf{M}) j_l(kr) \right\} d^3x \end{aligned} \quad (16.91)$$

и

$$\begin{aligned} a_M(l, m) = & \frac{4\pi k^2}{i V l(l+1)} \int Y_{lm}^* \left\{ \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{J}}{c} \right) j_l(kr) + \right. \\ & \left. + \operatorname{div} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] - k^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) j_l(kr) \right\} d^3x. \end{aligned} \quad (16.92)$$

Полученные формулы дают точные выражения для мультипольных коэффициентов, справедливые для произвольной частоты и любых размеров источника.

Для многих приложений в атомной и ядерной физике размеры источника очень малы по сравнению с длиной волны ($kr_{\max} \ll 1$). В этом случае выражения для мультипольных коэффициентов могут быть значительно упрощены. Для этого можно воспользоваться приближенными выражениями (16.12) для сферических функций Бесселя, справедливыми при малых значениях аргумента. Оставляя в разложениях лишь члены низшего порядка по kr в слагаемых, содержащих Q , \mathbf{J} и \mathbf{M} , получаем, что коэффициент для мультиполя электрического типа приближенно равен

$$a_E(l, m) \approx \frac{4\pi k^{l+2}}{i(2l+1)!!} \left(\frac{l+1}{l} \right)^{1/2} (Q_{lm} + Q'_{lm}), \quad (16.93)$$

где мультипольные моменты определяются равенствами

$$\begin{aligned} Q_{lm} &= \int r^l Y_{lm}^* d^3x, \\ Q'_{lm} &= -\frac{ik}{l+1} \int r^l Y_{lm}^* \operatorname{div} (\mathbf{r} \times \mathbf{M}) d^3x. \end{aligned} \quad (16.94)$$

Момент Q_{lm} совпадает, очевидно, с выражением (4.3) для электростатического мультипольного момента q_{lm} . Момент Q'_{lm} — наведенный электрический мультипольный момент, обусловленный наличием намагниченности. Величина его обычно по крайней мере в kr раз меньше момента Q_{lm} .

Выражение коэффициента $a_m(l, m)$ для мультиполя магнитного типа в длинноволновом приближении имеет вид

$$a_m(l, m) \approx \frac{4\pi ik^{l+2}}{(2l+1)!!} \left(\frac{l+1}{l} \right)^{1/2} (M_{lm} + M'_{lm}), \quad (16.95)$$

где магнитные мультипольные моменты определяются равенствами

$$\begin{aligned} M_{lm} &= -\frac{1}{l+1} \int r^l Y_{lm}^* \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{J}}{c} \right) d^3x, \\ M'_{lm} &= -\int r^l Y_{lm}^* \operatorname{div} \mathbf{M} d^3x. \end{aligned} \quad (16.96)$$

В противоположность электрическим мультипольным моментам Q_{lm} и Q'_{lm} , для системы с отличной от нуля собственной намагниченностью магнитные моменты M_{lm} и M'_{lm} , вообще говоря, имеют один порядок величины.

В предельном случае больших длин волн мультипольные поля электрического типа, очевидно, определяются плотностью электрического заряда q , а поля мультиполей магнитного типа — плотностями магнитных моментов $(1/2c)(\mathbf{r} \times \mathbf{J})$ и \mathbf{M} .

§ 6. Мультипольное излучение атомных и ядерных систем

Полный анализ вопроса о мультипольном излучении атомов и ядер требует применения последовательных квантовомеханических методов исследования ¹⁾, хотя существенные детали могут быть выявлены и при элементарном рассмотрении. В соответствии с формулой (16.74) и выражениями для мультипольных коэффициентов

¹⁾ Квантовомеханические определения мультипольных моментов можно найти в книге Блатта и Вайскопфа [13]. Следует отметить, что значения моментов в указанной книге и у нас отличаются множителем 2, что обусловлено принятыми Блаттом и Вайскопфом определениями плотности источников (см. соотношения (3.1) и (3.2) в книге [13]) в отличие от нашего определения (16.76).

(16.93) и (16.95) полная мощность, излучаемая мультиполем порядка (l, m) , равна

$$\begin{aligned} P_E(l, m) &= \frac{2\pi c}{[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{l+1}{l} \right) k^{2l+2} |Q_{lm} + Q'_{lm}|^2, \\ P_M(l, m) &= \frac{2\pi c}{[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{l+1}{l} \right) k^{2l+2} |M_{lm} + M'_{lm}|^2. \end{aligned} \quad (16.97)$$

С квантовомеханической точки зрения представляет интерес вероятность перехода (величина, обратная времени жизни), которая определяется как отношение мощности излучения к энергии фотона:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{P}{\hbar\omega}. \quad (16.98)$$

Так как нас интересует лишь оценка порядка величин, примем следующую схематическую модель источника. Предположим, что распределение плотности осциллирующего заряда определяется формулами

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{3e}{a^3} Y_{lm}(\theta, \varphi) & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases} \quad (16.99)$$

Тогда для электрического мультипольного момента Q_{lm} приближенно получим

$$Q_{lm} \approx \frac{3}{l+3} ea^l \quad (16.100)$$

независимо от m . Аналогично примем следующий закон распределения дивергенции вектора намагниченности:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathcal{M} + \frac{1}{l+1} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{J}}{c} \right) &= \\ &= \begin{cases} \frac{2g}{a^3} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{e\hbar}{mc r}, & r < a, \\ 0 & r > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (16.101)$$

Здесь через g обозначен эффективный g -фактор для магнитных моментов частиц в атомной или ядерной системе, а $e\hbar/mc$ — удвоенное значение магнетона Бора для этих частиц. При этом сумма магнитных мультипольных моментов оказывается приближенно равной

$$M_{lm} + M'_{lm} \approx -\frac{2}{l+2} ea^l \frac{g\hbar}{mca}. \quad (16.102)$$

Из определения Q'_{lm} (16.94) следует, что

$$Q'_{lm} \sim g \frac{\hbar\omega}{mc^2} Q_{lm}. \quad (16.103)$$

Так как энергии радиационных переходов в атомах и ядрах всегда малы по сравнению с энергиями покоя частиц в этих системах, величины Q_{lm} всегда пренебрежимо малы по сравнению с Q_{lm} .

