положительное число, не являющееся образом никакого элемента из $E \setminus R$ при отображении $\bar{r}$. Положим $F = \{a : a \in E \setminus R$ и $\bar{r}(a) < x\}$. Если у множества F есть верхняя грань — элемент c, то при $\bar{r}(c) < x$ ни одна точка из $E \setminus R$ не может отобразиться в интервал $(\bar{r}(c), x)$, а при $\bar{r}(c) > x$ (так как $\bar{r}$ сохраняет порядок) ни одна точка из $E \setminus R$ не может отобразиться в интервал $(x, \bar{r}(c))$. В любом случае имеем противоречие. Таким образом, теорема будет доказана, если мы обнаружим, что каждое ограниченное сверху непустое подмножество множества $E \setminus R$ имеет верхнюю грань, т. е. что $E \setminus R$ полно в рассматриваемом упорядочении.

Пусть F — произвольное непустое ограниченное сверху подмножество множества $E \setminus R$. Тогда среди чисел p таких, что $a_p \neq 0$ для некоторого a из F, существует наименьшее. Положим по определению, что c_q равно нулю при $q < p$; пусть F_p — множество всех элементов a из F, p-й разряд a_p у которых отличен от нуля, и $c_p = \max\{a_p : a \in F_p\}$. Определим F_{p+1} как множество всех элементов $a \in F_p$, для которых $a_q = c_q$ при $q = p$, и положим $c_{p+1} = \max\{a_{p+1} : a \in F_{p+1}\}$; продолжим построение по индукции. Ни одно из множеств F_p не может быть пустым. Легко видеть, что разложение c, к которому приводит описанная конструкция, является верхней гранью множества F — в действительности его наименьшей верхней гранью — и что $c \in E \setminus R$.

Предшествующая теорема будет применена в случаях $b = 2$, $b = 3$ и $b = 10$. Соответствующие b-адические разложения называются *двоичным*, *троичным* и *десятичным*.

СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Множество называется конечным тогда и только тогда, когда можно установить взаимно однозначное соответствие между его элементами и элементами некоторого множества вида $\{p : p \in \omega$ и $p < q\}$, где $q \in \omega$. Множество A называется *счетно бесконечным* в том и только в том случае, когда можно установить взаимно однозначное соответствие между его элементами и элементами множества ω всех неотрицательных целых чисел.

Говорят, что множество *счетно*, тогда и только тогда, когда оно либо конечно, либо счетно бесконечно.

15. Теорема. *Произвольное подмножество счетного множества само счетно.*

Доказательство. Пусть A — счетное множество, f — взаимно однозначная функция, определенная на ω, областью значений которой является A, и $B \subset A$. Тогда сужение функции f на $f^{-1}[B]$ является взаимно однозначным отображением подмножества $f^{-1}[B]$ множества ω на B, и если мы сможем показать, что $f^{-1}[B]$ счетно, то взаимно однозначное отображение множества ω на B можно будет получить, взяв композицию. Итак, доказательство теоремы свелось к тому, чтобы установить, что произвольное подмножество C множества ω счетно. Обозначим через $g(0)$ первый элемент множества C и, действуя по индукции, обозначим через $g(p)$ первый элемент множества C, отличный от $g(0), g(1), \ldots, g(p-1)$. Если осуществить такой выбор для некоторого p невозможно, то построенная до этого функция g будет отображением множества $\{q : q \in \omega \text{ и } q < p\}$ на C, т. е. C тогда будет конечным множеством. В противном случае (применив теорему 0.13), мы получаем функцию g, определенную на ω, причем для любого $p \in \omega$ $g(p)$ является первым элементом множества C, отличным от $g(0)$, $g(1), \ldots, g(p-1)$. По индукции легко проверяется, что $g(p) \geqslant p$ для всех p. Из определения $g(p+1)$ тогда следует, что каждый элемент множества C имеет вид $g(q)$ для некоторого $q \leqslant p$. Значит, областью значений функции g является все множество C.

16. Теорема. *Если область определения функции счетна, то и область ее значений тоже счетна.*

Доказательство. Достаточно показать, что если f — функция, отображающая некоторое подмножество A множества ω на множество B, то B счетно. Обозначим через C множество всех элементов $x \in A$, для которых из $y \in A$ и $y < x$ вытекает, что $f(x) \neq f(y)$. Таким образом, множество C образуют наименьшие элементы всевозможных множеств вида $f^{-1}[y]$, где $y \in B$. Тогда $f \mid C$ отображает C на A взаимно однозначно. Так как множество C в силу теоремы 0.15 счетно, то и B счетно.

17. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *счетное семейство счетных множеств. Тогда множество* $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ *тоже счетно.*

Доказательство. Из счетности семейства $\mathfrak{A}$ следует, что можно отобразить ω на $\mathfrak{A}$ посредством некоторой функции F. Так как множество $F(p)$ для любого $p \in \omega$ счетно, то существует функция G_p, отображающая некоторое подмножество множества $\{p\} \times \omega$ на множество $F(p)$. Следовательно, существует функция (объединение функций G_p), определенная на некотором подмножестве множества $\omega \times \omega$, областью значений которой является множество $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$. Задача сводится, таким образом, к доказательству того, что множество $\omega \times \omega$ счетно. Ключом к этому доказательству служит замечание, что если мы будем представлять себе множество $\omega \times \omega$ лежащим в правом верхнем квадранте плоскости, то диагонали, идущие вправо вниз, содержат лишь конечное число элементов из $\omega \times \omega$. Точнее, для произвольного n из ω положим $B_n = \{(p, q) : (p, q) \in \omega \times \omega$ *и* $p + q = n\}$. Множество B_n состоит ровно из $(n+1)$ элементов, и объединение $\bigcup\{B_n : n \in \omega\}$ есть все $\omega \times \omega$. Перебирая сначала элементы из B_0, затем из B_1 и т. д., можно получить функцию, отображающую множество ω на множество $\omega \times \omega$. Дать точное определение такой функции мы предоставляем читателю.

Функция f называется *характеристической функцией* подмножества A множества X, если $f(x) = 0$ при $x \in X \setminus A$ и $f(x) = 1$ при $x \in A$. Любая функция, определенная на X и принимающая только значения 0 и 1, называется характеристической функцией, — она является, очевидно, характеристической функцией множества $f^{-1}[1]$. Функция, тождественно равная нулю, является характеристической функцией пустого множества, а функция, тождественно равная 1, является характеристической функцией всего X. Характеристические функции множеств совпадают тогда и только тогда, когда совпадают сами эти множества. Следовательно, между семейством всех характеристических функций, определенных на X, и семейством всех подмножеств множества X существует взаимно однозначное соответствие.

Семейство всех характеристических функций, определенных на множестве ω всех неотрицательных целых чисел, можно поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством F всех двоичных разложений a таких, что $a_p=0$ при $p<0$. Семейство всех конечных подмножеств множества ω взаимно однозначно соответствует подсемейству G семейства F, образованному рациональными двоичными разложениями. Мы докажем сейчас с помощью классического диагонального процесса Кантора, что множество F несчетно.

18. Теорема. *Семейство всех конечных подмножеств счетного множества счетно, но семейство всех его подмножеств несчетно.*

Доказательство. В силу замечаний, предшествовавших формулировке теоремы, достаточно показать, что множество F всех двоичных разложений a, для которых $a_p=0$ при отрицательных p, несчетно и что подмножество $G\subset F$, образованное рациональными разложениями, счетно. Предположим, что задана какая-нибудь взаимно однозначная функция f, отображающая множество ω на множество F. Рассмотрим элемент $a\in F$ такой, что $a_p=1-f(p)_p$ для каждого неотрицательного целого p. Таким образом, p-й разряд элемента a равен единице минус p-й разряд элемента $f(p)$. Ясно, что $a\in F$. Очевидно, для каждого $p\in\omega$ $a=f(p)$, ибо a и $f(p)$ отличаются в p-м разряде. Отсюда следует, что a не принадлежит области значений функции f, что приводит к противоречию. Значит, F несчетно.

Остается доказать, что множество G счетно. Положим $G_p=\{a : a\in G \text{ и } a_q=0 \text{ при } q>p\}$. Множество G_0 состоит ровно из двух элементов, и поскольку G_{p+1} содержит в точности в два раза больше элементов, чем G_p, то каждое множество G_p конечно. Следовательно, множество $G=\bigcup\{G_p : p\in\omega\}$ счетно.

Естественное соответствие между множеством F и подмножеством множества вещественных чисел взаимно однозначно на $F\setminus G$ в силу теоремы 0.14. Так как G счетно, то $F\setminus G$ должно быть несчетно. Имеем, таким образом,

19. Следствие. *Множество всех вещественных чисел несчетно.*