ОТНОШЕНИЯ

Наше изложение основывается на понятии множества *). Это ставит перед нами задачу определения остальных понятий через понятие множества. В частности, это относится к понятиям упорядочения и функции. Оказывается, что последние можно трактовать как некоторые отношения, причем отношения можно естественным образом определять как множества со специальной структурой. В связи с этим в настоящем параграфе вкратце излагаются определения и элементарные теоремы из алгебры отношений.

Предположим, что задано некоторое отношение (в интуитивно ясном смысле) между определенными парами объектов. Основная идея состоит в том, что это отношение можно реализовать в виде множества всех пар связанных им объектов. Например, множество всевозможных пар, состоящих из числа и его куба, можно было бы назвать кубическим отношением **). Ясно, что для того, чтобы пользоваться описанным методом реализации, мы должны располагать понятием упорядоченной пары. Последнее тоже можно определить в терминах множеств ***). Основные нужные нам факты таковы: каждая упорядоченная пара состоит из первой и второй координат, и две упорядоченные пары равны (совпадают) тогда и только тогда, когда совпадают их первые координаты и совпадают их вторые координаты. Упорядоченная пара, первой координатой которой является x, а второй y, обозначается через (x, y). Таким образом, $(x, y)=(u, v)$ в том и только в том случае, когда $x=u$ и $y=v$.

---

*) Автор имеет в виду, что понятие множества не определялось, так как оно считалось элементарным. (*Прим перев.*)

**) В русском переводе книги Бурбаки «Теория множеств» множество пар, реализующих отношение, разумно названо графиком (см. стр. 80—88 и далее). (*Прим. перев.*)

***) Честное изложение вопроса дано в Добавлении, где фигурирует определение упорядоченной пары, принадлежащее Винеру. Остроумная идея представлять отношения описанным образом принадлежит Пирсу. Очень хорошее изложение элементарной алгебры отношений можно найти в книге Тарского [1].

Удобно распространить правило для задания множеств на случай пар; таким образом, $\{(x, y) : \ldots\}$ — множество всех пар (x, y), для которых ... Можно было обойтись без этого соглашения — то же множество описывается так: $\{z$: *для некоторого* x *и некоторого* y $z = (x, y)$ *и* ...$\}$.

Отношение *) — это множество упорядоченных пар. Таким образом, отношение — это некоторое множество, каждый элемент которого — некоторая упорядоченная пара. Если R — отношение, то записи xRy и $(x, y) \in R$ эквивалентны. Мы говорим, что x находится к y в отношении R, в том и только в том случае, когда xRy. *Областью определения* отношения R называется множество всех первых координат входящих в R элементов, а *областью значений* называется множество их вторых координат. Формально *область определения* $R = \{x$: *для некоторого* y $(x, y) \in R\}$ и *область значений* $R = \{y$: *для некоторого* x $(x, y) \in R\}$. Одним из простейших отношений является множество всех пар (x, y), где x — элемент некоторого фиксированного множества A и y — элемент некоторого фиксированного множества B. Это — так называемое *декартово произведение* множеств A и B; обозначается оно через $A \times B$. Таким образом, $A \times B = \{(x, y) : x \in A$ *и* $y \in B\}$. Если B не пусто, то областью определения отношения $A \times B$ служит A. Очевидно, всякое отношение является подмножеством декартова произведения его области определения и области значения.

Обратное отношение к отношению R, обозначаемое через R^{-1}, получается, если изменить порядок координат внутри каждой из пар: $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$ и xRy тогда и только тогда, когда $yR^{-1}x$. Например, $(A \times B)^{-1} = B \times A$ для любых множеств A и B. Область определения обратного к R отношения всегда совпадает с областью значений отношения R, а область значений R^{-1} совпадает с областью определения R. Композицией отношений R и S называется отношение $R \circ S$ (иногда обозначаемое через RS), состоящее из всех пар (x, z) таких, что для некоторого y $(x, y) \in S$ и $(y, z) \in R$. Операция композиции, вообще говоря, не коммутативна.