Для электрических мультипольных переходов порядка l на основе оценки (16.100) получаем следующее выражение для вероятности перехода (16.98):

$$\frac{1}{\tau_E(l)} \approx \frac{e^2}{\hbar c} \frac{2\pi}{[(2l+1)!!]^2} \frac{l+1}{l} \left(\frac{3}{l+3} \right)^2 (ka)^{2l} \omega. \quad (16.104)$$

Вероятность перехода для магнитных мультиполей с точностью до множителей порядка единицы оказывается, согласно (16.102), равной

$$\frac{1}{\tau_M(l)} \approx \left(\frac{g\hbar}{mca} \right)^2 \frac{1}{\tau_E(l)}. \quad (16.105)$$

Из пропорциональности вероятности перехода (16.104) величине $(ka)^{2l}$ следует, что в длинноволновом пределе ($ka \ll 1$) вероятность перехода быстро убывает при фиксированной частоте с ростом порядка мультиполя. Это значит, что, вообще говоря, лишь низший отличный от нуля мультиполь существен в атомных и ядерных переходах. Отношение вероятностей соседних мультипольных переходов электрического или магнитного типа (при одинаковом значении частоты) равно

$$\frac{[\tau(l+1)]^{-1}}{[\tau(l)]^{-1}} \sim \frac{(ka)^2}{4l^2}, \quad (16.106)$$

где опущены численные множители порядка $(l+1)/l$.

В атомных системах радиационные процессы обусловливаются электронами. В качестве размеров источника можно принять величину $a \sim (a_0/Z_{\text{эфф}})$, где a_0 — боровский радиус, а $Z_{\text{эфф}}$ — эффективный заряд ядра ($Z_{\text{эфф}} \sim 1$ для переходов валентных электронов; $Z_{\text{эфф}} \leq Z$ для переходов, соответствующих рентгеновскому излучению). Для оценки величины ka заметим, что энергия атомного перехода, вообще говоря, имеет величину порядка

$$\hbar\omega \leq Z_{\text{эфф}}^2 \frac{e^2}{a_0}, \quad (16.107)$$

так что

$$ka \leq \frac{Z_{\text{эфф}}}{137}. \quad (16.108)$$

Как следует из (16.106), отношение вероятностей соседних мультипольных переходов равно $\sim (Z_{\text{эфф}}/137)^2$. Отношение вероятностей перехода для мультиполей магнитного и электрического типов можно оценить по (16.105). Для электронов g -фактор есть вели-

чина порядка единицы. При $a \approx a_0/Z_{\text{эфф}} = 137(\hbar/mcZ_{\text{эфф}})$ интенсивность магнитного мультипольного перехода порядка l в $(137/Z_{\text{эфф}})^2$ раз меньше интенсивности соответствующего электрического перехода. Можно заключить таким образом, что в атомах наиболее интенсивными должны быть дипольные электрические переходы, а электрические квадрупольные и магнитные дипольные переходы приблизительно в $(137/Z_{\text{эфф}})^2$ раз слабее. Лишь при рентгеновских переходах в тяжелых элементах может оказаться, что, кроме электрического мультиполя низшего порядка, следует учитывать и другие мультиполи.

Обратимся теперь к радиационным переходам в атомных ядрах. Так как энергии ядерных радиационных переходов меняются в широком диапазоне (от ~ 10 кэВ до нескольких МэВ), значения ka перекрывают широкую область. Это значит, что вероятность перехода (или среднее время жизни) для мультиполя заданного порядка меняется в зависимости от выделяемой энергии чрезвычайно сильно, так что одной и той же вероятности соответствуют мультиполи различных порядков. Несмотря на это, при систематизации ядерных мультипольных переходов оказываются полезными оценочные формулы (16.104) и (16.105), так как при *фиксированном значении выделяемой энергии* вероятности переходов значительно различаются для разных мультиполей.

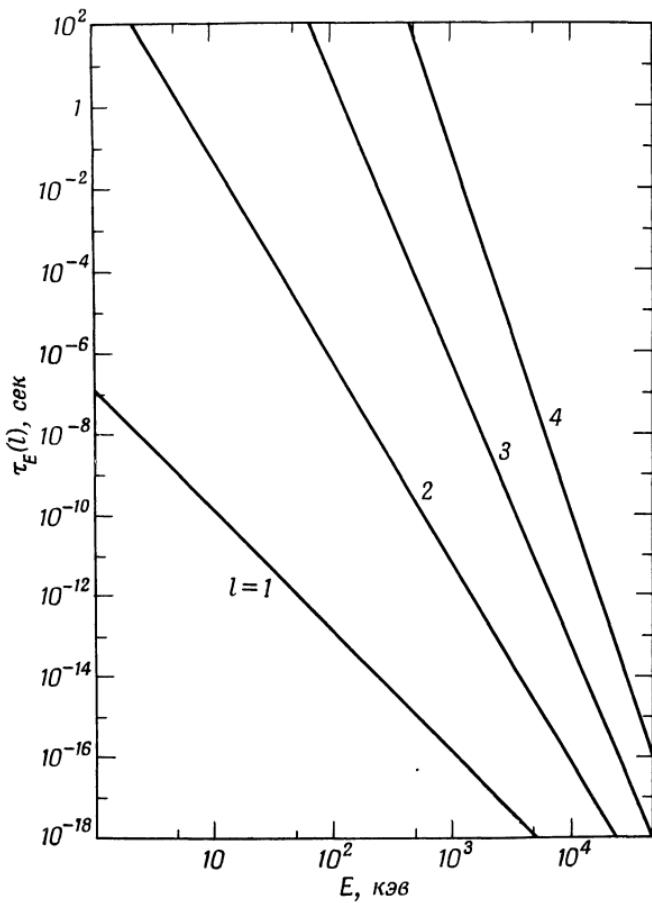
На фиг. 16.2 в логарифмическом масштабе представлены приближенные зависимости времени жизни от энергии для электрических мультипольных переходов, рассчитанные по (16.104), причем заряд e принят равным заряду протона и $a \approx 5,6 \cdot 10^{-13}$ см, что соответствует радиусу ядра с массовым числом $A \approx 100$. Мы видим, что хотя кривые и сближаются при высоких энергиях, тем не менее времена жизни для различных мультиполей при одинаковой энергии отличаются в среднем в 10^5 раз. Это означает, что, хотя действительные значения мультипольных моментов в отдельных переходах могут сильно отличаться от вычисленных по простым оценочным формулам, последние сохраняют свою силу при определении порядков мультиполей. Экспериментально полученные диаграммы зависимости времени жизни от энергии представляют собой широкие, но четко ограниченные полосы, лежащие вблизи изображенных на фиг. 16.2 прямых линий. Обычно приближенные соотношения (16.104) соответствуют нижней границе времени жизни, откуда следует, что (16.100) дает верхнюю границу для соответствующего мультипольного момента, однако для некоторых так называемых *вынужденных* электрических квадрупольных переходов время жизни может быть раз в 100 меньше, чем показано на фиг. 16.2.

