тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов; знак равенства всегда будет использоваться для обозначения совпадения. Следовательно, $A=B$, если для каждого x $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

Для выделения множеств будут употребляться скобки; именно, $\{x: \ldots$ (утверждение об x)$\ldots\}$ — множество всех тех x, для которых верно сформулированное в скобках утверждение. Иными словами, $y \in \{x: \ldots$ (утверждение об x)$\ldots\}$ в том и только в том случае, когда соответствующее утверждение об y имеет место. Например, пусть A — какое-нибудь множество; в этом случае $y \in \{x: x \in A\}$ тогда и только тогда, когда $y \in A$. Поскольку множества, состоящие из одних и тех же элементов, совпадают, $A=\{x: x \in A\}$ — факт, приятный, если не удивительный. Следует понимать, что в описанной схеме конструирования множеств символ x играет роль связанной переменной — мы можем заменить его любой другой переменной, не входящей в остальную часть формулировки определяющего утверждения. Таким образом, $\{x: x \in A\}=\{y: y \in A\}$, но $\{x: x \in A\}=\{A: A \in A\}$.

Есть одно очень полезное правило, касающееся построения множеств по описанному образцу. Если два множества построены по указанному выше правилу с помощью двух различных, но логически эквивалентных утверждений, то они совпадают. В этом можно убедиться, проверив, что тогда рассматриваемые множества состоят из одних и тех же элементов. Например, если A и B — множества, то $\{x: x \in A$ *или* $x \in B\}=\{x: x \in B$ *или* $x \in A\}$, ибо y принадлежит первому множеству тогда и только тогда, когда $y \in A$ или $y \in B$, а так бывает тогда и только тогда, когда $y \in B$ или $y \in A$, что выполняется тогда и только тогда, когда y является элементом второго множества. Все теоремы следующего раздела доказываются подобным же образом.

ПОДМНОЖЕСТВА И ДОПОЛНЕНИЯ; ОБЪЕДИНЕНИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Пусть A и B — множества (или семейства); говорят, что A является *подмножеством* (*подсемейством*) множества B в том и только в том случае, когда каждый элемент из A входит в B. Мы говорим при этом также, что A *содержится* в B, или что B *содержит* A, и пишем $A \subset B$, $B \supset A$ соответственно. Таким образом, $A \subset B$ тогда и только тогда, когда для каждого x верно, что $x \in B$, коль скоро $x \in A$. Множество A называется *собственным подмножеством* множества B (A строго содержится в B и B строго содержит A) тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $A \neq B$. Если A является подмножеством множества B, а B является подмножеством множества C, то ясно, что A является подмножеством множества C. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$, ибо в этом случае каждый элемент множества A является элементом множества B, и наоборот.

Объединение (*сумма*, *логическая сумма*) множеств A и B, обозначаемое через $A \cup B$, — это множество всех точек, принадлежащих либо A, либо B; таким образом, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ *или* } x \in B\}$. Следует иметь в виду, что слово «или» используется здесь (и всюду в дальнейшем) в неисключающем смысле — точки, принадлежащие и A, и B, тоже входят в $A \cup B$. *Пересечение* множеств A и B, обозначаемое через $A \cap B$, состоит из всех точек, принадлежащих A и B одновременно. *Пустое множество* обозначается *) через Λ; оно определяется как $\{x : x \neq x\}$. Вместо $x \neq x$ в этом определении можно было бы использовать любое всегда ложное утверждение. Пустое множество является подмножеством каждого множества A, ибо каждый элемент множества Λ (таких нет) принадлежит A. Включения $\Lambda \subset A \cap B \subset A \subset A \cup B$ выполняются для любой пары множеств A и B. Говорят, что множества A и B *не пересекаются*, или *дизъюнктны*, тогда и только тогда, когда $A \cap B = \Lambda$; иными словами, ни один из элементов множества A не принадлежит B. Множества A и B *пересекаются* тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна точка, принадлежащая им обоим; в этом случае $A \cap B \neq \Lambda$. Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство множеств (элементами $\mathfrak{A}$ являются множества); говорят, что $\mathfrak{A}$ — *дизъюнктное семейство*, тогда и только

*) Это — принятое у нас обозначение; в книге Келли для обозначения пустого множества употребляется обычный нуль, что может привести к путанице. (*Прим. перев.*)

тогда, когда никакие два множества, являющихся его элементами, не пересекаются.

