имеет перед ними технические преимущества. (Возведение в квадрат как функция может быть записано в виде $\lambda x : x^2$.) При этом можно не употреблять никаких скобок, не опасаясь двусмысленностей *).

УПОРЯДОЧЕНИЯ

Упорядочение (*частичное упорядочение*, *квазиупорядочение*) — это транзитивное отношение. Говорят, что отношение $<$ *упорядочивает* (*частично упорядочивает*) множество X тогда и только тогда, когда оно является транзитивным отношением на X. Когда $<$ — упорядочение и $x<y$, обычно говорят, что x *предшествует* y, или что x *меньше* y (относительно $<$), и что y *следует за* x, или что y *больше* x. Пусть A — подмножество множества X, упорядоченного отношением $<$. Элемент $x \in X$ называется *верхней гранью* множества A в том и только в том случае, когда для любого y из A либо $y<x$, либо $y=x$. Аналогично элемент $x \in X$ называется *нижней гранью* множества A, если x предшествует любому не равному ему элементу из A. Конечно, у множества может существовать много различных верхних граней. Элемент x называется *наименьшей верхней гранью* (*supremum*) множества A тогда и только тогда, когда он является верхней гранью A и предшествует любой не равной ему верхней грани множества A. (Иными словами, наименьшая верхняя грань — это верхняя грань, являющаяся нижней гранью множества верхних граней.) Подобным же образом *наибольшая нижняя грань*, или *infimum*, определяется как нижняя грань, которая мажорирует прочие нижние грани. X называется *полным упорядоченным* множеством **) (относительно $<$), тогда и только тогда, когда у каждого непустого подмно-

---

*) По поводу обозначений Чёрча и связанных с этим проблем см. Curry H. B. and Feys R., Combinatory Logic, Amsterdam, 1960, а также Curry H. B., Foundations of Mathematical Logic, 1963, гл. III. (*Прим. ред.*)

**) Сравните эту терминологию с терминологией, принятой в переводе книги Н. Бурбаки «Теория множеств», стр. 383 и дальше. (*Прим. перев.*)

жества X, обладающего в X верхней гранью *), есть наименьшая верхняя грань. Может показаться удивительным, что сформулированное условие для верхних граней полностью эквивалентно соответствующему условию для нижних граней, а именно:

9. Теорема. *X является полным упорядоченным множеством относительно заданного на нем упорядочения в том и только в том случае, когда у каждого его непустого ограниченного снизу* **) *подмножества есть наибольшая нижняя грань.*

Доказательство. Предположим, что X — полное упорядоченное множество относительно заданного упорядочения и A — его непустое подмножество, ограниченное снизу. Обозначим через B множество всех нижних граней множества A. Множество B не пусто, и, очевидно, каждый элемент непустого множества A является верхней гранью множества B. Следовательно, у B есть наименьшая верхняя грань; пусть, например, это будет элемент b. Тогда b меньше произвольной не равной ему верхней грани множества B, в частности, b предшествует произвольному не равному ему элементу из A. Значит, b — нижняя грань множества A. С другой стороны, b является верхней гранью B, т. е. b больше или равно произвольной не равной ему нижней грани множества A. Следовательно, b — наибольшая нижняя грань множества A.

Обратное утверждение доказывается аналогично; впрочем, можно просто применить полученный только что результат к отношению, обратному для $<$.

Следует отметить, что данное нами определение упорядочения не очень ограничительно. Например, упорядочением множества X, правда малоинтересным, является $X \times X$. При этом упорядочении каждый элемент множества X является верхней гранью (даже наибольшей верхней гранью) произвольного подмножества множе-

---

*) Такие подмножества мы будем называть *ограниченными сверху*. (*Прим. перев.*)

**) *Ограниченными снизу* называются такие подмножества упорядоченного множества, у которых есть хотя бы одна нижняя грань. (*Прим. перев.*)

ства X. Более интересные упорядочения получаются, если наложить следующее условие: если x меньше y, а y меньше x, то $y=x$. В этом случае у множества может быть не более одной наименьшей верхней и не более одной наибольшей нижней грани.

Линейным упорядочением (или *совершенным упорядочением*) называется упорядочение, для которого:

(а) *из* $x<y$ *и* $y<x$ *следует, что* $x=y$, и

(б) *каковы бы ни были различные элементы* x *и* y *из объединения области определения и области значений отношения* $<$, *выполняется* $x<y$ *или* $y<x$.