Для сравнения магнитных и электрических мультиполей одного порядка можно воспользоваться соотношением (16.105). Эффективный g -фактор для нуклонов имеет величину порядка 3, что обуслов-

влено их аномальным магнитным моментом. Поэтому для источника с размерами $a \sim R = 1,2A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см получаем

$$\frac{1}{\tau_M(l)} \sim \frac{0,3}{A^{2/3}} \frac{1}{\tau_E(l)} ; \quad (16.109)$$

здесь численный множитель изменяется в пределах от $4 \cdot 10^{-2}$ до $0,8 \cdot 10^{-2}$ при $20 < A < 250$. Таким образом, можно ожидать,



Фиг. 16.2. Зависимость времени жизни возбужденных ядерных состояний от энергии фотона для электрических мультипольных переходов при $l = 1, 2, 3, 4$.

что электрические переходы для мультиполя данного порядка будут в 25—120 раз интенсивней соответствующих магнитных переходов. Для большинства мультиполей это утверждение верно. Однако при $l = 1$ для ядер имеет место особый случай: из-за наличия больших сил притяжения, не зависящих от заряда, электрические

дипольные переходы оказываются подавленными (по крайней мере при малых энергиях). Тогда приближенная оценка (16.109) неприменима. Магнитные дипольные переходы в этом случае значительно более вероятны и столь же интенсивны, как и электрические дипольные переходы.

В § 3 были установлены правила отбора по четности и моменту количества движения; при этом отмечалось, что в переходах между двумя квантовыми состояниями могут осуществляться смешанные мультипольные переходы, соответствующие, например, магнитным мультиполем порядка l , $(l+2)$, ... и электрическим мультиполем порядка $(l+1)$, $(l+3)$, ... В длинноволновом приближении следует учитывать лишь мультиполи низшего порядка для каждого из типов. Комбинируя формулы (16.105) и (16.106), можно вычислить отношение вероятностей переходов для электрического мультиполя порядка $(l+1)$ и магнитного мультиполя порядка l (чаще всего встречается случай $l = 1$):

$$\frac{[\tau_E(l+1)]^{-1}}{[\tau_M(l)]^{-1}} \sim \left(\frac{A^{1/3}E}{200l} \right)^2, \quad (16.110)$$

где E — энергия фотона в Мэв. Для высокоэнергетических переходов в тяжелых элементах амплитуда электрического квадруполя составляет $\sim 5\%$ от амплитуды магнитного диполя. Если, как это имеет место для редкоземельных и трансурановых элементов, эффективный квадрупольный момент приблизительно в 10 раз больше нормального, то электрический квадрупольный переход становится сравнимым с магнитным дипольным переходом.

Для смеси магнитного мультиполя порядка $(l+1)$ и электрического мультиполя порядка l отношение вероятностей переходов равно

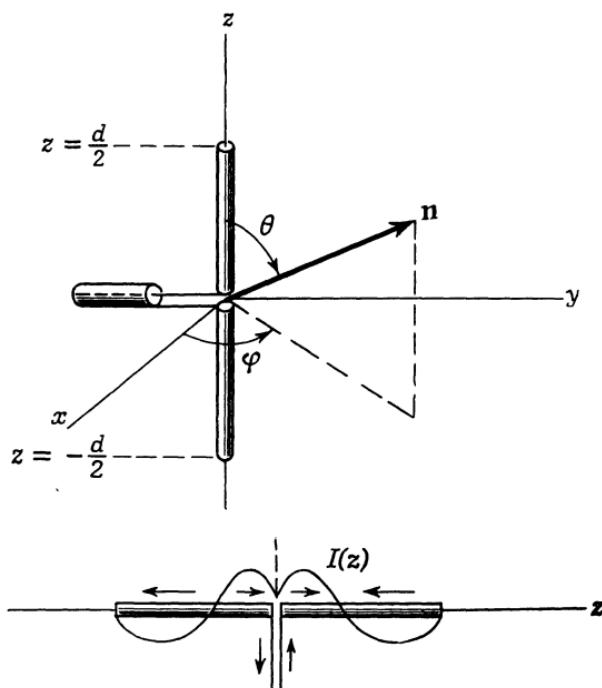
$$\frac{[\tau_M(l+1)]^{-1}}{[\tau_E(l)]^{-1}} \sim \left(\frac{E}{600l} \right)^2. \quad (16.111)$$

Очевидно, что даже для самых больших энергий переходов вероятность магнитного мультипольного перехода порядка $(l+1)$ будет всегда много меньше вероятности электрического мультипольного перехода l -го порядка.

§ 7. Излучение линейной антенны с центральным возбуждением

В качестве иллюстрации применения метода разложения по мультиполем в случае, когда размеры источника сравнимы с длиной волны, рассмотрим излучение возбуждаемой в центре тонкой линейной антенны (фиг. 16.3). В гл. 9 уже были найдены поля при синусоидальном распределении тока. Это точное решение

послужит нам для сопоставления при оценке сходимости разложения по мультиполям. Пусть антenna, расположенная вдоль оси z на участке $-d/2 \leq z \leq d/2$, имеет в центре малый зазор, служащий для ее возбуждения. Распределение тока в антенне



Ф и г. 16.3. Линейная антenna с возбуждением в центре.

должно быть четной функцией z и обращаться в нуль на концах антенны. Не конкретизируя пока распределения тока, можно написать

$$I(z, t) = I(|z|) e^{-i\omega t}, \quad I\left(\frac{d}{2}\right) = 0. \quad (16.112)$$

Так как токи радиальные, то $(\mathbf{r} \times \mathbf{J}) = 0$. Кроме того, в этой задаче собственная намагниченность тоже отсутствует. Поэтому все коэффициенты возбуждения (т. е. мультипольные коэффициенты) полей магнитных мультиполей $a_M(l, m)$ оказываются равными нулю. Для определения коэффициентов возбуждения полей электрических мультиполей $a_E(l, m)$, согласно (16.91), необходимо знать распределение плотности токов и зарядов. Плотность тока \mathbf{J} соответствует радиальному току вдоль оси z . В сферических координатах для $r < d/2$ ее можно представить в виде

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \epsilon_r \frac{I(r)}{2\pi r^2} [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)], \quad (16.113)$$

где δ -функции обеспечивают наличие тока лишь на оси z . Распределение плотности зарядов можно найти из уравнения непрерывности (16.78):

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\omega} \frac{dI(r)}{dr} \left[\frac{\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)}{2\pi r^2} \right]. \quad (16.114)$$

Подставляя эти выражения для \mathbf{J} и ρ в (16.91), получаем

$$a_E(l, m) = \frac{2k^2}{V^{l(l+1)}} \int_0^{d/2} dr \left\{ \frac{k}{c} r j_l(kr) I(r) - \frac{1}{\omega} \frac{dI}{dr} \frac{d}{dr} [r j_l(kr)] \right\} \times \\ \times \int d\Omega Y_{lm}^* [\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)]. \quad (16.115)$$

Выполним интегрирование в последнем интеграле

$$\int (\dots) d\Omega = 2\pi \delta_{m0} [Y_{l0}(0) - Y_{l0}(\pi)], \quad (16.116)$$