Абсолютное дополнение множества A есть $\{x : x \notin A\}$; обозначается *) оно через $\setminus A$. *Относительное дополнение* множества A по отношению к множеству X есть множество $X \cap \setminus A$, обычно обозначаемое через $X \setminus A$. Последнее множество называется также *разностью* X и A. Для любого множества A имеет место $\setminus\setminus A = A$. Соответствующее соотношение для относительных дополнений чуть сложнее; оно выписано в формулировке теоремы 0.2.

Следует очень тщательно различать «элементы» и «подмножества». Множество, единственным элементом которого является x, называется *одноточечным* и обозначается через $\{x\}$. Обратите внимание, что множество $\{\Lambda\}$ не пусто, ибо $\Lambda \in \{\Lambda\}$. Следовательно, $\Lambda \neq \{\Lambda\}$. Вообще, $x \in A$ в том и только в том случае, когда $\{x\} \subset A$.

В формулировке следующих двух теорем (мы их доказали пока лишь частично) выписаны наиболее часто применяющиеся соотношения между определенными выше понятиями. Это — основные соотношения, часто мы будем пользоваться ими, не оговаривая этого специально.

1. Теорема. *Пусть A и B — подмножества множества X. Тогда $A \subset B$ в том и только в том случае, когда выполняется какое-нибудь (и тогда любое) из следующих условий*:

$$A \cap B = A, \quad B = A \cup B, \quad X \setminus B \subset X \setminus A,$$

$$A \cap X \setminus B = \Lambda \quad \textit{или} \quad (X \setminus A) \cup B = X.$$

2. Теорема. *Пусть A, B, C и X — любые множества. Тогда*:

(а) $X \setminus (X \setminus A) = A \cap X$.

(б) (*коммутативность*) $A \cup B = B \cup A$ *и* $A \cap B = B \cap A$.

---

*) У Келли обозначение $\sim A$. Однако уже запись $X \sim A$ была бы двусмысленной — обычно она понимается как утверждение эквивалентности. (*Прим. перев.*)

(в) (*ассоциативность*) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *и* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(г) (*дистрибутивность*) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *и* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(д) (*формулы де Моргана*) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap \cap (X \setminus B)$ *и* $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

Доказательство. Доказательство (а): x является элементом $X \setminus (X \setminus A)$ тогда и только тогда, когда $x \in X$ и $x \notin X \setminus A$. Так как $x \notin X \setminus A$ тогда и только тогда, когда $x \notin X$ или $x \in A$, то соотношение $x \in X \setminus (X \setminus A)$ выполняется в том и только в том случае, когда $x \in X$ и либо $x \notin X$, либо $x \in A$. Первая из этих альтернатив невозможна, значит, $x \in X \setminus (X \setminus A)$ тогда и только тогда, когда $x \in X$ и $x \in A$, т. е. когда $x \in X \cap A$. Следовательно, $X \setminus (X \setminus A) = A \cap X$. Доказательство первой половины (г): точка x является элементом множества $A \cap (B \cup C)$ эквивалентно тому, что $x \in A$, и $x \in B$ или $x \in C$. Так будет в том и только в том случае, когда x принадлежит и A, и B или x принадлежит и A, и C. Значит, $x \in A \cap (B \cup C)$ тогда и только тогда, когда $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, что и требовалось

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — множества; через $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots \cup A_n$ обозначается их объединение, а через $A_1 \cap \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ — их пересечение. Как группируются члены при вычислении объединения или пересечения — безразлично в силу законов ассоциативности. Нам придется иметь дело также с объединениями элементов бесконечного семейства множеств; чрезвычайно удобно иметь специальное обозначение для таких объединений. Рассмотрим следующую ситуацию: предположим, что для каждого элемента a множества A, которое мы будем называть индексным множеством, или множеством индексов, задано некоторое множество X_a. Тогда объединение всех таких X_a, обозначаемое через $\cup\{X_a : a \in A\}$, определяется как множество всех точек x таких, что $x \in X_a$ хотя бы для одного a из A.

Аналогично пересечение множеств X_a по всем a из A определяется как $\{x : x \in X_a$ *для каждого* a *из* $A\}$; обозначается оно через $\cap\{X_a : a \in A\}$. Очень важен случай, когда индексное множество само является некоторым семейством $\mathfrak{A}$ множеств и X_A есть множество A для каждого A из $\mathfrak{A}$. Тогда предшествующие определения превращаются в $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\} = \{x : x \in A$ *для некоторого* A *из* $\mathfrak{A}\}$ и $\bigcap\{A : A \in \mathfrak{A}\} = \{x : x \in A$ *для каждого* A *из* $\mathfrak{A}\}$.