Стоит отметить, что линейное упорядочение может и не быть рефлексивным. Однако можно условиться писать $x\leqslant y$ в том и только в том случае, когда $x<y$ или $x=y$. Тогда, если $<$ — линейное упорядочение, то $\leqslant$ — рефлексивное линейное упорядочение. В соответствии с принятым нами соглашением мы говорим, что отношение задает *линейный порядок* на X, тогда и только тогда, когда его сужение на X является линейным упорядочением. Множество вместе с линейно упорядочивающим его отношением называется *цепью*. Ясно, что в цепях наибольшие нижние и наименьшие верхние грани множеств, если они существуют, единственны. Остальные утверждения этого раздела касаются цепей; впрочем, будет ясно, что многие рассмотрения можно было бы провести и для случая более общих упорядочений.

Функция f, определенная на упорядоченном отношением $<$ множестве X со значениями в множестве Y, упорядоченном отношением $\prec$, называется *возрастающей* (*сохраняющей порядок*, *монотонной*, *изотонной*) тогда и только тогда, когда из $u\leqslant v$, где $u, v\in X$, следует, что $f(u)\prec f(v)$ или $f(u)=f(v)$. Если заданное на Y упорядочение $\prec$ есть просто $Y\times Y$ или если упорядочение $<$, заданное на X, является пустым отношением, то f непременно сохраняет порядок. Поэтому не следует ожидать, что обратная к взаимно однозначной возрастающей функции будет всегда возрастающей функцией. Однако если X и Y — цепи, а f — взаимно однозначная монотонная функция, то и f^{-1} обязательно монотонна, ибо если $f(u)\prec f(v)$ и $f(u)\neq f(v)$, то $v<u$ невозможно, так как порядок сохраняется.

Полные цепи *) обладают одним очень специальным свойством. Предположим, что X и Y — цепи, X_0 — подмножество множества X и f — сохраняющее порядок отображение X_0 в Y. Возникает вопрос: существует ли монотонная функция, являющаяся продолжением функции f на все X? Если на f не налагать никаких ограничений, то ответ, вообще говоря, отрицателен. В самом деле, пусть X — множество всех положительных вещественных чисел, X_0 — его подмножество, образованное числами, меньшими 1, $Y=X_0$ и f является тождественным отображением. Легко видеть тогда, что f нельзя продолжить до монотонного отображения множества X в Y. (Предположим, что $\tilde{f}$ — такое продолжение; что есть тогда $\tilde{f}(1)$?) Этот пример, однако, выявляет и природу затруднения: у X_0 в X есть верхняя грань, а у $f[X_0]$ в Y нет верхней грани. Если монотонное продолжение $\tilde{f}$ функции f существует, то оно, несомненно, переводит верхние грани множества A в верхние грани множества $f[A]$. Аналогичное утверждение имеет место для нижних граней, следовательно, если подмножество A множества X_0 *ограничено* в X (т. е. у него в X есть и нижняя и верхняя грани), то его образ $f[A]$ ограничен в Y. Следующая теорема утверждает, что это условие является и достаточным для существования монотонного продолжения.

10. Теорема. *Пусть f — монотонное отображение подмножества X_0 цепи X в полную цепь Y. Тогда у f есть монотонное продолжение на все X в том и только в том случае, когда f переводит ограниченные множества в ограниченные множества. (Точнее, условие таково: если A — подмножество X_0, ограниченное в X, то множество $f[A]$ ограничено в Y.)*

Доказательство. Уже отмечалось, что сформулированное условие необходимо для существования монотонного продолжения. Остается доказать его достаточность. Нужно построить монотонное продолжение заданного отображения f. Заметим, прежде всего, что если подмножество A множества X_0 имеет в X нижнюю

*) Имеются в виду цепи, порядок на которых полон. (*Прим. перев.*)