откуда следует, что возбуждаются лишь мультиполи с $m = 0$. Это, конечно, очевидно из цилиндрической симметрии антенны. Полиномы Лежандра являются четными функциями угла (относительно значения $\theta = \pi/2$) для четных l и нечетными — для нечетных l . Следовательно, возбуждаются лишь нечетные мультиполи, а последний интеграл равен

$$\int d\Omega = V^{4\pi(2l+1)}, \quad l \text{ нечетно}, \quad m = 0. \quad (16.117)$$

После некоторых преобразований (16.115) можно записать в виде

$$a_E(l, 0) = \frac{2k}{c} \left[\frac{4\pi(2l+1)}{l(l+1)} \right]^{1/2} \int_0^{d/2} \left\{ - \frac{d}{dr} \left[r j_l(kr) \frac{dI}{dr} \right] + \right. \\ \left. + r j_l(kr) \left(\frac{d^2I}{dr^2} + k^2 I \right) \right\} dr. \quad (16.118)$$

Для вычисления интеграла в (16.118) следует задаться распределением тока $I(z)$ вдоль антенны. Если бы не было излучения, то синусоидальному изменению тока во времени с частотой ω соответствовало бы синусоидальное пространственное изменение с волновым числом $k = \omega/c$. Наличие излучения несколько изменяет пространственное распределение тока. Для нахождения истинного пространственного распределения тока вдоль антенны следовало бы рассмотреть граничную задачу для суммарного поля антенны и излучения. Эта весьма сложная задача встает перед нами в тех случаях, когда необходимо иметь точное решение. К счастью, влияние излучения на распределение тока не очень существенно, и им можно пренебречь. Достаточно хороший результат получается

уже, если считать распределение тока синусоидальным. Поэтому мы примем, что

$$I(z) = I \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right), \quad (16.119)$$

где I — максимальное значение тока, а фаза выбрана так, чтобы ток обращался в нуль на краях антенны. При синусоидальном распределении тока второе слагаемое в подынтегральном выражении в (16.118) обращается в нуль. Остающаяся часть представляет собой полный дифференциал, так что при $I(z)$, описываемом соотношением (16.119), сразу получаем

$$a_E(l, 0) = \frac{4I}{cd} \left[\frac{4\pi(2l+1)}{l(l+1)} \right]^{1/2} \left(\frac{kd}{2} \right)^2 j_l \left(\frac{kd}{2} \right), \quad l \text{ нечетно.} \quad (16.120)$$

Поскольку мы хотим исследовать разложение по полям мультиполей при размерах источника, сравнимых с длиной волны, рассмотрим частные случаи полуволновой ($kd = \pi$) и полноволновой ($kd = 2\pi$) антенн. Для этих двух значений kd в приведенной ниже таблице даны значения коэффициента возбуждения для $l = 1$, а также относительные значения коэффициентов для $l = 3$ и $l = 5$.

kd	$a_E(1, 0)$	$a_E(3, 0)/a_E(1, 0)$	$a_E(5, 0)/a_E(1, 0)$
π	$4\sqrt{6\pi} \frac{I}{cd}$	$4,95 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$
2π	$4\pi\sqrt{6\pi} \frac{I}{cd}$	0,325	$3,09 \cdot 10^{-2}$

Из приведенной таблицы следуют очевидные выводы: а) с ростом l коэффициенты быстро убывают по величине, б) коэффициенты, соответствующие большим значениям l , тем более существенны, чем больше размеры источника. Однако даже для полноволновой антенны, очевидно, вполне достаточно удержать в угловом распределении лишь моменты с $l = 1$ и $l = 3$ и наверняка достаточно учета лишь этих членов при нахождении полной мощности излучения (в выражение для которой входят квадраты коэффициентов).

Удерживая в угловом распределении лишь дипольный и октупольный моменты, получаем из выражения (16.70) для мощности излучения в единицу телесного угла

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c |a_E(1, 0)|^2}{16\pi k^2} \left| \mathbf{L}Y_{1,0} - \frac{a_E(3, 0)}{\sqrt{6} a_E(1, 0)} \mathbf{L}Y_{3,0} \right|^2. \quad (16.121)$$

С учетом соотношений

$$\begin{aligned} |\mathbf{L}Y_{1,0}|^2 &= \frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta, \\ |\mathbf{L}Y_{3,0}|^2 &= \frac{63}{16\pi} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1)^2, \\ (\mathbf{L}Y_{1,0})^* \cdot (\mathbf{L}Y_{3,0}) &= \frac{3\sqrt{21}}{8\pi} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned} \quad (16.122)$$

формула (16.121) может быть приведена к виду

$$\frac{dP}{d\Omega} = \lambda \frac{12I^2}{\pi^2 c} \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta \left| 1 - \sqrt{\frac{7}{8}} \frac{a_E(3,0)}{a_E(1,0)} (5 \cos^2 \theta - 1) \right|^2, \quad (16.123)$$

где коэффициент λ равен 1 для полуволновой и $\pi^2/4$ — для полноволновой антенн. Коэффициент при выражении $(5 \cos^2 \theta - 1)$ в (16.123) равен соответственно 0,0463 и 0,304 для полуволновой и полноволновой антенн.

Полученные в гл. 9 точные угловые распределения (для синусоидального возбуждающего тока) имеют вид

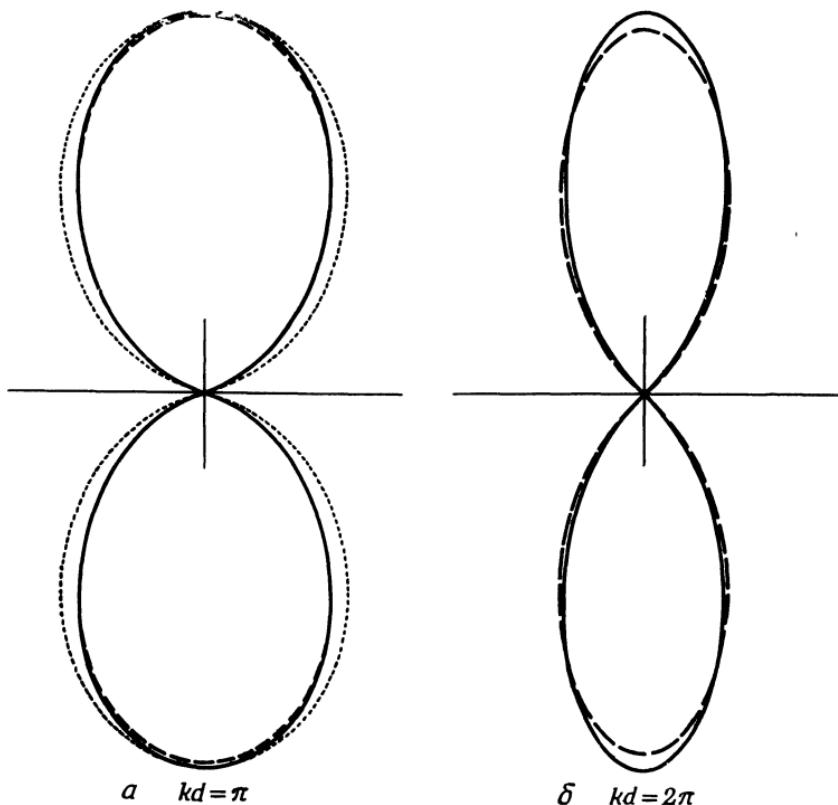
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I^2}{2\pi c} \begin{cases} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta}, & kd = \pi, \\ 4 \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta}, & kd = 2\pi. \end{cases} \quad (16.124)$$

