КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Многие теоремы о счетных множествах являются частным случаем более общих теорем о кардинальных числах. Выше особую роль играло множество ω неотрицательных целых чисел. В более общем контексте роль множества натуральных чисел выполняют множества, называемые кардинальными числами (ω — одно из них). Согласимся считать множества A и B *равномощными*, если существует взаимно однозначная функция, отображающая множество A на множество B *). Оказывается, что для каждого множества A существует единственное равномощное с ним кардинальное число C. Различные кардинальные числа C и D не равномощны, но в одном из них обязательно есть подмножество, равномощное другому. Пусть для определенности C равномощно части множества D. В этом случае говорят, что кардинальное число C меньше кардинального числа D, и пишут $C<D$. При таком определении порядка семейство всех кардинальных чисел становится линейно упорядоченным множеством, удовлетворяющим дополнительному условию: в каждом непустом его подмножестве есть наименьший элемент. (Эти утверждения доказываются в Добавлении.)

Приняв временно на веру перечисленные в предыдущем абзаце факты, мы можем заключить, что, каковы бы ни были множества A и B, либо существует взаимно однозначная функция, отображающая множество A на подмножество множества B, либо можно взаимно однозначно отобразить множество B на подмножество множества A, ибо есть кардинальные числа C и D такие, что C равномощно A и B равномощно D. Предположим теперь, что заданы взаимно однозначная функция, отображающая множество A на некоторое подмножество множества B, и взаимно однозначная функция, отображающая множество B на некоторое подмножество множества A. Тогда C равномощно подмножеству карди-

*) В дальнейшем мы будем в этом случае писать также, что между A и B имеется взаимно однозначное соответствие. (*Прим. перев.*)

нального числа D, D равномощно подмножеству кардинального числа C. Отсюда, поскольку рассматриваемое упорядочение класса кардинальных чисел линейно, следует, что $C=D$. Значит, множества A и B равномощны. Это — классическая теорема Шредера — Бернштейна. Мы дадим сейчас ее прямое доказательство, не зависящее от общей теории кардинальных чисел, ибо в этом доказательстве содержится нетривиальная дополнительная информация.

20. Теорема. *Если существует взаимно однозначная функция, отображающая множество A на подмножество множества B, и взаимно однозначная функция, отображающая множество B на подмножество множества A, то множества A и B равномощны.*

Доказательство. Предположим, что f взаимно однозначно отображает A в B и что g взаимно однозначно отображает B в A. Можно считать при этом, что A и B не пересекаются. При доказательстве множества A и B будут разложены на классы элементов следующим образом. Точка x (из A или B) называется предшественником точки y в том и только в том случае, когда y можно получить из x в результате последовательного применения f и g (или g и f). Разложим теперь A в три множества: через A_E обозначим множество всех точек из A, общее число предшественников каждой из которых четно, через A_0 — множество тех точек $y \in A$, у каждой из которых нечетное число предшественников, и пусть A_I — множество всех точек с бесконечным числом предшественников *). Разложим аналогичным образом множество B и заметим следующее: f отображает A_E на B_0 и A_I на B_I, а g^{-1} отображает A_0 на B_E. Следовательно, функция, согласующаяся на $A_E \cup A_I$ с f и на A_0 с g^{-1}, является взаимно однозначным отображением множества A на множество B.

21. Замечания. Приведенное выше доказательство теоремы 20 не опирается на аксиому выбора; это любопытно, хотя и не очень важно. Важно другое — что

*) Число *различных* предшественников может быть при этом конечным — предшественники могут как бы «зацикливаться» в бесконечную последовательность из конечного числа точек. (*Прим. перев.*)

нужное отображение было построено на основе заданных отображений в результате счетной процедуры. А именно, положим $E_0 = A \setminus g[B]$, $E_{n+1} = g \circ f[E_n]$ для каждого n и $E = \bigcup \{E_n : n \in \omega\}$. Тогда соответствие h, совпадающее с f на E и с g^{-1} на $A \setminus B$, является взаимно однозначным отображением множества A на множество B. (Точнее, $h = (f|E) \cup (g^{-1}|A \setminus E)$.) Нас этот факт может интересовать, ибо с его помощью удается доказывать, что если f и g обладают определенными хорошими свойствами (например, являются борелевскими функциями), то и h ими обладает *).

Элегантное доказательство теоремы 20, приведенное нами, принадлежит Биркгофу и Маклейну.

ПОРЯДКОВЫЕ ЧИСЛА

Порядковые числа в этой книге понадобятся нам только при построении отдельных примеров. Так как ряд очень интересных примеров основывается на совсем элементарных свойствах порядковых чисел, стоит сообщить немногие необходимые сведения прямо сейчас. (Порядковые числа строятся в Добавлении, и их свойства там доказываются.)

22. Сводка сведений. *Существует несчетное множество Ω', линейно упорядоченное некоторым отношением $<$ так, что:*

(а) *В каждом непустом подмножестве множества Ω' есть наименьший элемент.*

(б) *В Ω' есть наибольший элемент Ω.*

(в) *Если $x \in \Omega'$ и $x \neq \Omega$, то множество тех элементов из Ω', которые предшествуют x, счетно.*

Ω' — это множество всех порядковых чисел, меньших или равных Ω, *первого несчетного порядкового числа.* Каждое линейно упорядоченное множество, в любом непустом подмножестве которого есть наименьший элемент, называется *вполне упорядоченным.* В частности, каждое непустое подмножество вполне упорядоченного

---

*) Не следует переоценивать общность этого утверждения. Если f и g — гомеоморфизмы, то гомеоморфизма h может не существовать. (*Прим. перев.*)