

ВЛИЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧАСТИЦЫ НА ЕЕ ДВИЖЕНИЕ. СОБСТВЕННОЕ ПОЛЕ ЧАСТИЦЫ

§ 1. Вводные замечания

Рассмотренные в предыдущих главах электродинамические задачи можно разделить на два класса. В одних задачах были известны источники, т. е. заряды и токи, и вычислялись результирующие электромагнитные поля, в других — задавалось внешнее электромагнитное поле и определялось движение заряженных частиц или токов в нем. Теория антенн и излучение мультипольных источников служат примерами задач первого типа, а исследование движения зарядов в электрических и магнитных полях и явлений, связанных с потерями энергии, — пример задач второго типа. Изредка, как, например, при рассмотрении тормозного излучения, задача носила комбинированный характер. Но и здесь рассмотрение проводилось по этапам: сначала определялось движение заряженной частицы в заданном внешнем поле (без учета излучения), а затем вычислялось излучение, возникающее при ее движении по полученной траектории в приближении заданного распределения источников.

Очевидно, что подобный подход к решению проблем электродинамики справедлив лишь приближенно. Ускоренное движение заряженных частиц во внешних силовых полях неизбежно сопровождается излучением. Возбуждаемое излучение приводит к потере энергии, импульса и момента количества движения и поэтому должно влиять на последующее движение заряженных частиц. Следовательно, само движение источников излучения определяется в какой-то мере характером возникающего излучения. Корректная постановка задачи должна включать учет реакции излучения¹⁾ на движение источников.

¹⁾ Здесь и далее автор имеет в виду влияние поля, излучаемого частицей, на саму частицу. Существует большой круг задач, также не сводимых к указанным двум классам, где существенна реакция частиц на суммарное поле, создаваемое группой частиц (например, в клистронах или лампах бегущей волны). Трудности, встречающиеся в решении задач такого типа, носят лишь чисто математический характер. В настоящей главе (да и во всей книге) задачи этого типа не рассматриваются.— Прим. ред.

Почему же мы до сих пор не учитывали в нашем рассмотрении этот факт? И почему решения многих рассмотренных нами задач, которые были получены на первый взгляд некорректным путем, так хорошо согласуются с опытом? Частичный ответ на первый вопрос заключен уже во втором вопросе. Существует целый ряд электродинамических задач, которые можно с пренебрежимо малой ошибкой отнести к одному из двух классов, описанных выше. При их решении можно обойтись без дополнительного излишнего усложнения, связанного с учетом реакции излучения. Добавим еще, что полностью удовлетворительной трактовки эффектов реакции излучения не существует. Трудности этой проблемы затрагивают наиболее фундаментальные вопросы физики, связанные с природой элементарных частиц. Хотя частные решения, справедливые в определенных ограниченных пределах, и могут быть получены, основная проблема остается нерешенной. Можно было надеяться, что переход от классического рассмотрения к квантовомеханическому позволит снять эти трудности. Физики еще не потеряли надежды на то, что это в конечном счете произойдет, хотя в настоящее время квантовомеханическое рассмотрение наталкивается даже на более серьезные трудности, чем соответствующее классическое. Значительный успех был достигнут сравнительно недавно (1948—1950 гг.), когда с помощью разумного использования понятий лоренц-ковариантности и калибровочной инвариантности удалось обойти указанные трудности в квантовой электродинамике. Это дало возможность рассчитывать весьма малые радиационные эффекты с исключительно высокой точностью в полном согласии с экспериментом. Однако фундаментальные трудности теории все еще остаются. В настоящей главе будет рассматриваться лишь классическая теория, но по ходу изложения мы укажем и ряд квантовомеханических аналогий.

Ответ на вопрос, почему во многих проблемах можно, по-видимому, пренебречь реакцией излучения, очевидно, заключается в том, что влияние этих эффектов незначительно. Чтобы иметь возможность хотя бы качественно судить о том, когда это действительно имеет место, и производить полукаличественную оценку области значений параметров, в которой эффекты излучения несущественны, необходим простой критерий. Один из таких критериев можно получить из энергетических соображений. Если частица с зарядом e испытывает во внешнем поле ускорение порядка a , то энергия, излученная за время T по формуле Лармора (14.22), равна по порядку величины

$$E_{\text{изл}} \sim \frac{2e^2 a^2 T}{3c^3}. \quad [17.1]$$

Если эти потери энергии на излучение малы по сравнению с характерной для рассматриваемой задачи энергией E_0 , то можно ожи-

дать, что радиационные эффекты окажутся несущественными. Однако если $E_{\text{изл}} \geq E_0$, то реакция излучения будет играть значительную роль. Таким образом, критерий, определяющий границу, начиная с которой уже сказываются радиационные эффекты, может быть выражен соотношением

$$E_{\text{изл}} \sim E_0. \quad (17.2)$$

Определение характерной энергии E_0 требует некоторой осторожности. Будем различать два случая: 1) частица первоначально покоится и подвергается действию приложенной силы лишь в течение конечного интервала времени T ; 2) частица непрерывно ускоряется, как, например, при квазипериодическом движении с некоторой характерной частотой ω_0 . Характерной энергией для первоначально покоявшейся частицы является ее кинетическая энергия в конце периода ускорения, так что

$$E_0 \sim m(aT)^2.$$

Критерий (17.2) в этом случае принимает вид

$$\frac{2}{3} \frac{e^2 a^2 T}{c^3} \sim m a^2 T^2,$$

или

$$T \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}.$$

Здесь полезно ввести характерное время

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}. \quad (17.3)$$

Таким образом, для интервалов времени T , больших по сравнению с τ , радиационные эффекты несущественны. Лишь в том случае, когда сила прикладывается столь внезапно и действует в течение такого короткого времени, что $T \sim \tau$, реакция излучения существенно влияет на движение. Полезно заметить, что наибольшим характерным временем τ из заряженных частиц обладают электроны: для них $\tau = 6,26 \cdot 10^{-21}$ сек. За это время свет проходит расстояние порядка 10^{-13} см. Лишь для явлений, содержащих такие расстояния или интервалы времени, радиационные эффекты могут играть серьезную роль.

Если заряженная частица совершает квазипериодическое движение с амплитудой d и характерной частотой ω_0 , то в качестве энергии E_0 можно принять механическую энергию движения:

$$E_0 \sim m\omega_0^2 d^2.$$

Для такого движения характерная величина ускорения $a \sim \omega_0^2 d$, а интервал времени $T \sim \omega_0^{-1}$. Следовательно, критерий (17.2) записывается в виде

$$\frac{2e^2\omega_0^4 d^2}{3c^3\omega_0} \sim m\omega_0^2 d^2,$$

или

$$\omega_0\tau \sim 1, \quad (17.4)$$

где τ описывается соотношением (17.3). Так как величина ω_0^{-1} определяет характерный период механического движения, мы вновь приходим к тому же результату, что для интервалов времени, больших по сравнению с характерным временем τ (17.3), излучение практически не будет влиять на движение.

Как видно из рассмотренных двух примеров, можно ожидать существенного влияния излучения на движение заряженной частицы, если внешние силы таковы, что движение заметно изменяется за время порядка τ или на расстояниях порядка $c\tau$. Таков общий критерий в классической электродинамике. При более плавном движении влияние излучения достаточно мало и им можно пре-небречь, если рассматриваемый интервал времени не очень велик. Накапливающиеся эффекты, проявляющиеся при рассмотрении движения в течение длительного времени, могут быть учтены приближенно, как будет показано ниже.

§ 2. Определение силы реакции излучения из закона сохранения энергии

Возникает вопрос, как включить эффекты реакции излучения в уравнения движения заряженной частицы. Мы начнем с простых и не очень строгих рассуждений, основанных на законе сохранения энергии для нерелятивистской заряженной частицы. Более строгий вывод и учет релятивистских эффектов будут приведены в последующих параграфах.

Если не учитывать излучения, то движение заряженной частицы с массой m и зарядом e под действием внешней силы $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$ описывается уравнением движения Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{внеш}}. \quad (17.5)$$

Так как частица ускоряется, она излучает, причем мощность излучения определяется формулой Лармора (14.22):

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}}^2. \quad (17.6)$$

Чтобы учесть потери энергии на излучение и их влияние на движение частицы, дополним уравнение Ньютона (17.5) силой реакции излучения $\mathbf{F}_{\text{изл}}$

$$m\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{внеш}} + \mathbf{F}_{\text{изл}}. \quad (17.7)$$

Хотя сила $\mathbf{F}_{\text{изл}}$ пока еще не определена, мы можем сформулировать некоторые требования, которым она «должна» удовлетворять. Сила $\mathbf{F}_{\text{изл}}$ «должна»

- 1) обращаться в нуль при $\dot{\mathbf{v}} = 0$, так как в этом случае излучение отсутствует;
- 2) быть пропорциональной e^2 , так как а) мощность излучения пропорциональна e^2 и б) действие излучения не должно зависеть от знака заряда;
- 3) зависеть от характерного времени τ (17.3), так как, по-видимому, это единственный важный параметр.

Мы найдем вид функции $\mathbf{F}_{\text{изл}}$, если потребуем, чтобы работа этой силы, совершаемая в течение интервала времени $t_1 < t < t_2$, была равна излученной за это время энергии, взятой с обратным знаком. При этом, по крайней мере в целом за интервал времени (t_1, t_2) , будет выполняться закон сохранения энергии. Учитывая соотношение (17.6), можно записать требуемое условие в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{изл}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \ddot{\mathbf{v}} dt.$$

Беря второй интеграл по частям, получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{изл}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Если движение периодическое или такое, что скалярное произведение $(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})$ равно нулю при $t = t_1$ и $t = t_2$, то последнее соотношение можно переписать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_{\text{изл}} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt = 0.$$

Таким образом, в качестве силы реакции излучения можно принять величину

$$\mathbf{F}_{\text{изл}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} = m\tau \ddot{\mathbf{v}}. \quad (17.8)$$

Модифицированное уравнение движения при этом принимает вид

$$m(\dot{\mathbf{v}} - \tau\ddot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_{\text{внеш}}. \quad (17.9)$$

Уравнение (17.9) называют иногда *уравнением движения Абрагама — Лоренца*. Оно учитывает реакцию излучения в некотором приближении и в среднем по времени. Полученное уравнение не вполне удовлетворительно с той точки зрения, что оно не первого, а второго порядка по времени, и поэтому приводит к противоречиям с известными требованиями к динамическому уравнению движения. Это противоречие проявляется прежде всего в наличии так называемых «самоускоряющихся» решений. При отсутствии внешней силы уравнение (17.9), очевидно, имеет два возможных решения:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{cases} 0, \\ ae^{t/\tau}, \end{cases} \quad (17.10)$$

где a — ускорение в момент $t = 0$. Лишь первое решение имеет смысл. Как видно из нашего вывода, второе решение неприемлемо, поскольку $(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) \neq 0$ для моментов времени t_1 и t_2 . Полученное уравнение, очевидно, применимо лишь в той области, где реакция излучения является малой поправкой. В этом случае ее можно рассматривать как возмущение, приводящее к медленным или малым изменениям состояния движения частицы. Трудности, связанные с наличием «самоускоряющихся» решений, можно обойти, заменив уравнение (17.9) интегро-дифференциальным уравнением (см. § 7).

