Глава 0

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для понимания этой книги надо знать только некоторые свойства вещественных чисел и, кроме того, надо обладать в разумных пределах тем неоценимым качеством, которое обычно называют математической зрелостью.

Все определения и основные теоремы, существенные для дальнейшего, собраны в этой главе. Изложение в достаточной мере замкнуто, но многие детали опускаются — особенно это относится к обсуждению числовой системы. Наиболее глубокие результаты этой главы — теоремы из теории множеств; систематическое их изложение дано в Добавлении. Поскольку основное назначение нулевой главы — служить в дальнейшем для ссылок, мы предлагаем читателю, просмотрев первые два параграфа, обратиться к главе 1, возвращаясь к остальной части данной главы по мере надобности. Многие из следующих ниже определений повторяются затем в основном тексте при первом появлении соответствующего понятия.

МНОЖЕСТВА

Мы будем иметь дело с множествами и с элементами множеств. «Множество», «класс», «семейство» и «совокупность» — для нас синонимы *); символ $\in$ будет обозначать отношение принадлежности элемента множеству. Таким образом, $x \in A$ тогда и только тогда, когда x является членом (или «элементом», или «точкой») множества A. Два множества совпадают тогда и только

*) По техническим причинам (они излагаются в Добавлении) стоит различать два типа совокупностей. Термин «множество» будет сохранен за теми из классов, которые сами могут быть элементами классов. Это различие не играет особой роли в данной книге: за единственным нетривиальным исключением каждый класс, который в ней встретится (до Добавления), будет одновременно и множеством.

тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов; знак равенства всегда будет использоваться для обозначения совпадения. Следовательно, $A=B$, если для каждого x $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

Для выделения множеств будут употребляться скобки; именно, $\{x: \ldots$ (утверждение об x)$\ldots\}$ — множество всех тех x, для которых верно сформулированное в скобках утверждение. Иными словами, $y \in \{x: \ldots$ (утверждение об x)$\ldots\}$ в том и только в том случае, когда соответствующее утверждение об y имеет место. Например, пусть A — какое-нибудь множество; в этом случае $y \in \{x : x \in A\}$ тогда и только тогда, когда $y \in A$. Поскольку множества, состоящие из одних и тех же элементов, совпадают, $A=\{x : x \in A\}$ — факт, приятный, если не удивительный. Следует понимать, что в описанной схеме конструирования множеств символ x играет роль связанной переменной — мы можем заменить его любой другой переменной, не входящей в остальную часть формулировки определяющего утверждения. Таким образом, $\{x : x \in A\}=\{y : y \in A\}$, но $\{x : x \in A\}=\{A : A \in A\}$.

Есть одно очень полезное правило, касающееся построения множеств по описанному образцу. Если два множества построены по указанному выше правилу с помощью двух различных, но логически эквивалентных утверждений, то они совпадают. В этом можно убедиться, проверив, что тогда рассматриваемые множества состоят из одних и тех же элементов. Например, если A и B — множества, то $\{x : x \in A$ *или* $x \in B\}=\{x : x \in B$ *или* $x \in A\}$, ибо y принадлежит первому множеству тогда и только тогда, когда $y \in A$ или $y \in B$, а так бывает тогда и только тогда, когда $y \in B$ или $y \in A$, что выполняется тогда и только тогда, когда y является элементом второго множества. Все теоремы следующего раздела доказываются подобным же образом.

ПОДМНОЖЕСТВА И ДОПОЛНЕНИЯ; ОБЪЕДИНЕНИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Пусть A и B — множества (или семейства); говорят, что A является *подмножеством* (*подсемейством*) множества B в том и только в том случае, когда каждый эле-