Результаты численного сравнения точного и приближенного угловых распределений представлены на фиг. 16.4. Сплошные кривые относятся к точным результатам, штриховые кривые соответствуют разложениям по мультиполям с учетом двух низших членов. Для полуволновой антенны (фиг. 16.4, а) пунктиром изображено также распределение в простом дипольном приближении, соответствующем учету лишь первого члена в (16.123). При $kd=\pi$ кривая, соответствующая мультипольному разложению с учетом двух членов, почти неотличима от точного результата. В этом случае даже простейшее (дипольное) приближение не слишком отличается от точного решения. Для полноволновой антенны (фиг. 16.4, б) точность дипольного приближения, очевидно, недостаточна. Однако учет двух членов разложения по мультиполям приводит уже к достаточно хорошему распределению, отличающемуся от точного меньше чем на 5% в области максимума излучения.

Полная излучаемая мощность, согласно (16.75), равна

$$P = \frac{c}{8\pi k^2} \sum_{l_{\text{неч}}} |a_E(l, 0)|^2. \quad (16.125)$$

Как следует из приведенной на стр. 619 таблицы, для полуволновой антенны излучаемая мощность в 1,00245 раза превышает мощность



Фиг. 16.4. Угловое распределение излучения полуволновой ($kd = \pi$) и полноволновой ($kd = 2\pi$) линейной антенны с возбуждением в центре.

Сплошные кривые — точное решение; штриховые кривые получены при учете двух членов разложения по мультипольям. Для полуволновой антенны показано также простое дипольное приближение (пунктирная кривая). Диаграмма излучения с учетом двух членов превосходно согласуется с точными результатами, особенно для случая $kd = \pi$.

излучения простого диполя, равную $12I^2/\pi^2c$. Для полноволновой антенны мощность излучения в 1,114 раза больше, чем для соответствующего диполя, для которого она равна $3I^2/c$.

§ 8. Разложение векторной плоской волны по сферическим волнам

При исследовании рассеяния или поглощения электромагнитного излучения сферическими телами или вообще ограниченной системой полезно иметь разложение плоской электромагнитной волны по сферическим волнам.

Для скалярного поля $\psi(\mathbf{x})$, удовлетворяющего волновому уравнению, такое разложение можно получить, используя свойства ортогональности собственных сферических волновых функций $j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Можно также получить это разложение, исходя из разложения по сферическим волнам (16.22) функции Грина $e^{ikR}/4\pi R$. Пусть $|\mathbf{x}'| \rightarrow \infty$ в обеих частях выражения (16.22). Тогда в левой части равенства можно приближенно считать $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx r' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$, где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{x}' . В правой части равенства $r_> = r'$, а $r_< = r$. Функции $h_l^{(1)}(kr')$ можно заменить их асимптотическими выражениями (16.13). В результате получаем

$$\frac{e^{ikr'}}{4\pi r'} e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} = ik \frac{e^{ikr'}}{kr'} \sum_{l,m} (-i)^{l+1} j_l(kr) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (16.126)$$

Сокращая множители $e^{ikr'}/r'$ в обеих частях равенства и беря комплексно сопряженное выражение, получаем искомое разложение плоской волны

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(kr) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi'), \quad (16.127)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор, имеющий в сферических координатах составляющие k, θ', φ' . Используя теорему сложения (3.62), можно представить это разложение в более компактной форме

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \gamma), \quad (16.128)$$

где γ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{x} . Последнюю формулу можно, воспользовавшись соотношением (3.57) для функции $P_l(\cos \gamma)$, переписать также в виде

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi (2l+1)} j_l(kr) Y_{l0}(\gamma). \quad (16.129)$$

Получим теперь эквивалентное разложение для падающей вдоль оси z плоской волны с круговой поляризацией:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) e^{ikz}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E} = \mp i\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (16.130)$$

Так как амплитуда плоской волны везде конечна, то ее разложение по мультиполям (16.47) содержит лишь конечные радиальные функции $j_l(kr)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{l, m} \left[a_{\pm}(l, m) j_l(kr) \mathbf{X}_{lm} + \frac{i}{k} b_{\pm}(l, m) \operatorname{rot} j_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right], \quad (16.131)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_{l, m} \left[-\frac{i}{k} a_{\pm}(l, m) \operatorname{rot} j_l(kr) \mathbf{X}_{lm} + b_{\pm}(l, m) j_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \right].$$

Для определения коэффициентов $a_{\pm}(l, m)$ и $b_{\pm}(l, m)$ воспользуемся ортогональностью векторных сферических гармоник \mathbf{X}_{lm} . Для удобства выпишем условия ортогональности (16.46) и некоторые другие полезные соотношения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \int [f_l(r) \mathbf{X}_{l'm'}]^* \cdot [g_l(r) \mathbf{X}_{lm}] d\Omega &= f_l^* g_l \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \\ \int [f_l(r) \mathbf{X}_{l'm'}]^* \cdot [\operatorname{rot} g_l(r) \mathbf{X}_{lm}] d\Omega &= 0, \\ \frac{1}{k^2} \int [\operatorname{rot} f_l(r) \mathbf{X}_{l'm'}]^* \cdot [\operatorname{rot} g_l(r) \mathbf{X}_{lm}] d\Omega &= \\ &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \left\{ f_l^* g_l + \frac{1}{k^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r f_l^* \frac{\partial}{\partial r} (rg_l) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16.132)$$

В этих соотношениях $f_l(r)$ и $g_l(r)$ — линейные комбинации сферических функций Бесселя, удовлетворяющих уравнению (16.5). Второе и третье соотношения могут быть доказаны с помощью операторного тождества (16.49), представления (16.37) и дифференциального уравнения (16.5) для радиальных функций.