В качестве примера применения уравнения (17.9) для учета малых радиационных эффектов рассмотрим движение частицы в консервативном центральном поле сил притяжения. В отсутствие реакции излучения энергия и момент количества движения частицы сохраняются и полностью определяют движение. Вследствие испускания излучения эти величины изменяются. Если ускорения не слишком велики, то значительное изменение энергии и импульса может произойти лишь за интервалы времени, существенно превышающие характерный период движения. Поэтому мгновенное движение будет фактически таким же, как и в отсутствие излучения. Медленные же изменения можно учесть, производя усреднение по невозмущенной орбите частицы.

Если консервативное центральное поле сил притяжения описывается потенциалом $V(r)$, то ускорение без учета реакции излучения равно

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{1}{m} \left(\frac{dV}{dr} \right) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (17.11)$$

В соответствии с законом сохранения энергии скорость изменения полной энергии частицы равна взятой с обратным знаком мощности излучения

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\dot{\mathbf{v}})^2 = -\frac{2e^2}{3m^2c^3} \left(\frac{dV}{dr} \right)^2.$$

Учитывая определение (17.3) величины τ , это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\tau}{m} \left(\frac{dV}{dr} \right)^2. \quad (17.12)$$

Так как предполагается, что изменение энергии за один цикл движения по орбите мало, то выражение в правой части уравнения можно заменить его средним значением на невозмущенной орбите

$$\frac{dE}{dt} \approx -\frac{\tau}{m} \left\langle \left(\frac{dV}{dr} \right)^2 \right\rangle. \quad (17.13)$$

Секулярное изменение момента количества движения можно определить, умножив уравнение (17.9) векторно на радиус-вектор \mathbf{r} . Так как момент количества движения \mathbf{L} равен $m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, то

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{внеш}} + m\tau\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{v}}. \quad (17.14)$$

Внешний врачающий момент равен нулю, поскольку внешняя сила обладает центральной симметрией, что касается врачающего момента, обусловленного излучением, то он может быть представлен в виде

$$m\tau\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{v}} = \tau \left(\frac{d^2\mathbf{L}}{dt^2} - m\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}} \right). \quad (17.15)$$

Мы предположили, что момент количества движения медленно меняется во времени (т. е. мало меняется за время порядка τ). Поэтому в выражении (17.15) можно пренебречь второй производной \mathbf{L} по t , а в качестве ускорения $\ddot{\mathbf{v}}$ следует взять его значение из невозмущенного уравнения движения (17.11). В результате скорость изменения момента количества движения можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \approx -\frac{\tau}{m} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right\rangle \mathbf{L}, \quad (17.16)$$

где, так же как и в (17.13), произведено усреднение по времени для мгновенной орбиты.

Уравнения (17.13) и (17.16) определяют закон изменения во времени параметров орбиты частицы из-за реакции излучения. Хотя детальное поведение зависит от конкретного вида силы, можно сделать некоторые общие качественные выводы. Если

характерная частота движения есть ω_0 , то с точностью до безразмерного численного коэффициента порядка единицы получаем следующую оценку для усредненной величины в выражении (17.16):

$$\frac{\tau}{m} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right\rangle \sim \frac{\tau}{m} m \omega_0^2 = \omega_0^2 \tau.$$

Отсюда видно, что характерное время изменения момента количества движения по порядку величины равно $(1/\omega_0 \tau) \omega_0^{-1}$. При $\omega_0 \tau \ll 1$ это время много больше периода орбитального движения $2\pi/\omega_0$. К аналогичному выводу можно прийти и исходя из соотношения (17.12).

Приведенные соотношения, учитывающие радиационные эффекты, применимы при исследовании ряда конкретных задач, например для вычисления времени каскадного перехода μ - или π -мезонов с уровня с очень большим значением квантового числа на более низкие уровни. В течение большей части времени квантовые числа в этом случае достаточно велики, и, таким образом, классическое описание движения допустимо. Рассмотрение примеров такого рода дано в задачах к этой главе.

§ 3. Вычисление силы реакции излучения по Абрагаму и Лоренцу

Приведенный в предыдущем параграфе вывод силы реакции излучения, хотя и нагляден, но не является совершенно строгим. Задача состоит в том, чтобы получить удовлетворительную оценку силы реакции, с которой действует на заряженную частицу ее собственное поле излучения. Поэтому любое систематическое исследование должно включать рассмотрение структуры заряда частицы и ее собственного поля. Первая попытка такого исследования на основании чисто электромагнитной модели заряженной частицы была предпринята Абрагамом (1903 г.) и Лоренцом (1904 г.). Мы будем следовать рассмотрению Лоренца, приведенному в его книге [69].

Рассмотрим малую одиночную заряженную частицу с полным зарядом e и плотностью заряда $q(x)$ в системе, где частица покоятся. Частица находится во внешнем электромагнитном поле $E_{\text{внеш}}(x, t)$, $B_{\text{внеш}}(x, t)$. Как было показано в гл. 6, § 9, и гл. 11, § 11, сумма механического и электромагнитного импульсов в некотором объеме не изменяется во времени, если отсутствует поток импульса в указанный объем или из него. Абрагам и Лоренц предположили, что механический импульс заряженной частицы имеет в действительности электромагнитное происхождение. Таким образом, закон сохранения импульса может быть записан в виде

$$\frac{dG}{dt} = 0,$$

или в эквивалентной записи с использованием выражения для силы Лоренца

$$\int \left(q\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) d^3x = 0. \quad (17.17)$$

В последнем уравнении векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} представляют собой *полные* поля, а интегрирование совершается по объему частицы.

Чтобы придать соотношению (17.17) форму уравнения движения Ньютона

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внеш}},$$

разобъем полное поле на внешнее поле $\mathbf{E}_{\text{внеш}}$, $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$ и собственное поле $\mathbf{E}_{\text{соб}}$, $\mathbf{B}_{\text{соб}}$, обусловленное распределением плотности собственного заряда q и плотности тока \mathbf{J} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{внеш}} + \mathbf{E}_{\text{соб}}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{\text{внеш}} + \mathbf{B}_{\text{соб}}. \end{aligned} \quad (17.18)$$

Теперь соотношение (17.17) можно записать в виде уравнения движения Ньютона, в котором внешняя сила определяется следующим образом:

$$\mathbf{F}_{\text{внеш}} = \int \left(q\mathbf{E}_{\text{внеш}} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{\text{внеш}} \right) d^3x, \quad (17.19)$$

а производная по времени от импульса частицы равна

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \int \left(q\mathbf{E}_{\text{соб}} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{\text{соб}} \right) d^3x. \quad (17.20)$$

Если внешние поля мало меняются на протяжении размеров частицы, то внешняя сила (17.19) совпадает с обычной силой Лоренца, действующей на частицу с зарядом e и скоростью \mathbf{v} .

Для вычисления силы самодействия [интеграл в правой части уравнения (17.20)] необходимо задаться моделью заряженной частицы. Примем для простоты следующие предположения:

- частица в данный момент покоятся;
- распределение заряда неизменно (модель «жесткого» электрона) и обладает сферической симметрией.

Полученные при этих допущениях результаты справедливы лишь для нерелятивистского движения и не обладают инвариантностью относительно преобразований Лоренца. В дальнейшем этот недостаток будет исправлен.

Для частицы, покоящейся в данный момент, уравнение (17.20) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \int q(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}_{\text{соб}}(\mathbf{x}, t) d^3x. \quad (17.21)$$

Собственное поле частицы можно выразить через соответствующие потенциалы \mathbf{A} и Φ :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \left[\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right] d^3x. \quad (17.22)$$

Указанные потенциалы образуют 4-вектор $A_\mu = (\mathbf{A}, i\Phi)$:

$$A_\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{[J_\mu(\mathbf{x}', t')]_{\text{запазд}}}{R} d^3x', \quad (17.23)$$

где

$$J_\mu = (\mathbf{J}, i c \mathbf{Q}), \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'.$$

В (17.23) 4-ток J_μ следует вычислять для запаздывающего времени t' . Последнее отличается от истинного времени t на интервал порядка $\Delta t \sim a/c$, где a — характерный размер частицы. Для распределения заряда, сосредоточенного в малом объеме, этот интервал времени весьма мал. Можно считать, что за это время движение частицы меняется мало. Поэтому естественно воспользоваться в (17.23) разложением подынтегрального выражения в ряд Тейлора в окрестности $t' = t$. Так как символ $[]_{\text{запазд}}$ означает, что выражение в скобках вычисляется при $t' = t - R/c$, то любую величину, вычисляемую с учетом запаздывания, можно представить разложением

$$[]_{\text{запазд}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R}{c} \right)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} []. \quad (17.24)$$

Используя такое разложение для 4-тока в (17.23), преобразуем (17.22) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int d^3x \int d^3x' \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \times \\ & \times \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x}', t) \operatorname{grad} R^{n-1} + \frac{R^{n-1}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим члены с $n = 0$ и $n = 1$ в разложении скалярного потенциала в правой части выражения (первое слагаемое в квадратных скобках). Слагаемое с $n = 0$ пропорционально интегралу

$$\int d^3x \int d^3x' \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}(\mathbf{x}', t) \operatorname{grad} \frac{1}{R}.$$

Это слагаемое определяет электростатическую силу самодействия. Для сферически симметричного распределения заряда эта сила равна нулю. Слагаемое с $n = 1$ также равно нулю, так как содержит $\operatorname{grad} R^{n-1}$. Таким образом, первое отличное от нуля слагаемое, определяемое скалярным потенциалом, соответствует $n = 2$.