---

*) См. сноску на стр. 20. (*Прим. перев.*)

Например, если $R=\{(1,2)\}$ и $S=\{(0,1)\}$, то $R\circ S=\{(0,2)\}$, а $S\circ R$ пусто. *Тождественное* отношение на множестве X (*тождество на* X) — это множество всех пар вида (x, x), где $x\in X$. Обозначается оно через Δ или $\Delta(X)$. Название объясняется тем фактом, что $\Delta\circ R=R\circ\Delta=R$ для любого отношения R, область определения и область значений которого являются подмножествами множества X. Тождественное отношение называется также *диагональю*; это наименование подсказано его расположением в $X\times X$.

Пусть R — отношение и A — некоторое множество; тогда $R[A]$, множество всех R-образов точек из A, определяется как $\{y : xRy$ *для некоторого* x *из* $A\}$. Когда A — вся область определения R, $R[A]$ совпадает с областью значений R. Если $R\subset S$, где R и S — отношения, то $R[A]\subset S[A]$ для любого A.

Алгебра отношений широко разработана; ей принадлежит следующая теорема.

5. Теорема. *Пусть R, S и T — отношения, а A и B — множества. Тогда:*

(а) $(R^{-1})^{-1}=R$ *и* $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

(б) $R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$ *и* $(R\circ S)[A]=R[S[A]]$.

(в) $R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$ *и* $R[A\cap B]\subset R[A]\cap R[B]$.

Более общее утверждение: если для каждого элемента a непустого множества индексов A задано некоторое множество X_a, то:

(г) $R[\bigcup\{X_a : a\in A\}]=\bigcup\{R[X_a] : a\in A\}$ *и* $R[\bigcap\{X_a : a\in A\}]\subset\bigcap\{R[X_a] : a\in A\}$.

Доказательство. Докажем, например, равенство $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$. Пара (z, x) является элементом $(R\circ S)^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(x, z)\in R\circ S$, а последнее имеет место в том и только в том случае, когда для некоторого y верно, что $(x, y)\in S$ и $(y, z)\in R$. Следовательно, $(z, x)\in(R\circ S)^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(z, y)\in R^{-1}$ и $(y, x)\in S^{-1}$ для некоторого y. Но это — в точности условие принадлежности (z, x) композиции $S^{-1}\circ R^{-1}$.

Несколько специальных типов отношений встречается так часто, что им даны собственные имена. Кроме упорядочений и функций, которые будут рассмотрены детально в следующих параграфах, к числу наиболее полезных отношений относятся, вероятно, следующие. Удобно заранее договориться, что всюду ниже R является отношением, а X — множеством всех точек, входящих в область определения или область значений R, т. е. $X =$ (область определения R) $\cup$ (область значений R). Отношение R *рефлексивно* в том и только в том случае, когда каждая точка из X находится в отношении R к себе *). R *симметрично*, если из xRy следует yRx и наоборот. Алгебраически выразить это требование можно так: $R = R^{-1}$. С другой стороны, отношение R называется *антисимметричным* тогда и только тогда, когда xRy и yRx никогда не выполняются одновременно. Иными словами, R антисимметрично в том и только в том случае, когда $R \cap R^{-1}$ пусто. Отношение R *транзитивно* тогда и только тогда, когда из xRy и yRz следует xRz. В терминах композиции отношение R транзитивно в том и только в том случае, когда $R \circ R \subset R$. Следовательно, если R транзитивно, то $R^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ R)^{-1} \subset R^{-1}$ и, значит, обратное к транзитивному отношение тоже транзитивно. Если R и транзитивно, и рефлексивно, то $R \circ R \supset R \circ \Delta$ и, значит, $R \circ R = R$. Обычно в этом случае говорят, что отношение *идемпотентно* относительно композиции.

Отношение эквивалентности — это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение. Устроены отношения эквивалентности очень просто — мы сейчас опишем как. Пусть R — отношение эквивалентности и X — его область **). Подмножество A множества X называется *классом эквивалентности* (классом R-эквивалентности) тогда и только тогда, когда существует элемент $x \in A$ такой, что A совпадает с множеством всех y, для которых xRy. Иными словами, A является классом эквивалентности в том и только в том случае, когда имеется x в A, для которого $A = R[\{x\}]$. Фундаментальный результат об отношениях эквивалентности состоит в том, что семейство $\mathfrak{A}$ всех классов эквивалентности дизъюнктно и что точка x находится к точке y в отношении R в том

*) Это, конечно, не означает, что она находится в отношении R *только* к себе. (*Прим. перев.*)

**) Когда R — отношение эквивалентности, область определения и область значений, очевидно, совпадают. (*Прим. перев.*)

и только в том случае, когда и x, и y принадлежат одному и тому же классу эквивалентности. Множество всех пар (x, y), для которых x и y принадлежат некоторому классу A, есть просто $A \times A$; это позволяет дать следующую краткую формулировку основного результата.