Для определения коэффициентов $a_{\pm}(l, m)$ и $b_{\pm}(l, m)$ умножим обе стороны равенств (16.131) скалярно на \mathbf{X}_{lm}^* и проинтегрируем по углам. Используя при этом первые два соотношения (16.132), находим

$$a_{\pm}(l, m) j_l(kr) = \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (16.133)$$

и

$$b_{\pm}(l, m) j_l(kr) = \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (16.134)$$

Подставляя в (16.133) напряженность электрического поля в виде (16.130), получаем

$$a_{\pm}(l, m) j_l(kr) = \int \frac{(L_{\mp} Y_{lm})^*}{\sqrt{l(l+1)}} e^{ikz} d\Omega, \quad (16.135)$$

где операторы L_{\pm} определяются формулами (16.26), а результат их применения — соотношениями (16.28). Таким образом,

$$a_{\pm}(l, m) j_l(kr) = \frac{\sqrt{(l \pm m)(l \mp m + 1)}}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{l, m \mp 1}^* e^{ikz} d\Omega. \quad (16.136)$$

Подставляя разложение (16.129) для функции e^{ikz} и используя свойство ортогональности функций Y_{lm} , окончательно находим

$$a_{\pm}(l, m) = i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \delta_{m, \pm 1}. \quad (16.137)$$

Как следует из формул (16.134) и (16.130),

$$b_{\pm}(l, m) = \mp i a_{\pm}(l, m). \quad (16.138)$$

В итоге приходим к следующему разложению плоской волны (16.130) по мультиполям:

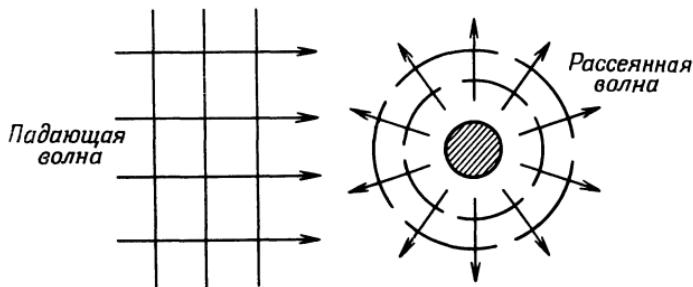
$$\mathbf{E}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \pm \frac{1}{k} \text{rot} j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \right], \quad (16.139)$$

$$\mathbf{B}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[-\frac{i}{k} \text{rot} j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \mp i j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \right].$$

Для рассматриваемой волны с круговой поляризацией значения $m = \pm 1$ можно, очевидно, интерпретировать как приходящуюся на один фотон составляющую момента количества движения в направлении распространения волны. Это обстоятельство уже было ранее установлено в задаче 6.12.

§ 9. Рассеяние электромагнитных волн на проводящей сфере

При падении плоской электромагнитной волны на сферическое препятствие (фиг. 16.5) она рассеивается, так что вдали от рассеивающего тела поле представляется суммой плоской волны и расходящихся сферических волн. Препятствие может не только рассеивать, но и поглощать. В этом случае полный поток энергии от препятствия будет меньше полного потока по направлению к нему; разность потоков равна поглощаемой энергии. Мы рассмотрим простейший пример рассеяния на идеально проводящей сфере радиусом a .



Фиг. 16.5. Рассеяние плоской электромагнитной волны на препятствии.

Представим электромагнитные поля вне сферы в виде суммы падающей и рассеянных волн:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}_{\text{пад}} + \mathbf{B}_{\text{расс}}, \end{aligned} \quad (16.140)$$

где $\mathbf{E}_{\text{пад}}$ и $\mathbf{B}_{\text{пад}}$ описываются выражениями (16.139). Так как в бесконечности поля рассеяния представляют собой расходящиеся волны, их разложение должно иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{расс}} &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[a_{\pm}(l) h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\beta_{\pm}(l)}{k} \operatorname{rot} h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \right], \\ \mathbf{B}_{\text{расс}} &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[-\frac{i a_{\pm}(l)}{k} \operatorname{rot} h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \mp \right. \\ &\quad \left. \mp i \beta_{\pm}(l) h_l^{(1)}(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \right]. \end{aligned} \quad (16.141)$$

Коэффициенты разложения $a_{\pm}(l)$ и $\beta_{\pm}(l)$ определяются граничными условиями на поверхности сферы.

Для идеально проводящей сферы граничные условия на поверхности $r = a$ имеют вид

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (16.142)$$

Для применения этих граничных условий следует уточнить характер векторных слагаемых в разложениях (16.141). Как известно, векторы \mathbf{X}_{lm} перпендикулярны радиусу-вектору. Что касается

векторных слагаемых другого типа, то они пропорциональны

$$\operatorname{rot} f_l(r) \mathbf{X}_{lm} = \frac{i n \sqrt{l(l+1)}}{r} f_l(r) Y_{lm} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r f_l(r)] \mathbf{n} \times \mathbf{X}_{lm}, \quad (16.143)$$

где $f_l(r)$ — произвольная сферическая функция Бесселя, удовлетворяющая уравнению (16.5). Накладывая на *полное* поле (16.140) граничные условия (16.142), находим условия, которым должны удовлетворять коэффициенты $\alpha_{\pm}(l)$ и $\beta_{\pm}(l)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha_{\pm}(l) h_l^{(1)}(ka) + j_l(ka) &= 0, \\ \left\{ \frac{1}{2} \beta_{\pm}(l) \frac{\partial}{\partial r} [r h_l^{(1)}(kr)] + \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] \right\}_{r=a} &= 0. \end{aligned} \quad (16.144)$$

Заметим, что для обоих типов круговой поляризации коэффициенты одинаковы. Учитывая равенство $2j_l(kr) = h_l^{(1)}(kr) + h_l^{(2)}(kr)$, можно записать коэффициенты разложения в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm}(l) &= - \left[\frac{h_l^{(2)}(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} + 1 \right], \\ \beta_{\pm}(l) &= - \left\{ \frac{(d/dr)[r h_l^{(2)}(kr)]}{(d/dr)[r h_l^{(1)}(kr)]} \Big|_{r=a} + 1 \right\}. \end{aligned} \quad (16.145)$$

Входящие сюда отношения представляют собой частные двух комплексно сопряженных величин и, следовательно, являются комплексными числами, равными по модулю единице. Удобно ввести два угла, называемые обычно *фазовыми сдвигами*, определив их равенствами

$$\begin{aligned} e^{2i\delta_l} &= - \frac{h_l^{(2)}(ka)}{h_l^{(1)}(ka)}, \\ e^{2i\delta'_l} &= - \frac{(d/dr)[r h_l^{(2)}(kr)]}{(d/dr)[r h_l^{(1)}(kr)]} \Big|_{r=a} \end{aligned} \quad (16.146)$$

или эквивалентными соотношениями

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_l &= \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}, \\ \operatorname{tg} \delta'_l &= \frac{(d/dr)[r j_l(kr)]}{(d/dr)[r n_l(kr)]} \Big|_{r=a}. \end{aligned} \quad (16.147)$$