Поэтому сумму можно, изменив индекс суммирования, представить в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^{n+2}} \int d^3x \int d^3x' \varrho(\mathbf{x}, t) R^{n-1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \left\{ \quad \right\},$$

где $\left\{ \quad \right\} = \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) + \frac{\partial \varrho}{\partial t}(\mathbf{x}', t) - \frac{\text{grad } R^{n+1}}{(n+1)(n+2)R^{n-1}}.$

(17.25)

Используя уравнение непрерывности, связывающее плотности заряда и тока, можно записать выражение в фигурных скобках в (17.25) следующим образом:

$$\left\{ \quad \right\} = \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) - \frac{\mathbf{R}}{n+2} \operatorname{div}' \mathbf{J}(\mathbf{x}', t).$$

Вычисляя по частям интеграл по x' от второго члена, получаем

$$-\int d^3x' R^{n-1} \frac{\mathbf{R}}{n+2} \operatorname{div}' \mathbf{J} = +\frac{1}{n+2} \int d^3x' (\mathbf{J} \cdot \text{grad}') R^{n-1} \mathbf{R} = \\ = -\frac{1}{n+2} \int d^3x' R^{n-1} \left[\mathbf{J} + (n-1) \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{R}}{R^2} \mathbf{R} \right].$$

Таким образом, выражение в фигурных скобках в (17.25) можно записать в виде

$$\left\{ \quad \right\} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) - \left(\frac{n-1}{n+2} \right) \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^2}. \quad (17.26)$$

При «жестком» распределении заряда плотность тока равна

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}', t) = \varrho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(t).$$

Если распределение заряда обладает сферической симметрией, то единственным выделенным направлением задачи является направление вектора скорости $\mathbf{v}(t)$. Поэтому после интегрирования по x и x' останется лишь составляющая векторного выражения (17.26) вдоль направления $\mathbf{v}(t)$. Таким образом, выражение (17.26) можно заменить следующим:

$$\left\{ \quad \right\} = \varrho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(t) \left[\frac{n+1}{n+2} - \frac{n-1}{n+2} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{Rv} \right)^2 \right].$$

Далее, все направления вектора \mathbf{R} равновероятны. Поэтому величину $(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/Rv)^2$ можно заменить ее средним значением, равным $1/3$. В результате получаем окончательное простое выражение для величины в фигурных скобках в (17.25):

$$\left\{ \quad \right\} = \frac{2}{3} \varrho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(t). \quad (17.27)$$

Подставляя (17.27) в (17.25) и пренебрегая нелинейными членами в производных \mathbf{v} по времени (которые появляются при $n \geq 4$), придем к следующему выражению для силы самодействия:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^{n+2}} \frac{2}{3n!} \frac{\partial^{n+1}\mathbf{v}}{\partial t^{n+1}} \int d^3x' \int d^3x Q(\mathbf{x}') Q(\mathbf{x}) R^{n-1}. \quad (17.28)$$

Для выяснения смысла формулы (17.28) рассмотрим несколько первых членов в полученном разложении:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_0 &= -\frac{2}{3c^2} \dot{\mathbf{v}} \int d^3x \int d^3x' \frac{Q(\mathbf{x}') Q(\mathbf{x})}{R}, \\ \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_1 &= -\frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \int d^3x \int d^3x' Q(\mathbf{x}) Q(\mathbf{x}') = -\frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}, \\ \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_n &\sim \frac{e^2}{n!c^{n+2}} \mathbf{v}^{(n+1)} a^{n-1}. \end{aligned} \quad (17.29)$$

В последнем выражении a означает характерную протяженность распределения заряда частицы. Заметим, что члены разложения с $n \geq 2$ обращаются в нуль в предельном случае точечного заряда ($a \rightarrow 0$). Поэтому для сосредоточенных распределений заряда необходимо рассмотреть лишь члены разложения с $n = 0$ и $n = 1$. Слагаемое с $n = 1$ совпадает с найденной ранее силой реакции излучения (17.9). Эта сила не зависит от структуры частицы и определяется лишь величиной полного заряда. Настоящий вывод можно считать более глубоким обоснованием выражения для силы реакции по сравнению с рассмотрением, проведенным в § 2.

Член в (17.29), соответствующий $n = 0$, заслуживает специального рассмотрения. Входящий в него двойной интеграл пропорционален собственной электростатической энергии U распределения заряда

$$U = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \frac{Q(\mathbf{x}) Q(\mathbf{x}')}{R}, \quad (17.30)$$

так что член, соответствующий $n = 0$, можно записать в виде

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_0 = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2} \dot{\mathbf{v}}. \quad (17.31)$$

Это соотношение имеет вид обычного закона изменения импульса во времени. Отношение собственной электростатической энергии к c^2 можно отождествить с электромагнитной массой частицы

$$m_e = \frac{U}{c^2}. \quad (17.32)$$

Если пренебречь высшими членами разложения (17.28), то уравнение движения Ньютона для модели Абрагама — Лоренца принимает вид

$$\left(\frac{4}{3} m_e \right) \dot{\mathbf{v}} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{внеш.}} \quad (17.33)$$

Это уравнение совпадает с (17.9), за исключением численного множителя $\frac{4}{3}$ при электромагнитной массе.

§ 4. Трудности модели Абрагама — Лоренца

Хотя подход Абрагама — Лоренца представляет собой значительный шаг вперед в физическом описании заряженной частицы, в некоторых отношениях он несовершенен.

1. Очевидным недостатком является нерелятивистская природа модели. Выражение для силы реакции излучения легко обобщить на случай релятивистского движения (см. задачу 17.4), но одного этого еще недостаточно.

2. Электромагнитная масса входит в уравнение (17.33) с неверным коэффициентом. В этом проявляются присущие модели нарушения свойств лоренцовской ковариантности, что станет более ясно из следующего параграфа.

3. Чтобы иметь возможность пренебречь высшими членами разложения в выражении для силы самодействия, необходимо перейти к пределу $a \rightarrow 0$. Однако электромагнитная масса по порядку величины равна $e^2/c^2 a$. Следовательно, в пределе $a \rightarrow 0$ масса неограниченно возрастает. Если же потребовать, чтобы масса по порядку величины оставалась равной наблюдаемой массе частицы m , то мы получаем, что размер области, занятой зарядом, должен быть порядка $a \sim r_0$, где

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} .$$

Для электронов эта величина, названная *классическим радиусом электрона*, равна $2,82 \cdot 10^{-13}$ см. Хотя этот размер и очень мал, можно представить себе такие достаточно резкие движения, для которых влияние этой конечной величины в высших членах разложения становится весьма существенным¹⁾. В результате развитую «усеченную» теорию для частицы конечных размеров следует рассматривать лишь как приближенное описание.

¹⁾ Легко видеть, что отношение соседних членов разложения имеет порядок $[(a/c)(d^{n+2}v/dt^{n+2})]/(d^{n+1}v/dt^{n+1})$. Это значит, что движение должно претерпевать заметное изменение за интервал времени a/c . При $a \sim e^2/mc^2$ этот интервал совпадает с временем τ , определенным согласно (17.3). В результате мы вновь приходим к полученному прежде критерию.

4. Чтобы ограниченное распределение заряда было устойчиво, необходимы силы неэлектромагнитного характера. Поэтому в рамках уравнений Максвелла и специальной теории относительности следует отказаться от чисто электромагнитной модели материи. Нам известны сильные неэлектромагнитные взаимодействия, существующие в природе. Однако внутренняя структура частиц в настоящее время остается в основном неизвестной. Единственное исключение представляют нейтрон и протон. Их электромагнитная структура исследовалась с помощью рассеяния электронов высоких энергий, причем электроны рассматривались как точечные частицы и считалось, что законы электродинамики не изменяются на малых расстояниях, характерных для рассматриваемой задачи. Было найдено, что размер области, занятой распределением заряда и магнитного момента, по порядку величины равен $(0,5-1,0) \cdot 10^{-13} \text{ см}^4$. Эта величина одного порядка с классическим радиусом электрона r_0 , хотя и несколько меньше него. Не следует, однако, отыскивать какой-либо глубокий смысл в этом факте. Структура элементарной частицы в значительной мере определяется квантовомеханическими законами. Из величин с размерностью длины гораздо более близкое отношение к размерам нейтрона и протона имеет комптоновская длина волны π -мезона ($\hbar/m_\pi c \approx 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}$), играющего роль кванта поля ядерных сил, подобно тому как фотон является квантом электромагнитного поля ²⁾.

Наличию неэлектромагнитных сил должен соответствовать добавочный вклад m_0 в массу частицы. В рамках обсуждавшейся до сих пор модели Абрагама — Лоренца эта дополнительная масса проявляется лишь в появлении коэффициента при ускорении в уравнении (17.33).

§ 5. Трансформационные свойства модели Абрагама — Лоренца. Натяжения Пуанкаре

Странный и труднообъяснимый коэффициент ${}^4/{}_3$ при члене, характеризующем инерцию электромагнитной энергии, был впервые получен Дж. Дж. Томсоном (1881 г.). Чтобы ясно понять его происхождение, рассмотрим не уравнение движения, а собственную электромагнитную энергию и импульс в модели Абрагама — Лоренца. В гл. 6, § 9, и гл. 11, § 11, были рассмотрены законы сохранения энергии и импульса. При этом мы интерпретировали элементы четвертого столбца (или строки) тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$

¹⁾ Обсуждение экспериментов можно найти в статье Хофтадтера [52].

²⁾ То обстоятельство, что $(\hbar/m_\pi c) \approx (1/2)(e^2/m_e c^2)$, т. е. что масса π -мезона превышает массу электрона в 2×137 раз, является еще одним из числовых совпадений, которое, возможно, и заключает в себе глубокий смысл.

(11.134) как плотность импульса и энергии электромагнитного поля. Поэтому естественно в исследуемой модели заряженной частицы отождествить собственную электромагнитную энергию и импульс с соответствующим интегралом по объему от некоторого тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ собственного поля. Таким образом, 4-импульс частицы представляется в виде

$$P_\mu = \frac{i}{c} \int d^3x T_{\mu 4}, \quad (17.34)$$

где интегрирование производится по всему пространству. В развернутом виде для электромагнитной энергии и импульса частицы получим соотношения

$$\begin{aligned} E_e &= \int d^3x T_{44} = \int d^3x u_s, \\ p_{eh} &= \frac{i}{c} \int d^3x T_{h4} = \int d^3x g_{sh}, \end{aligned} \quad (17.35)$$

где u_s и g_s —соответственно плотность собственной энергии и плотность импульса.

В системе координат, относительно которой частица поконится, соотношения (17.35) дают $p_e = 0$ (так как $g_s = 0$ тождественно) и

$$E_e = \int d^3x^{(0)} T_{44}^{(0)} = U. \quad (17.36)$$

Индекс (0) означает систему координат, связанную с частицей; U — собственная электростатическая энергия (17.30).

