12. Замечания. Каждую цепь можно естественным образом вложить в некоторую полную цепь; это достигается обобщением дедекиндова построения вещественных чисел на основе множества рациональных чисел. Соответствующий процесс можно применить и к более общим упорядочениям, как это показано Мак Нейлом (H. M. Mac Neille), см. Биркгоф [1], стр. 58. Он напоминает процедуру бикомпактного расширения топологических пространств (глава 5).

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

В этом разделе приводится несколько определений из элементарной алгебры. Определяемые понятия встречаются в основном в упражнениях. Терминология стандартная; естественно собрать немногие нужные понятия вместе.

Группа — это пара $(G, \cdot)$, где G — непустое множество, а $\cdot$ — групповая операция, т. е. такое отображение множества $G \times G$ в G, что (а) операция $\cdot$ ассоциативна, т. е. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для всех x, y и z из G; (б) существует нейтральный, или единичный, элемент e, для которого $e \cdot x = x \cdot e = x$, какова бы ни была точка x из G, и (в) для каждого x из G в G есть обратный элемент x^{-1} такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$. Когда групповая операция обозначается через $+$, элемент, обратный к x, обозначается обычно через $-x$. В соответствии с общепринятой системой значение функции $\cdot$ на элементе (x, y) обозначается через $x \cdot y$; следуя обычным правилам записи значения функции, мы должны были бы написать $\cdot\,(x, y)$. Когда никаких недоразумений не ожидается, символ $\cdot$ можно совсем опускать; групповой операции соответствует тогда просто запись элементов рядом. Иногда (допуская вольность речи) мы будем говорить, что G является группой. Пусть A и B — любые подмножества множества G; тогда $A \cdot B$, или просто AB, — множество всех элементов вида $x \cdot y$, где $x \in A$ и $y \in B$. Множество $\{x\} \cdot A$ обозначается также через $x \cdot A$, или просто через xA; аналогичное соглашение принимается для умножения справа. Группу называют *абелевой*, или *коммутативной*, тогда и только тогда, когда $x \cdot y = y \cdot x$ для всех x и

y из G. Группа H является *подгруппой группы* G в том и только в том случае, когда $H \subset G$ и групповая операция на H получается сужением на $H \times H$ групповой операции, заданной на G. Подгруппу H называют *нормальной* (*нормальным делителем*) тогда и только тогда, когда $x \cdot H = H \cdot x$ для любого x из G. *Левым классом смежности* группы G по подгруппе H, или *левым комножеством* по H, называется любое множество вида $x \cdot H$, где x — какой-нибудь элемент из G. Семейство всех левых классов смежности группы G по H обозначается через G/H. Если H — нормальный делитель, A и B — элементы множества G/H, то $A \cdot B$ тоже является элементом множества G/H. При таком определении групповой операции G/H становится группой; называется она *фактор-группой* группы G по H. Отображение f группы G в группу H называется *гомоморфизмом*, или *представлением*, в том и только в том случае, когда $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых x и y из G. *Ядро* гомоморфизма f есть множество $f^{-1}[e]$. Ядро всегда является нормальным делителем. Пусть H — нормальный делитель группы G. Отображение, переводящее $x \in G$ в $x \cdot H$, является гомоморфизмом. Этот гомоморфизм обычно называют *проектированием*, или *фактор-отображением*, группы G в группу G/H.

