для точек из X; в нашем примере это точно отражает ситуацию: если x, y и z — такие точки из X, что xRy и yRz, то xRz.

ФУНКЦИИ

Теперь нам надлежит определить понятие функции в терминах уже введенных понятий. Все возможные здесь затруднения снимаются, как только мы замечаем, что, чем бы ни была функция, график ее очевидным образом определяется как некоторое множество упорядоченных пар. Более того, нет такой информации о функции, которую нельзя было бы извлечь из ее графика. Короче говоря, нет причин проводить различие между функцией и ее графиком.

Функция — это такое отношение, первые координаты любых двух различных элементов которого различны *). Таким образом, f является функцией тогда и только тогда, когда элементами f служат упорядоченные пары, и коль скоро (x, y) и (x, z) являются элементами f, то $y=z$. Мы не отличаем функцию от ее графика. Термины *соответствие*, *преобразование*, *отображение*, *оператор* и *функция* имеют для нас одинаковый смысл. Пусть f — функция и x — точка из ее области определения (т. е. x принадлежит множеству всех первых координат элементов из f), тогда через $f(x)$, или f_x, обозначается вторая координата того единственного элемента множества f, первой координатой которого служит x. Точка $f(x)$ называется *значением* f в точке x, или *образом* x при f; мы говорим при этом также, что f *сопоставляет* x значение $f(x)$, или что f *переводит* x в $f(x)$. Говорят, что функция f (*определена*) на X тогда и только тогда, когда X является ее областью определения, и говорят, что f отображает X *на* Y тогда и только тогда, когда Y является областью значений f (множеством вторых координат элементов из f). Если область значений функции f составляет подмножество множества Y, то говорят, что f

*) В русской, да и в американской, литературе с давних пор весьма популярно понятие *многозначной функции* (set-valued function); оно эквивалентно общему понятию отношения. См. В. И. Пономарев [4], [5]; Майкл [4]. (*Прим. перев.*)

является отображением *в* Y. Вообще говоря, функция многие элементы может переводить в один и тот же элемент — может существовать много пар с одинаковой второй координатой или, что эквивалентно, много точек, на которых f принимает одинаковое значение. Функция f называется взаимно однозначной, если образы различных точек различны; иначе говоря, если обратное соответствие f^{-1} тоже является функцией.

Функция — это множество, следовательно, две функции f и g совпадают в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов. Ясно, что так будет тогда и только тогда, когда область определения f совпадает с областью определения g и $f(x)=g(x)$ для каждого x из этой области. Следовательно, функцию можно задать, указав ее область определения и значение в каждой точке области определения. Если f — функция на X в Y и A — подмножество множества X, то $f \cap (A \times Y)$ тоже является функцией. Последняя называется *сужением* функции f на (множество) A и обозначается через $f|A$; ее областью определения служит A, и $(f|A)(x)=f(x)$ для каждого x из A. Функция g является сужением функции f на некоторое множество в том и только в том случае, когда область определения g является подмножеством области определения f и $g(x)=f(x)$ для каждого x из области определения функции g; иными словами, когда $g \subset f$. Функция f называется *продолжением* функции g тогда и только тогда, когда $g \subset f$. Таким образом, f является *продолжением* g тогда и только тогда, когда g является сужением f на некоторое подмножество области определения f.

Пусть A — множество и f — функция; тогда в соответствии с определением, данным нами для произвольных соответствий, $f[A]=\{y : (x, y) \in f$ *для некоторого* x *из* $A\}$. Эквивалентно этому такое описание: $f[A]$ есть $\{y : y=f(x)$ *для некоторого* x *из* $A\}$. Множество $f[A]$ называется *образом* A *при* f. Для любых множеств A и B имеем $f[A \cup B]=f[A] \cup f[B]$ и $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$. Аналогичные формулы имеют место для любых объединений и пересечений. Не верно, вообще говоря, что $f[A \cap B]=f[A] \cap f[B]$, ибо образы непересекающихся множеств могут пересекаться. Пусть f — функция; множество

$f^{-1}[A]$ называется *прообразом* множества A при f. Операция перехода к прообразу удовлетворяет следующим алгебраическим правилам.

7. Теорема. *Пусть f — функция, A и B — множества, тогда*:

(а) $f^{-1}[A \setminus B]=f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$,

(б) $f^{-1}[A \cup B]=f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$,

(в) $f^{-1}[A \cap B]=f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.

Более общее утверждение: если для каждого элемента c из непустого множества индексов C задано некоторое множество X_c, то:

(г) $f^{-1}[\bigcup\{X_c : c \in C\}]= \bigcup\{f^{-1}[X_c] : c \in C\}$,

(д) $f^{-1}[\bigcap\{X_c : c \in C\}]= \bigcap\{f^{-1}[X_c] : c \in C\}$.

Доказательство. Мы докажем только (д). Точка x является элементом множества $f^{-1}[\bigcap\{X_c : c \in C\}]$ в том и только в том случае, когда $f(x)$ принадлежит стоящему в скобках пересечению, а так будет тогда и только тогда, когда $f(x) \in X_c$ для каждого c из C. Но последнее условие эквивалентно тому, что $x \in f^{-1}[X_c]$ для каждого c из C, т. е. эквивалентно соотношению $x \in \bigcap\{f^{-1}[X_c] : c \in C\}$.