Исходя из этих значений энергии и импульса в собственной системе отсчета частицы, можно получить соответствующие величины в другой лоренцевой системе координат и выявить таким образом их трансформационные свойства. Пусть 4-импульс электромагнитного поля в системе отсчета, движущейся со скоростью $-v$ относительно покоящейся системы координат, определяется формулой (17.34). В этой лоренцевой системе отсчета заряженная частица движется со скоростью v . Чтобы выразить (17.34) через величины в покоящейся системе отсчета, следует преобразовать подынтегральное выражение. Так как γd^3x есть лоренц-инвариантный элемент объема, то $\gamma d^3x = \gamma^{(0)} d^3x^{(0)} = d^3x^{(0)}$. Далее, тензор $T_{\mu\nu}$ преобразуется в соответствии с (11.88). В результате (17.34) можно переписать в виде

$$P_\mu = \frac{i}{\gamma c} a_{\mu\lambda} a_{4\sigma} \int d^3x^{(0)} T_{\lambda\sigma}^{(0)}.$$

Считая для удобства скорость v параллельной оси x_3 , можно использовать в качестве $a_{\mu\nu}$ коэффициенты преобразования, обратного (11.75). В этом случае, как легко показать, энергия и импульс рав-

ны соответственно

$$\begin{aligned} E_e &= \gamma \int d^3x^{(0)} [T_{44}^{(0)} - \beta^2 T_{33}^{(0)}], \\ c p_e &= \gamma \beta \int d^3x^{(0)} [T_{44}^{(0)} - T_{33}^{(0)}]. \end{aligned} \quad (17.37)$$

Полученные результаты отличаются от ожидаемых появлением добавочных членов, содержащих составляющую $T_{33}^{(0)}$ тензора натяжений Максвелла. Таким образом, мы приходим к выводу, что часть энергии и импульса частицы, обусловленная собственным электромагнитным полем, не преобразуется ожидаемым образом, если тензор натяжений собственного поля не обращается в нуль в покоящейся системе отсчета. Для модели Абрагама — Лоренца собственный тензор натяжений, очевидно, не обращается в нуль. Действительно, в случае сферической симметрии можно из условия обращения в нуль суммы диагональных элементов тензора $T_{\mu\nu}$ [см. (11.136)] вывести, что добавочный импульс в формуле (17.37), обусловленный собственными натяжениями, составляет ровно $1/3$ импульса, обусловленного собственной электромагнитной энергией. Это и приводит к появлению коэффициента $4/3$ в выражении (17.31) даже в случае нерелятивистских скоростей.

Нарушение лоренц-ковариантных свойств в соотношениях (17.37) связано с отличием от нуля собственного тензора натяжений Максвелла. В свою очередь наличие собственных натяжений является следствием нестабильности распределения заряда при чисто электромагнитных силах взаимодействия. Утверждение о неравенстве нулю тензора натяжений Максвелла для собственного поля есть лишь иное выражение того факта, что электростатические силы стремятся разрушить локализованное распределение заряда. Для стабильной конфигурации материи *полные* натяжения, обусловленные действием всех видов сил, должны обращаться в нуль.

В 1906 г. Пуанкаре обнаружил, что можно снять сразу две трудности модели Абрагама — Лоренца, постулировав существование соответствующих сил неэлектромагнитного характера, так называемых *натяжений Пуанкаре*, компенсирующих натяжения Максвелла и обеспечивающих стабильность распределения заряда частицы и обращение в нуль *полного* тензора натяжений в собственной системе координат частицы. Итак, в дополнение к электромагнитному тензору $T_{\mu\nu}$ введем неэлектромагнитный тензор энергии-импульса $P_{\mu\nu}$, так что *полный* тензор энергии-импульса будет равен

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + P_{\mu\nu}. \quad (17.38)$$

При этом 4-вектор энергии-импульса частицы будет вместо (17.34) определяться выражением

$$P_\mu = \frac{i}{c} \int d^3x S_{\mu 4}. \quad (17.39)$$

Эта величина является лоренц-ковариантной, если тензор Пуанкаре в собственной системе координат частицы имеет вид

$$P_{\mu\nu}^{(0)} = \begin{pmatrix} P_{11}^{(0)} & P_{12}^{(0)} & P_{13}^{(0)} & 0 \\ P_{21}^{(0)} & P_{22}^{(0)} & P_{23}^{(0)} & 0 \\ P_{31}^{(0)} & P_{32}^{(0)} & P_{33}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{44}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (17.40)$$

и, кроме того,

$$\int P_{ij}^{(0)} d^3x^{(0)} = - \int T_{ij}^{(0)} d^3x^{(0)}. \quad (17.41)$$

Последнее равенство математически выражает то требование, что для обеспечения стабильности заряда силы притяжения, описываемые натяжениями Пуанкаре, должны компенсировать электростатические силы отталкивания.

Модель Пуанкаре показывает, что в выражении для собственной энергии или массы не следует отделять электромагнитную часть от части, обусловленной силами другой природы, так как взятые в отдельности они не являются лоренц-ковариантными. Физический смысл имеет лишь *полная* собственная энергия или масса

$$m = \frac{1}{c^2} \int [T_{44}^{(0)} + P_{44}^{(0)}] d^3x^{(0)}. \quad (17.42)$$

Постулат Пуанкаре обеспечивает одновременно требуемые релятивистские ковариантные свойства полной энергии и импульса частицы и стабильность распределения заряда частицы. Поэтому его можно рассматривать как приемлемое решение проблемы в рамках классической теории. Происхождение и физическая природа натяжений Пуанкаре, разумеется, неизвестны. Наличие этих натяжений постулируется лишь для того, чтобы согласовать теорию с очевидным экспериментальным фактом существования устойчивых заряженных частиц, энергия и импульс которых обладают определенными твердо установленными трансформационными свойствами лоренц-инвариантности. Так как классическая электродинамика не может сама по себе обеспечить нулевые собственные натяжения, мы вынуждены выйти за ее границы.

В квантовой электродинамике (строго говоря, в теории взаимодействия фотонов с электронами и позитронами, а не с любыми заряженными частицами) возникают, по существу, те же самые трудности, хотя и в другом виде. Теория оперирует с точечными заряженными частицами, обладающими «только» зарядом $\pm e_0$ и «только» массой m_0 . Частицы, так же как и электромагнитное поле, описываются квантованным полем. Таким образом, квантовая теория описывает взаимодействие двух полей, тогда как классическая теория рассматривает взаимодействие поля с «материей».

В приближении точечных частиц вычисление собственной энергии частицы приводит к расходящемуся результату. Однако в отличие от классического результата

$$m_e^{(\text{кл})} \sim \frac{e^2}{ac^2},$$

где масса обратно пропорциональна размеру частицы, в квантовой механике мы имеем логарифмическую особенность

$$m_e^{(\text{кв})} \sim \frac{e^2}{\hbar c} m \ln \left(\frac{\hbar}{mca} \right);$$

здесь a — характерный линейный размер, стремящийся к нулю для точечных частиц. Замена линейной расходимости на логарифмическую связана со взаимной компенсацией членов, обусловленных электромагнитным и электрон-позитронным полями. Кроме того, введение электрон-позитронного поля приводит к эффекту, отсутствующему в классической теории, — расходимости полного заряда частицы. Эти вклады в массу и заряд частицы, представляемые расходящимися интегралами, можно включить в величины наблюдаемых массы и заряда, если описывающим их расходящимся интегралам приписать надлежащие релятивистски ковариантные свойства. Указанная процедура обычно называется *перенормировкой*. Метод перенормировки оказался довольно плотоворным, поскольку а) перенормировка может быть проделана релятивистски ковариантным образом, б) необходима перенормировка лишь нескольких величин (фактически лишь трех — массы, заряда и волновой функции) и в) метод приводит к четко определенной схеме вычислений. Рассчитанные этим методом слабые радиационные эффекты, например лэмбовский сдвиг и аномальный магнитный момент электрона, полностью согласуются с опытом. При этом достигается точность порядка 10^{-6} или 10^{-7} .

При квантовомеханических расчетах собственных натяжений также возникает трудность, связанная с наличием расходящихся интегралов. Один из способов решения этой проблемы состоит в использовании связи между обращением в нуль дивергенции тензора натяжений и 4-векторным характером энергии-импульса (см. задачу 11.13). Вычисление электродинамических вкладов в дивергенцию тензора натяжений и собственные натяжения показывают, что в обоих случаях появляются одинаковые расходящиеся интегралы. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что дополнительный вклад в дивергенцию тензора натяжений должен отсутствовать. На этом основании расходящиеся интегралы формально следует положить равными нулю. Так как в выражении для собственных натяжений появляются *те же самые* интегралы, можно сказать, что их следует опустить, исходя из закона сохранения энергии и импульса. Другой метод обхода указанных труд-

ностей состоит в том, что в дополнение к электромагнитному полю формально вводятся одно или несколько векторных полей, описывающих взаимодействие с частицей, а константы связи (зарядов) выбираются так, чтобы вклад дополнительных полей в собственные напряжения и дивергенцию тензора напряжений погашал соответствующие электродинамические слагаемые¹⁾. Этот метод сведения собственных напряжений к нулю по своей сути аналогичен классическим методам напряжений Пуанкаре, хотя и сильно отличается в деталях.

§ 6. Ковариантное определение собственной электромагнитной энергии и импульса заряженной частицы

В предыдущем рассмотрении имеется один странный момент. Классическая электродинамика является релятивистски ковариантной теорией. Поэтому правомерно ожидать, что при правильном вычислении любой величины требования инвариантности относительно преобразований Лоренца не будут нарушаться. Тем не менее в модели Абрагама — Лоренца — Пуанкаре, по-видимому, имеется такое нарушение. Нековариантная электромагнитная часть собственной энергии и импульса заряженной частицы уравновешивается в этой модели нековариантной частью, обусловленной напряжениями Пуанкаре, так что результат остается релятивистски ковариантным.

Можно, конечно, сказать, как и было сделано в § 5, что поскольку для обеспечения стабильной конфигурации ограниченного распределения заряда необходимы удерживающие силы неэлектромагнитного характера и соответствующие собственные поля, то лишь полные силы и напряжения имеют физический смысл. Тем не менее вполне законен вопрос, можно ли так определить чисто электромагнитную часть собственной энергии и импульса частицы, чтобы она была релятивистски ковариантной. Такое определение имело бы не только эстетическую ценность, но отделило бы, по крайней мере формально, вопрос об устойчивости от вопроса об инвариантности относительно преобразований Лоренца.

Задача определения 4-вектора энергии-импульса собственного электромагнитного поля весьма проста. Следует лишь образовать 4-вектор, сводящийся к собственной электростатической энергии частицы (17.36) в системе координат, относительно которой она покойится²⁾. Очевидно, что для получения 4-вектора следует ска-

¹⁾ Обсуждение указанных квантовомеханических подходов можно найти в статье Боровица и Коня [17].

²⁾ Впервые это было сделано, по-видимому, Квалем [61]. См. также работу Рорлиха [83].

лярно умножить тензор $T_{\mu\nu}$ на некоторый 4-вектор n_ν . Умножая произведение на инвариантный элемент объема γd^3x и интегрируя, получаем требуемое ковариантное обобщение выражения (17.36)

$$P_{e\mu} = \frac{\gamma}{c} \int d^3x T_{\mu\nu} n_\nu, \quad (17.43)$$

где n_ν представляет собой 4-вектор с составляющими $(0, i)$ в собственной системе отсчета. С помощью преобразований Лоренца (11.75) легко найти выражение для n_ν в общем случае

$$n_\nu = \left(\gamma \frac{\mathbf{v}}{c}, i\gamma \right). \quad (17.44)$$

В развернутом виде собственная энергия и импульс, выраженные через плотность энергии и импульса и тензор натяжений Максвелла, запишутся так:

$$\begin{aligned} E_e &= \gamma^2 \int d^3x (u - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}), \\ \mathbf{p}_e &= \gamma^2 \int d^3x \left(\mathbf{g} + \frac{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}}}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (17.45)$$

Полученные выражения отличаются от соотношений Абрагама — Лоренца (17.35) множителями γ^2 и дополнительными слагаемыми $-\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}}$ и $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}} / c^2$.