Кольцом называется тройка $(R, +, \cdot)$, где $(R, +)$ — абелева группа и $\cdot$ — отображение множества $R \times R$ в R, удовлетворяющее ассоциативному и дистрибутивному законам, — последнее означает, что $(u+v) \cdot (x+y) = u \cdot x + u \cdot y + v \cdot x + v \cdot y$ для всех x, y, u и v из R. Подкольцо — это подмножество кольца, само являющееся кольцом относительно ограничений на него операций кольца. *Кольцевым гомоморфизмом*, или *представлением*, называется такое отображение f одного кольца в другое, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для всех элементов x и y из области определения f. Аддитивная подгруппа I кольца R называется *левым идеалом* в том и только в том случае, когда $xI \subset I$ для любого x из R; говорят, что I — *двусторонний идеал*, тогда и только тогда, когда $xI \subset I$ и $Ix \subset I$ для каждого x из R. Если I — двусторонний идеал, то R/I по отношению к соответствующему сложению и умножению является кольцом; проектирование R на R/I тогда представляет собой кольцевой гомоморфизм. *Поле* — это такое кольцо $(F, +, \cdot)$, что (а) F содержит по крайней мере два различных элемента и (б) $(F\setminus\{0\})$, где 0 — нейтральный относительно операции $+$ элемент, является коммутативной группой. Операция $+$ называется при этом сложением, операция $\cdot$ — умножением, а нейтральный относительно умножения элемент называется *единицей* кольца и обозначается через 1. Принято, когда бояться нечего, заменять знак $\cdot$ обычной записью рядом и говорить, что F является полем (вместо «F вместе с операциями $+$ и $\cdot$»). *Линейным*, или векторным, пространством над полем F (полем *скаляров* пространства) называется четверка $(X, \oplus, \cdot, F)$, где $(X, \oplus)$ — абелева группа, а $\cdot$ — отображение $F\times X$ в X такое, что для всех x и y из X и всех a, b из F выполняются соотношения: $a\cdot(b\cdot x)=$ $=(a\cdot b)\cdot x$, $(a+b)\cdot x=a\cdot x\oplus b\cdot x$, $a\cdot(x\oplus y)=a\cdot x\oplus a\cdot y$ и $1\cdot x=x$. *Вещественным линейным пространством* называется линейное пространство над полем вещественных чисел. Можно дать чуть-чуть другое определение линейного пространства. Семейство всех гомоморфизмов произвольной абелевой группы в себя, вместе с операцией сложения, определенного по точкам, и умножения, определенного как переход к композиции гомоморфизмов, образует кольцо, называемое *кольцом эндоморфизмов* рассматриваемой группы. Линейное пространство над полем F — это четверка $(X, \oplus, \cdot, F)$, где $(X, \oplus)$ — абелева группа и $\cdot$ — некоторый кольцевой гомоморфизм поля в кольцо эндоморфизмов группы $(X, \oplus)$, переводящий единицу, 1, в тождественный гомоморфизм.

Линейное пространство $(Y, \oplus, \odot, F)$ называется *подпространством* линейного пространства $(X, +\ \cdot, F)$ тогда и только тогда, когда $Y\subset X$ и операции $+$ и $\cdot$ согласуются с $\oplus$ и $\odot$ там, где последние определены. Семейство X/Y классов смежности пространства X по его подпространству Y превращается в линейное пространство, если в X/Y очевидным образом определить сложение и умножение на число. При этом для проектирования f X на X/Y имеет место $f(a\cdot x+b\cdot y)=a\cdot f(x)+b\cdot f(y)$, каковы бы ни были x, y из X и a, b из F. Отображения линейных пространств, удовлетворяющие такому условию, называются *линейными преобразованиями* (или *линейными отображениями*). При этом множество $f^{-1}[0]$ называется нуль-пространством *) преобразования f; оно всегда является линейным подпространством области определения преобразования (относительно индуцированных в $f^{-1}[0]$ операций сложения и умножения на число).

Предположим, что f — линейное преобразование X в Y и g — линейное преобразование X на Z такие, что нуль-пространство f содержит нуль-пространство g. Тогда существует единственное линейное преобразование h Z в Y, для которого $f=h\circ g$ (а именно, $h(z)$ является единственным элементом множества $f\circ g^{-1}[z]$). (Говорят при этом, что преобразование h *индуцировано* преобразованиями f и g.) Из отмеченного обстоятельства, в частности, следует, что каждое линейное преобразование можно представить как композицию проектирования в фактор-пространство и последующего взаимно однозначного линейного преобразования.

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Этот раздел посвящен доказательству нескольких важнейших результатов, касающихся вещественных чисел.

Упорядоченное поле — это поле F, в котором выделено некоторое подмножество P, называемое множеством *положительных элементов*, такое, что

(а) *если x и y — элементы P, то $x+y$ и xy тоже принадлежат P* и (б) *для любого элемента x из F выполняется в точности одно из следующих трех соотношений: $x\in P$, $-x\in P$ или $x=0$.*

Легко проверяется, что отношение $<$, определенное правилом: $x<y$ в том и только в том случае, когда $y-x\in P$, является линейным упорядочением множества F. Справедливы обычные предложения о сложении и умножении неравенств. Элементы x из F, для которых $-x\in P$, называются *отрицательными*.

Будем предполагать, что вещественные числа образуют упорядоченное поле, полное относительно заданного на нем порядка, в том смысле, что каждое его непустое

*) Чаще $f^{-1}(0)$ называют ядром преобразования f.