Коэффициенты разложения принимают при этом вид

$$\alpha_{\pm}(l) = (e^{2i\delta_l} - 1), \quad \beta_{\pm}(l) = (e^{2i\delta'_l} - 1). \quad (16.148)$$

Предельные значения введенных фазовых сдвигов при $ka \ll 1$ и $ka \gg 1$ можно найти с помощью приближенных выражений

(16.12) и асимптотических выражений (16.13):

$$ka \ll 1$$

$$\delta_l \approx -\frac{(ka)^{2l+1}}{(2l+1)[(2l-1)!!]^2}, \quad (16.149)$$

$$\delta'_l \approx -\left(\frac{l+1}{l}\right)\delta_l;$$

$$ka \gg 1$$

$$\delta_l \approx \frac{l\pi}{2} - ka, \quad (16.150)$$

$$\delta'_l \approx (l+1)\frac{\pi}{2} - ka.$$

Коэффициент разложения $a(l)$ и фазовый сдвиг δ_l можно назвать *магнитными* параметрами, так как они относятся к магнитным мультипольным полям в разложениях (16.141). Аналогично $\beta(l)$ и δ'_l можно назвать *электрическими* параметрами.

Магнитное поле рассеянной волны с учетом выражений (16.148) для коэффициентов преобразуется к виду

$$\mathbf{B}_{\text{расс}} = \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[\frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k} \operatorname{rot} h_l^{(1)} \mathbf{X}_{l,\pm 1} \pm \right. \\ \left. \pm e^{i\delta'_l} \sin \delta'_l h_l^{(1)} \mathbf{X}_{l,\pm 1} \right]. \quad (16.151)$$

Асимптотически при $kr \rightarrow \infty$

$$\mathbf{B}_{\text{расс}} \approx \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} [e^{i\delta_l} \sin \delta_l (\mathbf{n} \times \mathbf{X}_{l,\pm 1}) \mp \\ \mp ie^{i\delta'_l} \sin \delta'_l \cdot \mathbf{X}_{l,\pm 1}]. \quad (16.152)$$

Рассеянное поле (16.152) обладает в общем случае эллиптической поляризацией. Лишь в том случае, когда δ_l и δ'_l равны между собой, излучение будет поляризовано по кругу. Таким образом, при падении линейно поляризованного излучения рассеянное излучение будет поляризовано эллиптически. Если же падающее излучение не поляризовано, то рассеянное излучение будет все равно обладать частичной поляризацией, зависящей от угла наблюдения.

При рассмотрении интенсивности рассеянного поля удобно пользоваться понятием сечения рассеяния. Оно уже было определено ранее соотношением (14.101). Мощность, рассеиваемая в единицу телесного угла, равна

$$\frac{dP_{\text{расс}}}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{r} \mathbf{B}_{\text{расс}}|^2, \quad (16.153)$$

а поток энергии падающей волны

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_{\text{пад}} \times \mathbf{B}_{\text{пад}}^*] = \frac{c}{4\pi} \mathbf{e}_3. \quad (16.154)$$

Следовательно, для сечения рассеяния получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{k^2} \left| \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{2l+1} [e^{i\delta_l} \sin \delta_l (\mathbf{n} \times \mathbf{X}_{l,\pm 1}) \mp \right. \\ \left. \mp i e^{i\delta'_l} \sin \delta'_l \mathbf{X}_{l,\pm 1}] \right|^2. \quad (16.155)$$

Найденная угловая зависимость излучения весьма сложна и упрощается лишь в предельном случае больших длин волн (см. ниже). Однако полное сечение рассеяния можно вычислить непосредственно. Как видно из второго соотношения (16.132) и формулы (16.143), перекрестные члены в (16.155) при интегрировании по углам обращаются в нуль. В результате для полного сечения рассеяния нетрудно получить выражение

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) (\sin^2 \delta_l + \sin^2 \delta'_l). \quad (16.156)$$

Мы видим, что в полном сечении рассеяния поля электрических и магнитных мультиполей складываются некогерентным образом.

В длинноволновом пределе ($ka \ll 1$) выражение для сечения рассеяния становится относительно простым, так как фазовые сдвиги (16.149) быстро убывают с ростом l . Сохраняя лишь члены разложения с $l = 1$, находим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{2\pi}{3} a^2 (ka)^4 | \mathbf{n} \times \mathbf{X}_{1,\pm 1} \pm 2i\mathbf{X}_{1,\pm 1} |^2. \quad (16.157)$$

Согласно таблице на стр. 605,

$$| \mathbf{n} \times \mathbf{X}_{1,\pm 1} |^2 = | \mathbf{X}_{1,\pm 1} |^2 = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta). \quad (16.158)$$

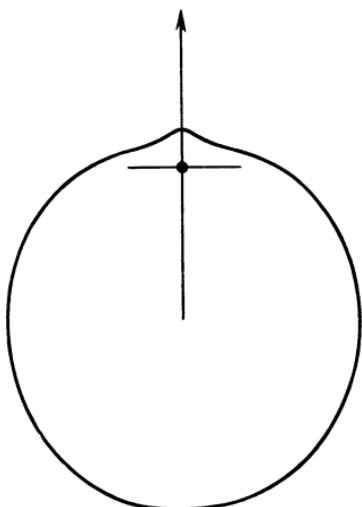
Перекрестные произведения также легко могут быть вычислены

$$\operatorname{Re} [\pm i (\mathbf{n} \times \mathbf{X}_{1,\pm 1})^* \cdot \mathbf{X}_{1,\pm 1}] = -\frac{3}{8\pi} \cos \theta. \quad (16.159)$$

Окончательно для дифференциального сечения рассеяния в длинноволновом приближении имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx a^2 (ka)^4 \left[\frac{5}{8} (1 + \cos^2 \theta) - \cos \theta \right]. \quad (16.160)$$

Это выражение не зависит от типа поляризации падающего поля. Угловое распределение рассеянного излучения показано на фиг. 16.6. Рассеяние происходит главным образом в направлении, противоположном направлению падающей волны; заметная асимметрия



Фиг. 16.6. Угловое распределение излучения, рассеянного на идеально проводящей сфере, в длинноволновом приближении ($ka \ll 1$).

относительно нормали к направлению падения обусловлена интерференцией полей электрического и магнитного дипольных моментов.

Полное сечение рассеяния в приближении больших длин волн оказывается равным

$$\sigma = \frac{10\pi}{3} a^2 (ka)^4. \quad (16.161)$$

Этот известный результат впервые был получен Дебаем и Ми (1908—1909 гг.). Зависимость сечения рассеяния от четвертой степени частоты, известная как закон рассеяния Рэлея, характерна для всех систем, обладающих дипольным моментом.