Физический смысл полученных ковариантных определений E_e и p_e можно установить следующим образом. Рассмотрим, например, собственную энергию. Можно сказать, что величина, которую следует отождествлять с собственной электромагнитной энергией движущегося ограниченного распределения заряда, не равна полной энергии поля, а отличается от нее на работу, совершенную электромагнитными силами (натяжениями Максвелла), которые в конечном счете компенсируются некоторыми силами неэлектромагнитного типа. В собственной системе отсчета частицы эти силы не производят работы. В результате собственная энергия и определяется формулой Абрагама — Лоренца (17.36). В движущейся же системе отсчета работа, производимая этими силами в единицу времени, равна

$$\int \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right) d^3x$$

(не существенный для наших рассуждений множитель γ опускаем). Интеграл по времени от этой величины дает как раз слагаемое, вычитаемое из полной энергии электромагнитного поля в (17.45). Совершенно аналогично слагаемое, содержащее натяжения Максвелла в выражении для импульса (17.45), представляет собой взятую с обратным знаком часть импульса, обусловленную переносом чисто электромагнитных натяжений.

Так как выражение для энергии-импульса (17.45) по самому построению представляет собой 4-вектор, нет необходимости в проверке этого факта. Тем не менее интересно, что коэффициент ${}^4/{}_3$ в выражении для импульса исчезает. В нерелятивистском предельном случае выражение для собственного магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{B}_s \approx \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}_s. \quad (17.46)$$

При этом первое слагаемое в выражении для импульса (17.45) оказывается равным

$$\mathbf{p}_{e1} \approx \int g d^3x \approx \frac{1}{4\pi c^2} \int \mathbf{E}_s \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_s) d^3x,$$

или

$$\mathbf{p}_{e1} \approx \frac{1}{4\pi c^2} \int [E_s^2 \mathbf{v} - (\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{v}) \mathbf{E}_s] d^3x. \quad (17.47)$$

Это — выражение для импульса в модели Абрагама — Лоренца. При сферической симметрии поля второе слагаемое можно усреднить по углам. Усредненное слагаемое равно ${}^1/{}_2$ от величины первого члена, так что в результате получаем значение $({}^4/{}_3)(U/c^2)\mathbf{v}$, как уже было показано ранее [см. соображения, приведенные после соотношений (17.37)].

Второе слагаемое в выражении для импульса равно

$$\mathbf{p}_{e2} \approx \frac{1}{c^2} \int \mathbf{v} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} d^3x \approx \frac{1}{4\pi c^2} \int \left[(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_s) \mathbf{E}_s - \frac{1}{2} E_s^2 \mathbf{v} \right] d^3x. \quad (17.48)$$

Если даже *не предполагать* сферической симметрии для суммарной величины импульса, то, согласно (17.47) и (17.48), получим

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_{e1} + \mathbf{p}_{e2} = \frac{\mathbf{v}}{8\pi c^2} \int E_s^2 d^3x = \frac{U}{c^2} \mathbf{v}, \quad (17.49)$$

как и следовало ожидать на основании лоренц-ковариантности.

При помощи модифицированных определений (17.45) можно с формальной точки зрения получить заведомо ковариантные выражения для энергии и импульса собственного электромагнитного поля, не рассматривая силы иного типа и вопросы устойчивости. Однако, как мы видели, эти ковариантные выражения получаются, если опустить работу и импульс, обусловленные электромагнитными силами, которые в конечном счете компенсируются силами притяжения неэлектромагнитного характера, необходимыми для устойчивости. Поэтому, по крайней мере для классического протяженного распределения заряда, мы можем либо считать вполне удовлетворительным подход Пуанкаре, либо же требовать, чтобы различные части собственной энергии и импульса были определены порознь ковариантным образом; выбор здесь является делом вкуса.

Внешне отличающееся, но весьма близкое решение вопроса о потере ковариантности, приводящей к появлению коэффициента $4/3$ в уравнении движения Абрагама — Лоренца (17.33), было найдено Ферми [41] в 1922 г. Ферми показал, что использование ковариантной формулировки принципа Гамильтона приводит к требуемой модификации выражения для силы самодействия (17.20), в результате чего коэффициент $4/3$ заменяется на единицу. Рассмотрение, в некоторых отношениях сходное с проведенным нами, было предложено также Вильсоном [119].

§ 7. Интегро-дифференциальное уравнение движения с учетом радиационного затухания

В § 2 проведено качественное рассмотрение уравнения Абрагама — Лоренца (17.9). При этом указывалось, что если радиационные эффекты в некотором смысле считать слабыми, то для описания движения можно успешно использовать метод последовательных приближений. Однако уравнение движения в дифференциальной форме допускает существование решений, не имеющих физического смысла [см., например, второе решение (17.10)], так как это уравнение содержит производные по времени более высокого порядка, чем обычное уравнение движения механики. Желательно было бы получить эквивалентное уравнение движения, имеющее правильный порядок, не приводящее к решениям, заведомо лишенным физического смысла, и позволяющее применять обычный метод последовательных приближений для нахождения решений. Мы ограничимся в дальнейшем лишь релятивистским движением, хотя обобщение на релятивистский случай получить нетрудно.

Основная идея преобразования уравнения (17.9) в эквивалентное уравнение заключается в том, что решение нового уравнения должно непрерывно переходить в соответствующее решение для нейтральной частицы в пределе, когда заряд частицы стремится к нулю. Чем меньше заряд частицы, тем меньше сила самодействия и радиационные эффекты при прочих неизменных условиях. Если считать внешнюю силу заданной функцией времени, то уравнение (17.9) можно один раз проинтегрировать по времени с помощью интегрирующего множителя. Положив

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = e^{t/\tau} \mathbf{u}(t),$$

из (17.9) получим

$$m\dot{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \mathbf{F}(t).$$

Первый интеграл имеет, следовательно, вид

$$\dot{m\mathbf{v}}(t) = \frac{e^{t/\tau}}{\tau} \int_t^C e^{-t'/\tau} \mathbf{F}(t') dt'. \quad (17.50)$$

Знак минус, стоящий в предыдущей формуле, здесь отсутствует, поскольку мы считаем неопределенным нижний предел интегрирования. Постоянная интегрирования C должна быть найдена из физических соображений.

Интегро-дифференциальное уравнение (17.50) отличается от обычных уравнений движения механики тем, что в нем ускорение частицы в любой заданный момент времени зависит не от мгновенного значения действующей силы, а от ее среднего по времени значения, взятого с некоторым весом. Наличие в выражении для силы множителя $e^{-(t'-t)/\tau}$ означает, что существен лишь малый интервал времени порядка τ . Так как τ пропорционально e^2 , то этот интервал становится бесконечно малым в пределе $e^2 \rightarrow 0$. Потребуем, чтобы в этом случае уравнение движения переходило в уравнение Ньютона: $\dot{m\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}(t)$. Этому требованию можно удовлетворить, выбрав верхний предел интегрирования в (17.50) равным бесконечности. Чтобы убедиться в этом, введем новую переменную интегрирования

$$s = \frac{1}{\tau}(t' - t).$$

Тогда уравнение (17.50) примет вид

$$\dot{m\mathbf{v}}(t) = \int_0^\infty e^{-s} \mathbf{F}(t + \tau s) ds. \quad (17.51)$$

Если сила мало меняется за время порядка τ , то можно ожидать, что разложение ее в ряд Тейлора вблизи $s = 0$ быстро сходится. Положим поэтому

$$\mathbf{F}(t + \tau s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau s)^n}{n!} \frac{d^n \mathbf{F}(t)}{dt^n} \quad (17.52)$$

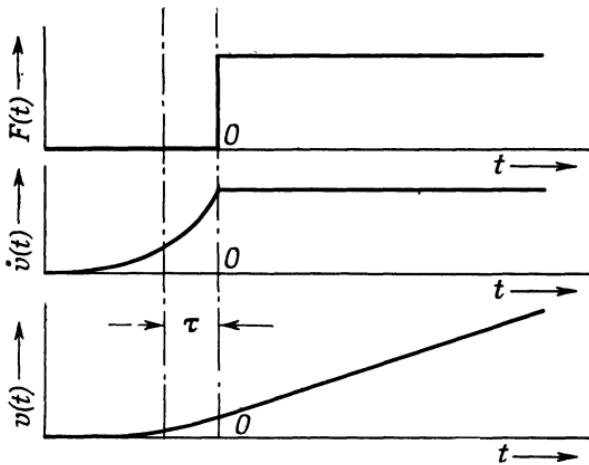
и подставим это выражение для силы в (17.51); тогда

$$\dot{m\mathbf{v}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \frac{d^n \mathbf{F}(t)}{dt^n}. \quad (17.53)$$

В пределе $\tau \rightarrow 0$ отличен от нуля лишь член ряда с $n = 0$. При этом мы приходим к обычному уравнению движения для незаряженной

частицы. Члены суммы более высокого порядка представляют собой поправки, учитывающие радиационный эффект для заряженной частицы; эти слагаемые существенны лишь при достаточно быстром изменении силы во времени.

Интегро-дифференциальное уравнение (17.51) можно считать физически оправданным эквивалентом уравнения движения Абрагама — Лоренца (17.9). Все решения уравнения (17.51) удовлетворяют и уравнению (17.9). Но при этом физически нереальные «самоускоряющиеся» решения типа (17.10) не появляются. Однако уравнению (17.51) все еще присущи некоторые недостатки. Основной



Ф и г. 17.1. «Предускорение» заряженной частицы.

из них — это нарушение традиционного принципа причинности. Как очевидно из (17.51), ускорение в момент t зависит от значения силы в моменты времени, более *поздние*, чем t . Это противоречит нашим представлениям о связи причины и результата действия. Типичный пример такого нарушения причинности проиллюстрирован на фиг. 17.1. Постоянная сила действует на частицу, начиная с момента времени $t > 0$. Из уравнения движения следует, что «предускорение» имело место еще до того, как сила «действительно» была приложена.

Чтобы понять, действительно ли указанные эффекты противоречат известным фактам, следует уточнить временные масштабы. Эффект нарушения принципа причинности ограничен во времени интервалом $\tau \sim e^2/mc^3 \sim 10^{-21}$ сек. За это время свет проходит расстояние порядка «размера» элементарных частиц. Интервалы времени такой продолжительности невозможно обнаружить макроскопическими средствами. В частности, силы, действующие на частицы, также не могут быть включены или выключены столь быстро, как показано на фиг. 17.1. Следовательно, нарушение принципа при-

чинности, заложенное в выражении (17.51), фактически не может быть обнаружено на опыте. Можно сказать, что, хотя уравнение (17.51) противоречит микроскопической причинности, оно не противоречит требованиям макроскопической причинности.