Предшествующая теорема обычно формулируется так: переход к прообразу перестановочен с переходом к относительному дополнению и операциями объединения и пересечения. Следует заметить, что выписанные в теореме 7 формулы справедливы для *любых* множеств A и B, а не только для подмножеств области значений функции f. Конечно, $f^{-1}[A]$ совпадает с прообразом пересечения A с областью значений f, однако удобно не ограничивать наше обозначение (и соответствующее обозначение для образов при f) случаем подмножеств области значений (соответственно области определения).

Композиция двух функций — снова функция, это доказывается прямым рассуждением. Для любой функции f соответствие $f^{-1} \circ f$ является отношением эквивалентности, ибо $(x, y) \in f^{-1} \circ f$ в том и только в том случае, когда $f(x)=f(y)$. Композиция $f \circ f^{-1}$ является функцией — тождеством на области значений функции f.

8. Замечания. Иногда значение функции f в точке x обозначают по-другому. Помимо $f(x)$ и f_x, пишут

(f, x), (x, f), fx, xf и $\cdot fx$. Первые два из последних четырех обозначений особенно удобны, когда сталкиваются с двойственностями, — если речь идет о семействе F функций, определенных на фиксированном множестве X, и мы хотим трактовать F и X симметрично. Обозначения fx и xf суть очевидные сокращения принятых нами обозначений; при этом писать f слева или справа от x — дело вкуса *). У обозначений xf, fx и $f(x)$ есть общий недостаток: в определенных, довольно сложных, ситуациях они могут вызвать недоразумения, если не пользоваться обильно скобками. При работе с последним обозначением, применяемым А. П. Морсом (A. P. Morse), никаких затруднений этого рода не возникает. Оно не ведет к двусмысленностям и не нуждается в скобках. (См. замечания по поводу объединений и пересечений, сделанные в 0.4.)

Необходимо уметь записывать некоторые функции в терминах связанных переменных. Например, функция, определенная на множестве всех вещественных чисел со значением x^2 в x, должна иметь какую-то краткую запись. Для рассматриваемого частного случая выход может заключаться в том, чтобы согласиться, что x обозначает тождественную функцию на множестве вещественных чисел, тогда x^2 разумно было бы понимать как квадрат этой функции. Классический прием состоит в том, чтобы использовать x^2 как для обозначения самой функции, так и для обозначения ее значения в точке x. Менее сомнительный подход — записывать функцию, соответствующую возведению в квадрат, как $x \to x^2$. Обозначения этого рода весьма соблазнительны; они сейчас быстро входят в общее употребление. Однако они не универсальны; например, утверждение $(x \to x^2)(t) = t^2$ потребовало бы разъяснений. Наконец, следует заметить, что хотя стрелочные обозначения, вне всякого сомнения, станут стандартными, λ-соглашение Чёрча (A. Church)

*) Известно, что обозначение xf обладает определенными преимуществами перед fx; например, пусть $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ — отображения, тогда их композиция $X \to Z$ только при выборе первого обозначения записывается *естественно* — через fg. (*Прим. перев.*)

имеет перед ними технические преимущества. (Возведение в квадрат как функция может быть записано в виде $\lambda x : x^2$.) При этом можно не употреблять никаких скобок, не опасаясь двусмысленностей *).

УПОРЯДОЧЕНИЯ

Упорядочение (*частичное упорядочение*, *квазиупорядочение*) — это транзитивное отношение. Говорят, что отношение $<$ *упорядочивает* (*частично упорядочивает*) множество X тогда и только тогда, когда оно является транзитивным отношением на X. Когда $<$ — упорядочение и $x<y$, обычно говорят, что x *предшествует* y, или что x *меньше* y (относительно $<$), и что y *следует за* x, или что y *больше* x. Пусть A — подмножество множества X, упорядоченного отношением $<$. Элемент $x \in X$ называется *верхней гранью* множества A в том и только в том случае, когда для любого y из A либо $y<x$, либо $y=x$. Аналогично элемент $x \in X$ называется *нижней гранью* множества A, если x предшествует любому не равному ему элементу из A. Конечно, у множества может существовать много различных верхних граней. Элемент x называется *наименьшей верхней гранью* (*supremum*) множества A тогда и только тогда, когда он является верхней гранью A и предшествует любой не равной ему верхней грани множества A. (Иными словами, наименьшая верхняя грань — это верхняя грань, являющаяся нижней гранью множества верхних граней.) Подобным же образом *наибольшая нижняя грань*, или *infimum*, определяется как нижняя грань, которая мажорирует прочие нижние грани. X называется *полным упорядоченным* множеством **) (относительно $<$), тогда и только тогда, когда у каждого непустого подмно-

---

*) По поводу обозначений Чёрча и связанных с этим проблем см. Curry H. B. and Feys R., Combinatory Logic, Amsterdam, 1960, а также Curry H. B., Foundations of Mathematical Logic, 1963, гл. III. (*Прим. ред.*)

**) Сравните эту терминологию с терминологией, принятой в переводе книги Н. Бурбаки «Теория множеств», стр. 383 и дальше. (*Прим. перев.*)