грань, то и у $f[A]$ есть нижняя грань Y. Ибо, выбрав в A произвольную точку x, мы получаем ограниченное в X множество $\{y : y \in A \text{ и } y \leqslant x\}$, образ которого при f тоже, следовательно, ограничен. Нижняя грань этого образа является и нижней гранью множества $f[A]$. Аналогичное утверждение имеет место и для верхних граней. Для каждого x из X обозначим через L_x множество всех элементов из X_0, меньших или равных x; таким образом, $L_x = \{y : y \leqslant x \text{ и } y \in X_0\}$. Если L_x пусто, то x является нижней гранью множества X_0 и, значит, у $f[X_0]$ есть наибольшая нижняя грань v; положим в этом случае $\bar{f}(x) = v$. Если множество L_x не пусто, то из того, что x служит верхней гранью L_x, вытекает, что и у множества $f[L_x]$ есть верхняя грань. Следовательно, у $f[L_x]$ есть и наименьшая верхняя грань. Положим $\bar{f}(x) = \sup f[L_x]$. Без каких-либо затруднений доказывается, что $\bar{f}$ является монотонным продолжением отображения f.

В определенных ситуациях монотонное продолжение функции единственно. С одним таким случаем мы встретимся при рассмотрении десятичного разложения вещественного числа. Не стремясь к формулировке наилучшего положительного результата в этом направлении, мы дадим сейчас простое достаточное условие единственности продолжения; впоследствии оно нам пригодится.

11. Теорема. *Пусть f и g — монотонные отображения цепи X в цепь Y, X_0 — некоторое подмножество, на котором f и g согласуются, и $Y_0 = f[X_0]$. Тогда для $f = g$ достаточно, чтобы Y_0 пересекало каждое множество вида $\{y : u < y < v,\ y \neq u \text{ и } y \neq v\}$, где u и v — произвольные элементы из Y такие, что $u < v$.*

Доказательство. Если $f \neq g$, то $f(x) \neq g(x)$ для некоторого x из X; можно при этом считать, что $f(x) < g(x)$. Каждый элемент множества X_0, меньший или равный x, отображается посредством f в элемент, меньший или равный $f(x)$, в силу монотонности f, и каждый элемент, больший или равный x, отображается посредством g в элемент, больший или равный $g(x)$, в силу монотонности g. Следовательно, ни одна точка множества X_0 не отображается в множество $\{y : f(x) < y < g(x),\ f(x) \neq y \text{ и } y \neq g(x)\}$; этим теорема доказана.

12. З а м е ч а н и я. Каждую цепь можно естественным образом вложить в некоторую полную цепь; это достигается обобщением дедекиндова построения вещественных чисел на основе множества рациональных чисел. Соответствующий процесс можно применить и к более общим упорядочениям, как это показано Мак Нейлом (H. M. Mac Neille), см. Б и р к г о ф [1], стр. 58. Он напоминает процедуру бикомпактного расширения топологических пространств (глава 5).

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

В этом разделе приводится несколько определений из элементарной алгебры. Определяемые понятия встречаются в основном в упражнениях. Терминология стандартная; естественно собрать немногие нужные понятия вместе.

Группа — это пара $(G, \cdot)$, где G — непустое множество, а $\cdot$ — групповая операция, т. е. такое отображение множества $G \times G$ в G, что (а) операция $\cdot$ ассоциативна, т. е. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для всех x, y и z из G; (б) существует нейтральный, или единичный, элемент e, для которого $e \cdot x = x \cdot e = x$, какова бы ни была точка x из G, и (в) для каждого x из G в G есть обратный элемент x^{-1} такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$. Когда групповая операция обозначается через $+$, элемент, обратный к x, обозначается обычно через $-x$. В соответствии с общепринятой системой значение функции $\cdot$ на элементе (x, y) обозначается через $x \cdot y$; следуя обычным правилам записи значения функции, мы должны были бы написать $\cdot\,(x, y)$. Когда никаких недоразумений не ожидается, символ $\cdot$ можно совсем опускать; групповой операции соответствует тогда просто запись элементов рядом. Иногда (допуская вольность речи) мы будем говорить, что G является группой. Пусть A и B — любые подмножества множества G; тогда $A \cdot B$, или просто AB, — множество всех элементов вида $x \cdot y$, где $x \in A$ и $y \in B$. Множество $\{x\} \cdot A$ обозначается также через $x \cdot A$, или просто через xA; аналогичное соглашение принимается для умножения справа. Группу называют *абелевой*, или *коммутативной*, тогда и только тогда, когда $x \cdot y = y \cdot x$ для всех x и