Существенное значение имеет и то обстоятельство, что рассматриваемая модель является чисто классической и фактически неприменима уже при расстояниях и временах, много больших соответственно e^2/mc^2 и τ . Действительно, согласно принципу неопределенности, включение внешней силы на интервале времени Δt соответствует неопределенности в энергии порядка $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$. Если указанная неопределенность энергии по порядку величины равна энергии покоя частицы mc^2 , то поведение последней уже будет далеко не классическим. Это накладывает квантовомеханическое ограничение на интервалы времени: $\tau_{\text{кв}} \sim \hbar/mc^2 \sim 137 \tau$. Поскольку $\tau_{\text{кв}} \gg \tau$, то можно предполагать, что в области, в которой должно быть применимо классическое описание, движение частиц происходит достаточно плавно, поэтому эффекты нарушения принципа причинности весьма мало существенны и реакция излучения лишь незначительно изменяет основное движение.

Если приложенная сила \mathbf{F} задается не как функция времени, а как функция координат, то решение интегро-дифференциального уравнения становится несколько более сложным, хотя принципиальных трудностей не возникает.

§ 8. Ширина линии и сдвиг уровня для осциллятора

Реакция излучения существенно влияет на характеристики атомных систем. Хотя полный анализ требует разработки довольно сложного формализма квантовой электродинамики, качественные характеристики видны уже из классического рассмотрения. В качестве типичного примера рассмотрим заряженную частицу, поддерживаемую одномерной линейной восстанавливающей силой с коэффициентом упругости $k = m\omega_0^2$. В отсутствие радиационного затухания частица совершает колебания с постоянной амплитудой и частотой ω_0 . Наличие реакции излучения приводит к постепенному затуханию амплитуды колебаний, так как энергия движения преобразуется в энергию излучения.

Если обозначить смещение заряженной частицы от положения равновесия через $x(t)$, то уравнение движения (17.51) для рассматриваемой задачи запишется в виде

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \int_0^\infty e^{-s} x(t + \tau s) ds = 0. \quad (17.54)$$

Так как при $\tau = 0$ решение имеет вид $x(t) \sim e^{-i\omega_0 t}$, естественно искать решение в виде

$$x(t) = x_0 e^{-at}. \quad (17.55)$$

На основании физических соображений можно ожидать, что мнимая часть a будет близка к ω_0 , по крайней мере при $\omega_0 \tau \ll 1$, но что a имеет также положительную действительную часть, описывающую затухание, обусловленное излучением. Подставляя (17.55) в (17.54), получаем кубическое уравнение для a

$$\tau a^3 + a^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (17.56)$$

Это уравнение имеет три корня: два комплексно сопряженных и один действительный. Действительный корень всегда отрицателен и должен быть отброшен [он соответствует «самоускоряющемуся» решению уравнения (17.9)]. Оба корня, соответствующие физически реализуемым процессам, могут быть представлены в замкнутом виде при произвольных τ и ω_0 , однако окончательная формула довольно сложна и пригодна лишь для численных расчетов. Нас интересует область параметров, для которой $\omega_0 \tau \ll 1$. При этом легко убедиться непосредственно из уравнения (17.56), что с точностью до членов порядка $(\omega_0 \tau)^2$ включительно a определяется соотношением

$$a = \frac{\Gamma}{2} \pm i(\omega_0 + \Delta\omega), \quad (17.57)$$

где

$$\Gamma = \omega_0^2 \tau,$$

$$\Delta\omega = -\frac{5}{8} \omega_0^3 \tau^2.$$

Величину Γ называют обычно *постоянной затухания*, а $\Delta\omega$ — *сдвигом уровня*.

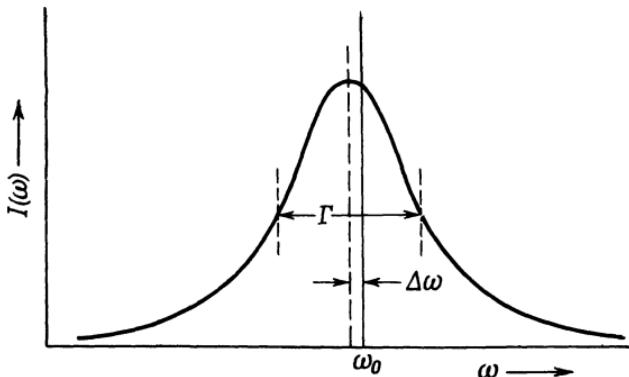
Вследствие радиационного затухания энергия осциллятора экспоненциально убывает как $e^{-\Gamma t}$. Это означает, что излучение испускается в виде пугов волн с эффективной длиной порядка c/Γ . Такие импульсы излучения конечной протяженности не являются уже строго монохроматическими, а характеризуются спектром частот, занимающим интервал порядка Γ . Точный вид спектрального распределения определяется квадратом фурье-амплитуды электрического поля или ускорения. Если пренебречь начальным процессом установления (имеющим длительность τ), то спектральная амплитуда $E(\omega)$ пропорциональна величине

$$\int_0^\infty e^{-at} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{a - i\omega}.$$

Отсюда для энергии, излучаемой в единичном интервале частот, получим

$$I(\omega) = I_0 \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (17.58)$$

где I_0 — полная излученная энергия. Такое спектральное распределение называют иногда *лоренцовой формой линии*. Ширину распределения на уровне половинной интенсивности, равную Γ , принято называть *шириной линии* (иногда применяют неудачное название «половирина»). Такая спектральная линия изображена на



Ф и г. 17.2. Уширение и сдвиг спектральной линии, обусловленные реакцией излучения.

Γ — ширина лоренцовой спектральной линии; $\Delta\omega$ — сдвиг уровня.

фиг. 17.2. Наличие реакции излучения обусловливает *уширение линии* и *сдвиг* ее по частоте.

Классическая ширина линии для электронного осциллятора, выраженная в длинах волн, является универсальной постоянной

$$\Delta\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega_0^2} \Gamma = 2\pi c\tau = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Å}.$$

При квантовомеханическом рассмотрении естественная ширина спектральной линии оказывается различной. Иногда для установления связи с классическим рассмотрением ширину линии в квантовой механике записывают в виде

$$\Gamma_{\text{кв}} = f_{ij}\Gamma,$$

где f_{ij} — «сила осциллятора» для перехода $i \rightarrow j$. Величина силы осциллятора может существенно меняться от значений, близких к единице для сильных одноэлектронных переходов, до гораздо меньших значений в других случаях.

В классической теории сдвиг уровня $\Delta\omega$ пропорционален ширине линии Γ с малым коэффициентом $\omega_0\tau \ll 1$ и таким образом гораздо

до меньше ширины. В квантовомеханическом рассмотрении (и на опыте) это не так. Расхождение объясняется тем, что механизм сдвига уровня в квантовой и классической теории различен, хотя по-прежнему определяется электромагнитным полем. Для квантованного поля излучения даже в отсутствие фотонов среднее значение *квадратов* напряженностей векторов электромагнитного поля отлично от нуля (флуктуации вакуума). Действие этих флуктуирующих полей (наряду с флуктуациями электрон-позитронного поля) на заряженную частицу и обусловливает сдвиг ее энергетического уровня. Квантовомеханическое рассмотрение приводит к следующей оценке для сдвига уровня осциллятора:

$$\frac{\Delta\omega_{\text{кв}}}{\omega_0} \sim \omega_0 \tau \ln \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_0} \right),$$

тогда как для классического сдвига уровня, обусловленного испусканием излучения, имеем

$$\frac{|\Delta\omega_{\text{кл}}|}{\omega_0} \sim (\omega_0 \tau)^2.$$

Очевидно, квантовомеханический сдвиг уровня по величине сравним с шириной линии или даже превышает ее. Впервые малый сдвиг энергетических уровней атома, обусловленный излучением, наблюдался в 1947 г. Лэмбом [62] и был назван поэтуому *лэмбовским сдвигом*. Квантовотеоретическое рассмотрение этого вопроса, требующее знания лишь основ квантовой теории поля, приведено в книге Вайскопфа [115].

§ 9. Рассеяние и поглощение излучения осциллятором

Рассеяние излучения свободными заряженными частицами было исследовано в гл. 14, § 7 и 8. Рассмотрим теперь рассеяние и поглощение излучения связанными зарядами. В качестве первого примера обсудим рассеяние излучения, имеющего частоту ω , на одиночной нерелятивистской частице с массой m и зарядом e , поддерживаемой сферически симметричной линейной восстанавливающей силой $m\omega_0^2x$. Поскольку нас будут интересовать установившиеся колебания, можно пользоваться вместо интегро-дифференциального уравнения (17.51) уравнением Абрагама — Лоренца (17.9). Уравнение движения имеет, таким образом, вид

$$m(\ddot{x} - \tau \dot{\ddot{x}} + \omega_0^2 x) = F(t).$$

Если мы хотим учесть и другие процессы диссипации (соответствующие с квантовомеханической точки зрения другим причинам затуха-

ния, существующим наряду с излучением фотонов), то нужно добавить в левой части уравнения слагаемые вида $m\Gamma' \ddot{\mathbf{x}}$, где Γ' — постоянная затухания, имеющая размерность частоты и характеризующая величину неэлектромагнитных диссипативных эффектов. Падающее электромагнитное поле является возбуждающей внешней силой. В дипольном приближении уравнение движения принимает вид

$$\ddot{\mathbf{x}} + \Gamma' \dot{\mathbf{x}} - \tau \dddot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \frac{e}{m} \mathbf{E} E_0 e^{-i\omega t}, \quad (17.59)$$

где E_0 — значение напряженности электрического поля в точке $\mathbf{x} = 0$, а \mathbf{e} — вектор поляризации падающего поля. Установившееся решение уравнения движения имеет вид

$$\mathbf{x} = \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \Gamma_t} \mathbf{e}, \quad (17.60)$$

где величину

$$\Gamma_t(\omega) = \Gamma' + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \Gamma \quad (17.61)$$

можно назвать *полной постоянной затухания*, или *полной шириной линии*. Постоянная затухания, обусловленного излучением, есть $\Gamma = \omega_0^2 \tau$. Ускоренное движение, описываемое решением (17.60), приводит к излучению электромагнитного поля. Напряженность электрического поля излучения описывается формулой (14.18):

$$\mathbf{E}_{\text{изл}} = \frac{e}{c^2} \frac{1}{r} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{x}})]_{\text{запазд}}.$$

Следовательно, выражение для составляющей поля излучения с поляризацией \mathbf{e}' имеет вид

$$\mathbf{e}' \cdot \mathbf{E}_{\text{изл}} = \frac{e^2}{mc^2} \omega^2 \frac{E_0 e^{-i\omega t} e^{ikr}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \Gamma_t} \left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}'}{r} \right). \quad (17.62)$$

Согласно определению (14.101), дифференциальное сечение рассеяния для частоты ω и поляризации \mathbf{e}' равно

$$\frac{d\sigma(\omega, \mathbf{e}')}{d\Omega} = \left| \frac{r \mathbf{e}' \cdot \mathbf{E}_{\text{изл}}}{E_0} \right|^2 = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}')^2 \left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2} \right]. \quad (17.63)$$

Множитель перед квадратной скобкой совпадает с томсоновским сечением рассеяния для свободной частицы.