Есть много теорем, алгебраических по своему характеру, об объединениях и пересечениях элементов семейств множеств, но нам понадобится только следующий результат, доказательство которого опускается.

3. Теорема. *Пусть A — индексное множество и для каждого a из A X_a является подмножеством некоторого фиксированного множества Y. Тогда:*

(а) *Для любого подмножества B множества A* $\bigcup\{X_b : b \in B\} \subset \bigcup\{X_a : a \in A\}$ *и* $\bigcap\{X_b : b \in B\} \supset \bigcap\{X_a : a \in A\}$.

(б) (*Формулы де Моргана*) $Y \setminus \bigcup\{X_a : a \in A\} = \bigcap\{Y \setminus X_a : a \in A\}$ *и* $Y \setminus \bigcap\{X_a : a \in A\} = \bigcup\{Y \setminus X_a : a \in A\}$.

Словесное описание формулы де Моргана: дополнение к объединению является пересечением дополнений, и дополнение к пересечению является объединением дополнений. Подчеркнем, что необходимо добиться разумной легкости при проведении такого рода теоретико-множественных вычислений. В Добавлении дан длинный перечень теорем; рекомендую начинающему читателю поупражняться в их доказательстве. (См. параграф, касающийся элементарной алгебры классов.)

4. Замечания. В большинстве ранних работ по теории множеств объединение множеств A и B обозначалось через $A+B$, а пересечение — через AB по аналогии с обычными операциями над вещественными числами. Некоторые из алгебраических законов, касающихся операций над числами, остаются при этом верными и для множеств. Однако есть серьезная причина отказаться от такой системы записи — часто теоретико-множественные вычисления выполняются в группе, поле или линейном пространстве. Если A и B — какие-нибудь подмножества множества элементов группы, в которой операция записывается аддитивно, то $\{c : c = a + b$ *для некоторого a из A и некоторого b из B*$\}$ — естественный претендент на обозначение $A+B$; столь же естественно обозначить множество $\{x : -x \in A\}$ через $-A$. Так как эти множества систематически появляются в тех же вы-

числениях, в которых участвуют объединения, пересечения и дополнения, наш выбор обозначений представляется более обоснованным.

Способ задания множеств, принятый нами здесь, наиболее широко распространен; однако обозначение «E_x» — «множество всех x таких, что» тоже употребительно. Слабое место принятого обозначения таково: не всегда ясно, что является переменной. Поясним на примере. Множество квадратов положительных чисел весьма естественно было бы обозначить через $\{x^2 : x>0\}$; действуя в том же духе, можно было бы написать $\{x^2+a^2 : x<1+2a\}$. К сожалению, последнее выражение имеет три различных толкования, а именно: $\{z :$ *для некоторого* x *и некоторого* a $z=x^2+a^2$ *и* $x<1+2a\}$, $\{z :$ *для некоторого* x $z=x^2+a^2$ *и* $x<1+2a\}$ и $\{z :$ *для некоторого* a $z=x^2+a^2$ *и* $x<1+2a\}$. Все эти множества совершенно различны, ибо первое не зависит ни от x, ни от a, второе зависит от a, а третье зависит от x. Технический выход из затруднения: сказать, что в первом случае и x, и a — связанные переменные, что во втором случае связанной переменной является только x, а связанной переменной в третьем — только a. Чтобы избежать языковых сложностей, условимся при каждом появлении скобочных обозначений ставить на первое место после скобки перед двоеточием связанную переменную, обозначающую точку определяемого множества.

Наконец, интересно отметить еще один момент, связанный с системой обозначений. Читая выражение типа $A \cap (B \cup C)$, нам неизбежно приходится вставлять дополнительные слова. Этого, однако, можно было бы избежать, чуть-чуть видоизменив обозначения. Если бы вместо $A \cup B$ мы условились писать $\cup AB$, соответственно $\cap AB$ вместо $A \cap B$, никаких словесных дополнений при чтении не потребовалось бы. (Это — общий метод исключения вспомогательных слов; он хорошо известен в математической логике.) В измененных таким образом обозначениях первый дистрибутивный закон и первый ассоциативный закон запишутся так: $\cap A \cup BC = \cup \cap AB \cap AC$ и $\cup A \cup BC = \cup \cup ABC$. Сокращенная запись удобна и для чтения: например, $\cup AB$ читается как объединение A и B.

2*