§ 10. Решение граничных задач с помощью разложений по мультипольям

Рассеяние электромагнитного излучения на проводящей сфере является примером решения граничной задачи с помощью разложений по мультипольям. В качестве других примеров можно рассмотреть свободные колебания проводящей сферы, сферической резонансной полости и рассеяние на диэлектрической сфере. Наличие в проводниках омических потерь добавляет к списку задач определение величины добротности резонатора Q и сечения поглощения. Общие методы рассмотрения этих задач аналогичны описанным в § 9 и в гл. 8. Эти вопросы отнесены нами к задачам.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Подробное рассмотрение теории векторных сферических гармоник и мультипольных векторных полей можно найти в книгах Блатта и Вайскопфа [13], Морса и Фешбаха [77], гл. 13, § 3. Приложения теории мультипольного излучения к ядерным задачам рассматриваются в книге Блатта и Вайскопфа [13], гл. 12, а также в главах, написанных Машковским (гл. 13) и Гольдхабером и Саньяром (гл. 16) в книге [94].

В списке литературы к гл. 9 было указано большое число работ по теории антенн. Однако ни в одной из них не приводится строгого рассмотрения разложения по мультиполюм. Рассмотрение рассеяния электромагнитного излучения на идеально проводящей сфере кратко проведено в книгах Морса и Фешбаха [77] и Пановского и Филипс [78], гл. 12, § 9.

Гораздо более детальное рассмотрение при произвольных диэлектрических и проводящих свойствах сферы содержится в книгах Борна и Вольфа [16], гл. 13, § 5, и Стрэттона [106], гл. 9, § 25.

Математические сведения о сферических функциях Бесселя можно найти в книге Морса и Фешбаха [77].

ЗАДАЧИ

16.1. Три заряда расположены вдоль оси z , причем заряд $2q$ находится в начале координат, а заряды $-q$ — при $z = \pm a \cos \omega t$. Определить низшие отличные от нуля мультипольные моменты, угловое распределение излучения и полную излучаемую мощность. Считать, что $ka \ll 1$.

16.2. Тело, ограниченное весьма близкой к сфере поверхностью, описываемой уравнением

$$R(\theta) = R_0 [1 + \beta P_2(\cos \theta)],$$

заряжено с постоянной объемной плотностью, причем полный заряд равен Q . Малый параметр β гармонически меняется во времени с частотой ω . Это соответствует поверхностным волнам на сфере. Удерживая лишь низшие члены разложения по β , вычислить в длинноволновом приближении отличные от нуля мультипольные моменты, угловое распределение излучения и полную излучаемую мощность.

16.3. В задаче 16.2 заменить постоянную плотность распределения заряда постоянной плотностью намагниченности, считая, что намагниченность параллельна оси z и полный магнитный момент тела равен M . В том же приближении вычислить отличные от нуля мультипольные моменты, угловое распределение излучения и полную излучаемую мощность.

16.4. Излучающая антенна имеет форму расположенного в плоскости xy кругового витка радиусом a с центром в начале координат. Ток в проводе меняется по закону

$$I = I_0 \cos \omega t = \operatorname{Re} I_0 e^{-i\omega t}.$$

а) Найти выражения для векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} в волновой зоне, не налагая ограничений на величину ka . Определить мощность, излучаемую в единицу телесного угла.

б) Какой из отличных от нуля мультипольных моментов имеет наименьший порядок (Q_{lm} или M_{lm})? Вычислить этот момент в приближении $ka \ll 1$.

16.5. Два электрических диполя с дипольными моментами p расположены на расстоянии $2a$ друг от друга; оси обоих диполей параллельны друг

другу, но дипольные моменты ориентированы в противоположных направлениях. Диполи врачаются с постоянной угловой частотой ω вокруг параллельной им оси, расположенной посередине между ними ($\omega \ll c/a$).

- Вычислить составляющие квадрупольного момента.
- Показать, что угловое распределение излучения определяется функцией $(1 - 3 \cos^2 \theta + 4 \cos^4 \theta)$, а полная излучаемая мощность равна

$$P = \frac{2cp^2a^2}{5} \left(\frac{\omega}{c} \right)^6.$$

16.6. В длинноволновом приближении вычислить отличные от нуля электрические мультипольные моменты для распределения плотности зарядов

$$\rho = Cr^3 e^{-5r/6} Y_{1,1}(\theta, \varphi) Y_{2,0}(\theta, \varphi) e^{-i\omega_0 t}$$

и определить угловое распределение излучения и полную излучаемую мощность для каждого мультиполя. Приведенное распределение заряда соответствует переходу между состояниями $n = 3, l = 2$ ($3d$) и $n = 2, l = 1$ ($2p$) в атоме водорода.

16.7. Поля поперечных магнитных волн, распространяющихся в цилиндрическом волноводе, имеющем круглое сечение радиусом R , описываются формулами

$$\begin{aligned} E_z &= J_m(\gamma r) e^{im\varphi} e^{i\beta z - i\omega t}, & H_z &= 0, \\ E_\varphi &= -\frac{m\beta}{\gamma^2} \frac{E_z}{r}, & H_r &= -\frac{k}{\beta} E_\varphi, \\ E_r &= \frac{i\beta}{\gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}, & H_\varphi &= \frac{k}{\beta} E_r, \end{aligned}$$

где m — индекс, определяющий зависимость от угла, β — постоянная распространения, $\gamma^2 = k^2 - \beta^2$ ($k = \omega/c$), причем γ таково, что $J_m(\gamma R) = 0$. Вычислить отношение z -составляющей электромагнитного момента количества движения к энергии поля. При выводе удобно произвести несколько раз интегрирование по частям и использовать дифференциальное уравнение для составляющей поля E_z .

16.8. Сферическая полость радиусом a в проводящей среде может служить электромагнитным резонатором.

а) В случае бесконечной проводимости стенок найти трансцендентные уравнения для собственных частот ω_{ln} волн ТЕ- и ТМ-типов в резонаторе.

б) Определить численные значения длин волн λ_{ln} (отнесенных к радиусу a) для первых четырех волн ТЕ- и ТМ-типов.

в) Найти явные выражения для электрического и магнитного полей в резонаторе, соответствующих низшим волнам ТЕ- и ТМ-типов.

16.9. Проводимость немагнитных стенок полости, описанной в задаче 16.8, велика, но конечна. Считая толщину скин-слоя δ малой по сравнению с радиусом полости a , показать, что определяемая соотношением (8.82) добротность Q резонатора равна

$$Q = \frac{a}{2\pi\delta} \quad \text{для всех волн TE-типа}$$

и

$$Q = \frac{a}{2\pi\delta} \left[1 - \frac{l(l+1)}{x_{ln}^2} \right] \quad \text{для волн TM-типа,}$$