Для частот, много меньших частоты связи ($\omega \ll \omega_0$), дифференциальное сечение рассеяния принимает вид

$$\frac{d\sigma(\omega, \mathbf{e}')}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}')^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4. \quad (17.64)$$

Таким образом, интенсивность рассеяния длинноволнового излучения обратно пропорциональна четвертой степени длины волны (закон рассеяния Рэлея). Как уже отмечалось в гл. 16, § 9, таким свойством обладают все системы с электрической дипольной поляризуемостью.

В области частот, близких к частоте связи ω_0 , имеется характерный резонанс и интенсивность рассеяния сильно возрастает. Вблизи резонанса дифференциальное сечение рассеяния определяется приближенным выражением

$$\frac{d\sigma(\omega, \mathbf{e}')}{d\Omega} \approx \frac{9}{16} \lambda_0^2 \frac{\Gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma_t/2)^2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}')^2, \quad (17.65)$$

где $\lambda_0 = c/\omega_0$ — резонансная длина волны (деленная на 2π), $\Gamma = \omega_0^2\tau$ — постоянная затухания, обусловленного излучением, и $\Gamma_t \approx \Gamma + \Gamma'$. Проводя суммирование по поляризациям рассеянного поля и интегрирование по всем углам, находим полное сечение рассеяния

$$\sigma_{\text{расс}}(\omega) \approx \frac{3\pi}{2} \lambda_0^2 \frac{\Gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma_t/2)^2}. \quad (17.66)$$

Полученное распределение интенсивности типично для лоренцовой формы линии с шириной Γ_t и максимальным значением сечения рассеяния

$$\sigma_{\text{расс}}(\omega_0) = 6\pi\lambda_0^2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_t} \right)^2. \quad (17.67)$$

На высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$) дифференциальное сечение рассеяния (17.63) приближается к томсоновскому сечению для свободной частицы, если не учитывать множителя $(1 + \omega^2\tau^2)^{-1}$, обусловленного радиационным торможением. В классической области этот множитель можно положить равным единице: $\omega\tau \sim 1$ соответствует энергиям фотонов $\hbar\omega \sim 137mc^2$. Квантовые эффекты становятся существенными уже при $\hbar\omega \sim mc^2$, как было показано в гл. 14, § 7, и § 7 настоящей главы.

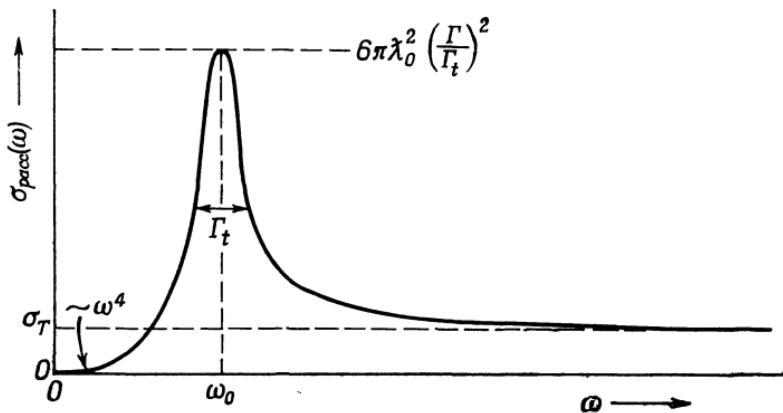
На фиг. 17.3 изображена кривая изменения полного сечения рассеяния во всем диапазоне частот, описываемом классическими формулами.

Резко выраженное резонансное рассеяние при $\omega = \omega_0$ называется *резонансной флуоресценцией*. С квантовомеханической точки зрения этот резонанс соответствует поглощению электромагнитного излучения атомом, молекулой или ядром, переходящими из основного состояния в возбужденное с последующим излучением электромагнитной энергии во всех направлениях. Множитель $6\pi\lambda_0^2$ в выражении для максимального значения сечения рас-

сияния при квантовомеханическом расчете заменяется статистическим коэффициентом

$$6\pi\lambda_0^2 \rightarrow 4\pi\lambda_0^2 \frac{2J_{\text{возб}} + 1}{2(2J_{\text{осн}} + 1)},$$

где $J_{\text{осн}}$ и $J_{\text{возб}}$ — моменты количества движения основного и возбужденного состояний, $4\pi\lambda_0^2$ — максимальное возможное сечение рассеяния для любого отдельного квантового состояния. Остальные множители представляют результат суммирования по всем



Фиг. 17.3. Зависимость полного сечения рассеяния для осциллятора от частоты.

σ_T — томсоновское сечение рассеяния для свободной частицы.

конечным магнитным подсостояниям и усреднения по начальным состояниям, а множитель 2 — статистический вес, обусловленный возможностью различной поляризации падающего излучения. Классический результат соответствует $J_{\text{осн}} = 0$ и $J_{\text{возб}} = 1$.

Поглощение излучения осциллятором уже рассматривалось в гл. 13, § 2. Роль внешнего возбуждающего поля при этом играло поле быстрой заряженной частицы, но рассмотрение [от уравнения (13.15) до (13.24)] проводилось в достаточно общем виде и может быть прямо перенесено на наш случай. Единственное отличие состоит в том, что величину Γ , которая использовалась в гл. 13, § 2, следует заменить на Γ_t [см. (17.61)], а падающее электрическое поле следует считать монохроматическим. Согласно (13.24), в дипольном приближении энергия, поглощаемая в единичном интервале частот, равна

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{e^2}{m} |E_0(\omega)|^2 \frac{2\omega^2\Gamma_t}{(\omega_t^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma_t^2}. \quad (17.68)$$

Можно определить *сечение поглощения* как отношение энергии, поглощенной в единичном интервале частот, к величине энергии

в этом частотном интервале, падающей на единицу поверхности. Падающий поток энергии равен $(c/2\pi) |E_0(\omega)|^2$. Следовательно, сечение поглощения оказывается равным

$$\sigma_{\text{погл}}(\omega) = 4\pi \frac{e^2}{mc} \frac{\omega^2 \Gamma_t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2}. \quad (17.69)$$

Учитывая, что $\Gamma = \omega_0^2 \tau$, можно последнее выражение переписать в виде

$$\sigma_{\text{погл}}(\omega) = 6\pi \lambda_0^2 \frac{\omega^2 \Gamma \Gamma_t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2}. \quad (17.70)$$

В трех областях частот $\omega \ll \omega_0$, $\omega \sim \omega_0$ и $\omega \gg \omega_0$ сечение поглощения можно описать приближенными выражениями

$$\sigma_{\text{погл}}(\omega) \approx \begin{cases} 6\pi \lambda_0^2 \frac{\omega^2 \Gamma \Gamma_t}{\omega_0^4} & \text{при } \omega \ll \omega_0, \\ \frac{3\pi}{2} \lambda_0^2 \frac{\Gamma \Gamma_t}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma_t/2)^2} & \text{при } \omega \sim \omega_0, \\ 6\pi \lambda_0^2 \frac{\Gamma \Gamma_t}{\omega^2} & \text{при } \omega \gg \omega_0. \end{cases} \quad (17.71)$$

Мы видим, что вблизи резонансной частоты ω_0 кривая сечения поглощения, как и кривая сечения рассеяния, имеет лоренцову форму, но по величине сечение поглощения превышает сечение рассеяния в Γ_t/Γ раз. На высоких частотах $\Gamma_t \approx \omega^2 \tau$, и, таким образом, величина сечения поглощения стремится к постоянному томсоновскому сечению (мы вновь пренебрегаем величиной ωt по сравнению с единицей).

Сечение поглощения иногда называют *полным* сечением, так как оно учитывает влияние всех процессов, как рассеяния, так и других диссипативных эффектов, характеризуемых величиной Γ' . Для нахождения сечения поглощения следует лишь вычислить энергию, поглощенную осциллятором, не интересуясь, будет ли она затем испущена в виде электромагнитных волн или рассеется каким-либо иным способом. Сечение процессов, отличных от рассеяния, называют *сечением реакции* $\sigma_r(\omega)$. Оно может быть вычислено просто как разность полного сечения и полного сечения рассеяния. Можно предложить следующую единообразную форму записи трех введенных сечений, сходную с выражением (17.70):

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\text{расс}}(\omega) \\ \sigma_r(\omega) \\ \sigma_{\text{погл}}(\omega) \end{array} \right\} = 6\pi c^2 \frac{(\omega^2/\omega_0^2) \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Gamma, \\ \Gamma', \\ \Gamma_t. \end{array} \right. \quad (17.72)$$

В выражения для всех трех сечений входит одинаковый характерный резонансный знаменатель. Интенсивность радиационных процессов пропорциональна $(\omega^2/\omega_0^2) \Gamma = \omega^2 \tau$. Прочие диссипативные процессы пропорциональны Γ' . Общий множитель $(\omega^2/\omega_0^2) \Gamma$ характеризует падающее излучение. В выражении для сечения рассеяния появляется второй множитель $(\omega^2/\omega_0^2) \Gamma$, а в сечении реакции — множитель Γ' . Полное сечение (сечение поглощения) определяется полной шириной линии Γ_t . К такому же характерному произведению постоянных затухания или ширин линий, соответствующих начальному и конечному состояниям процесса, приводит и квантовомеханическое рассмотрение теории резонансных реакций.

Интегрируя сечение поглощения по всем частотам и пренебрегая сечением рассеяния, получаем соотношение, известное как *правило дипольных сумм*. Пренебрежение рассеянием эквивалентно предположению о том, что полная ширина линии Γ_t в (17.70) постоянна для всех частот. Как легко показать, в этом приближении интеграл от $\sigma_{\text{погл}}(\omega)$ по всем частотам оказывается равным

$$\int_0^\infty \sigma_{\text{погл}}(\omega) d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{mc}. \quad (17.73)$$

Мы видим, что результат интегрирования содержит лишь массу и заряд частицы и не зависит от иных характеристик, например от ω_0 и Γ' . Полученное соотношение эквивалентно выражению (13.26) для полной энергии, поглощенной системой из поля пролетающей частицы.

Правило дипольных сумм представляет собой общий результат, справедливый как в классической, так и в квантовой теории и не зависящий от частотных характеристик системы. Для его справедливости необходимо выполнение лишь двух физических требований: а) нормальные типы колебаний системы затухают во времени (хотя бы весьма медленно) из-за наличия потерь и б) на высоких частотах влияние связи несущественно и частица ведет себя как свободная (см. задачу 17.8).