6. Теорема. *Отношение R является отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда существует дизъюнктное семейство $\mathfrak{A}$ такое, что $R = \bigcup\{A \times A : A \in \mathfrak{A}\}$.*

Доказательство. Раз R — отношение эквивалентности, оно транзитивно: если xRy и yRz, то xRz. Иными словами, если xRy, то $R[\{y\}] \subset R[\{x\}]$. Но R симметрично (xRy есть yRx), отсюда следует, что если xRy, то $R[\{x\}] = R[\{y\}]$. Далее, если z входит и в $R[\{x\}]$, и в $R[\{y\}]$, то $R[\{x\}] = R[\{z\}] = R[\{y\}]$ и, следовательно, любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются. Если y и z принадлежат классу эквивалентности $R[\{x\}]$, то, так как $R[\{y\}] = R[\{x\}]$, получаем, что yRz; иными словами, $R[\{x\}] \times R[\{x\}] \subset R$. Следовательно, объединение множеств $A \times A$ по всем классам эквивалентности A является подмножеством множества R, а из рефлексивности следует, что если xRy, то $(x, y) \in R[\{x\}] \times R[\{x\}]$. Значит, $R = \bigcup\{A \times A : A \in \mathfrak{A}\}$.

Прямое доказательство обратного утверждения опускается.

Часто нас будет интересовать, как ведет себя отношение на точках, принадлежащих некоторому подмножеству его области определения; для таких точек отношение может обладать некоторыми дополнительными свойствами, которые в прочих точках могут и не выполняться. Для заданных множества X и отношения R можно построить новое отношение $R \cap (X \times X)$, областью определения которого является подмножество множества X. Удобно условиться говорить, что *отношение R обладает некоторым свойством на X* или что *сужение R на X обладает этим свойством*, тогда и только тогда, когда им обладает отношение $R \cap (X \times X)$. Например, R транзитивно на X в том и только в том случае, когда $R \cap (X \times X)$ — транзитивное отношение. Уместно при этом говорить, что определяемое свойство выполняется для точек из X; в нашем примере это точно отражает ситуацию: если x, y и z — такие точки из X, что xRy и yRz, то xRz.

ФУНКЦИИ

Теперь нам надлежит определить понятие функции в терминах уже введенных понятий. Все возможные здесь затруднения снимаются, как только мы замечаем, что, чем бы ни была функция, график ее очевидным образом определяется как некоторое множество упорядоченных пар. Более того, нет такой информации о функции, которую нельзя было бы извлечь из ее графика. Короче говоря, нет причин проводить различие между функцией и ее графиком.

Функция — это такое отношение, первые координаты любых двух различных элементов которого различны *). Таким образом, f является функцией тогда и только тогда, когда элементами f служат упорядоченные пары, и коль скоро (x, y) и (x, z) являются элементами f, то $y=z$. Мы не отличаем функцию от ее графика. Термины *соответствие*, *преобразование*, *отображение*, *оператор* и *функция* имеют для нас одинаковый смысл. Пусть f — функция и x — точка из ее области определения (т. е. x принадлежит множеству всех первых координат элементов из f), тогда через $f(x)$, или f_x, обозначается вторая координата того единственного элемента множества f, первой координатой которого служит x. Точка $f(x)$ называется *значением* f в точке x, или *образом* x при f; мы говорим при этом также, что f *сопоставляет* x значение $f(x)$, или что f *переводит* x в $f(x)$. Говорят, что функция f (*определена*) на X тогда и только тогда, когда X является ее областью определения, и говорят, что f отображает X *на* Y тогда и только тогда, когда Y является областью значений f (множеством вторых координат элементов из f). Если область значений функции f составляет подмножество множества Y, то говорят, что f

*) В русской, да и в американской, литературе с давних пор весьма популярно понятие *многозначной функции* (set-valued function); оно эквивалентно общему понятию отношения. См. В. И. Пономарев [4], [5]; Майкл [4]. (*Прим. перев.*)