Для системы независимых частиц с зарядами e_j и массами m_j , связанных с фиксированным центром сил, правило сумм обобщается очевидным образом:

$$\int_0^\infty \sigma_{\text{погл}}(\omega) d\omega = \frac{2\pi^2}{c} \sum_j \frac{e_j^2}{m_j}. \quad (17.74)$$

Если частицы удерживаются в системе силами взаимодействия, следует исключить движение общего центра масс. Как легко показать, это достигается вычитанием из суммы (17.74) члена Q^2/M ,

где Q — полный заряд системы частиц, а M — полная масса. Для ядер с Z протонами и $N (= A - Z)$ нейтронами, согласно правилу сумм, получаем

$$\int_0^{\infty} \sigma_{\text{погл}}(\omega) d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{mc} \frac{NZ}{A}, \quad (17.75)$$

где e — заряд протона, а m — масса одного нуклона ¹⁾.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

История попыток создания классических моделей заряженных частиц и связанные с этим вопросы приводятся в книге Уиттекера [116]. Идеи Абрагама, Лоренца, Пуанкаре и других в четкой и изящной форме изложены Лоренцом [69], § 26—37, 179—184. Рассуждения Лоренца представляются несколько старомодными с современной точки зрения, но для своего времени они могли служить примером ясного физического мышления.

Ясное, хотя и краткое, рассмотрение вопроса о собственной энергии и реакции излучения дано в книгах Беккера [6], § 13, 14, 66, Ландау и Лифшица [63], гл. 9, § 9, Пановского и Филиппса [78], гл. 20, 21, Зоммерфельда [102], § 36.

Классическая теория релятивистского точечного электрона впервые разработана Дираком [36]. Интегро-дифференциальное уравнение движения (17.51), по-видимому, впервые опубликовано в книге Иваненко и Соколова [53], § 35. Многие аспекты классической релятивистской теории исследованы Рорлихом [82, 83].

Примеры решения интегро-дифференциального уравнения движения приведены в работе Пласса [80].

ЗАДАЧИ

17.1. Нерелятивистская частица с зарядом e и массой m удерживается линейной изотропной восстанавливающей силой с коэффициентом упругости $m\omega_0^2$.

С помощью уравнений (17.13) и (17.16) показать, что энергия и момент количества движения частицы экспоненциально убывают как $e^{-\Gamma t}$ от их начального значения, где $\Gamma = \omega_0^2 t$.

17.2. Нерелятивистский электрон с зарядом $-e$ и массой m , удерживающийся кулоновским потенциалом притяжения $(-Ze^2/r)$, движется при отсутствии реакции излучения по круговой орбите.

а) Показать, что уравнения изменения энергии (17.13) и момента количества движения (17.16) приводят к следующему закону медленного изме-

¹⁾ В действительности, правило сумм для ядерного фотоэффекта содержит еще добавочный множитель $(1+x)$, где $x \sim 1/2$ учитывает обменные силы в ядре. Физически это увеличение можно объяснить, представляя обменные силы как результат переноса виртуальных заряженных π-мезонов между нуклонами. Эти виртуальные заряженные мезоны вносят вклад в полный ядерный ток. Так как отношение e/m для них больше, чем для нуклонов, происходит увеличение дипольной суммы по сравнению с ее обычным значением (17.75).

нения радиуса орбиты:

$$r^3(t) = r_0^3 - 9Z(c\tau)^3 \frac{t}{\tau},$$

где r_0 — значение $r(t)$ при $t = 0$.

б) Для круговых орбит в атоме Бора радиусы и главные квантовые числа n связаны соотношением $r = n^2 a_0 / Z$. Определив вероятность переходов $n \rightarrow (n-1)$ как $-dn/dt$, показать, что полученный в п. «а» результат согласуется с решением задачи 14.9.

в) На основании решения, приведенного в п. «а», получить численные оценки времени перехода μ -мезонов с массой $m = 207m_e$ с круговой орбиты, характеризуемой главным квантовым числом $n_1 = 10$, на орбиты с $n_2 = 4$, $n_2 = 1$. Полученные величины дают разумную оценку для времени перехода μ -мезонов на низшую орбиту после захвата их изолированным атомом.

17.3. Электрон с энергией связи ε и моментом количества движения L движется в кулоновском поле $(-Ze^2/r)$ притяжения по эллиптической орбите

$$\frac{1}{r} = \frac{Ze^2 m}{L} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2eL^2}{Z^2 e^4 m} \cos(\theta - \theta_0)} \right],$$

причем эксцентриситет ξ эллипса равен квадратному корню перед косинусом.

а) Производя соответствующие усреднения по времени для мгновенной орбиты, показать, что медленные изменения энергии и момента количества движения определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{2^{3/2}}{3} \frac{Z^3 e^8 m^{1/2}}{c^3} \frac{\varepsilon^{3/2}}{L^5} \left(3 - \frac{2eL^2}{Z^2 e^4 m} \right), \\ \frac{dL}{dt} &= -\frac{2^{5/2}}{3} \frac{Ze^4}{m^{1/2} c^3} \frac{\varepsilon^{3/2}}{L^2}. \end{aligned}$$

б) Показать, что при начальных значениях ε и L , равных ε_0 и L_0 ,

$$\varepsilon(L) = \frac{Z^2 e^4 m}{2L^2} \left[1 - \left(\frac{L}{L_0} \right)^3 \right] + \frac{\varepsilon_0}{L_0} L.$$

Вычислить эксцентриситет эллипса и убедиться, что он убывает пропорционально $(L/L_0)^{3/2}$, и, таким образом, форма орбиты стремится с течением времени к круговой.

в) Сравнить полученные результаты с решением для частного случая круговой орбиты в задаче 17.2.

Указание. При усреднении по времени воспользоваться законом равных площадей Кеплера ($dt = mr^2 d\theta / L$) для преобразования интегралов по времени в интегралы по углу.

17.4. Согласно теории Дирака (1938 г.), релятивистское уравнение движения классического точечного электрона имеет вид

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu^{\text{внеш}} + F_\mu^{\text{изл}},$$

где p_μ представляет собой 4-импульс частицы, τ — ее собственное время, а $F_\mu^{\text{изл}}$ — ковариантное обобщение силы реакции излучения (17.8).

Учитывая требование, что любая сила должна удовлетворять соотношению $F_\mu p_\mu = 0$, показать, что

$$F_{\mu \text{изл}} = \frac{2e^2}{3mc^3} \left[\frac{d^2 p_\mu}{d\tau^2} - \frac{p_\mu}{m^2 c^2} \left(\frac{dp_v}{d\tau} \frac{dp_v}{d\tau} \right) \right].$$

17.5. а) Показать, что для одномерного релятивистского движения уравнение движения, приведенное в задаче 17.4, может быть представлено в виде

$$\dot{p} - \frac{2e^2}{3mc^3} \left(\ddot{p} - \frac{\dot{p}\dot{p}^2}{p^2 + m^2 c^2} \right) = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} f(\tau),$$

где p — импульс частицы в направлении движения, точка означает дифференцирование по собственному времени, а $f(\tau)$ — обычная сила Ньютона, зависящая от собственного времени.

б) Показать, что с помощью подстановки $p = mc \sinh u$ релятивистское уравнение приводится к уравнению Абрагама — Лоренца (17.9) для u и τ . Получить общее решение для $p(\tau)$ с начальными условиями

$$p(\tau) = p_0 \quad \text{при } \tau = 0.$$

17.6. Нерелятивистская частица с зарядом e и массой m ускоряется постоянным электрическим полем в зазоре длиной d . Идеализируя, будем считать, что частица совершает одномерное движение под действием внешней силы $m\alpha$, отличной от нуля лишь на интервале $(0, d)$. Если не учитывать радиационного затухания, то частица с начальной скоростью v_0 будет равномерно ускоряться в течение времени $T = (-v_0/\alpha) + \sqrt{(v_0/\alpha)^2 + (2d/\alpha)}$ и выйдет из зазора (при $x = d$) с конечной скоростью $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2\alpha d}$.

При учете радиационного затухания параметры движения изменяются: частица пролетает зазор за время T' и выходит из него со скоростью v'_1 .

а) Решить интегро-дифференциальное уравнение движения частицы, учитывающее влияние излучения, считая, что T и T' много больше τ . Начертить графики зависимости скорости от времени с учетом и без учета радиационного затухания.

б) Показать, что с учетом лишь низших членов разложения по τ

$$T' = T - \tau \left(1 - \frac{v_0}{v_1} \right),$$

$$v'_1 = v_1 - \frac{\alpha^2 \tau}{v_1} T.$$

в) Убедиться, что сумма излученной энергии и изменения кинетической энергии частицы равна работе, совершающей приложенным полем.

17.7. В классической модели, описывающей уширение спектральных линий из-за соударений, принимается, что в результате соударения колебания осциллятора прекращаются и, следовательно, после некоторого времени колебаний T когерентный волновой цуг обрывается.

а) Считая, что вероятность соударения в интервале времени $(T, T + dT)$ для осциллятора, рассмотренного в § 8, определяется законом $v e^{-vT} dT$, где v — средняя частота соударений, показать, что усредненное спектральное распределение интенсивности имеет вид

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\Gamma + 2v}{(\omega - \omega_0)^2 - (\Gamma/2 + v)^2},$$

так что ширина линии равна $(\Gamma + 2v)$

б) Для дублета натрия ($\lambda \approx 5893 \text{ \AA}$) сила осциллятора $f = 0,975$ и, таким образом, естественная ширина линии близка к классической величине $\Delta\lambda = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$.

Оценить допплеровское уширение линии, считая, что атомы натрия находятся в термодинамическом равновесии при температуре 500° K , и сравнить результат с естественной шириной. Приняв для сечения соударений величину 10^{-16} cm^2 , определить зависимость обусловленной соударениями ширины линии дублета натрия от давления паров натрия. При каком давлении уширение линии из-за соударений совпадает с естественной шириной и при каком — с допплеровской шириной?

17.8. Частица колеблется под действием приложенного электрического поля $E_0 e^{-i\omega t}$. Дипольный момент этого осциллятора

$$\mathbf{p} = \alpha(\omega) E_0 e^{-i\omega t}.$$

а) Показать, что сечение поглощения для диполя может быть записано в виде

$$\sigma_{\text{погл}}(\omega) = \frac{2\pi}{c} [-i\omega\alpha(\omega) + \text{Компл. сопр.}].$$

б) Используя лишь то обстоятельство, что все нормальные типы колебаний должны обладать некоторым затуханием и что поляризуемость $\alpha(\omega)$ на высоких частотах должна стремиться к величине $(-e^2/m\omega^2)$, соответствующей свободным частицам, показать, что сечение поглощения удовлетворяет следующему правилу дипольных сумм:

$$\int_0^{\infty} \sigma_{\text{погл}}(\omega) d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{mc}.$$