нужное отображение было построено на основе заданных отображений в результате счетной процедуры. А именно, положим $E_0=A\setminus g[B]$, $E_{n+1}=g\circ f[E_n]$ для каждого n и $E=\bigcup\{E_n : n\in\omega\}$. Тогда соответствие h, совпадающее с f на E и с g^{-1} на $A\setminus B$, является взаимно однозначным отображением множества A на множество B. (Точнее, $h=(f|E)\cup(g^{-1}|A\setminus E)$.) Нас этот факт может интересовать, ибо с его помощью удается доказывать, что если f и g обладают определенными хорошими свойствами (например, являются борелевскими функциями), то и h ими обладает *).

Элегантное доказательство теоремы 20, приведенное нами, принадлежит Биркгофу и Маклейну.

ПОРЯДКОВЫЕ ЧИСЛА

Порядковые числа в этой книге понадобятся нам только при построении отдельных примеров. Так как ряд очень интересных примеров основывается на совсем элементарных свойствах порядковых чисел, стоит сообщить немногие необходимые сведения прямо сейчас. (Порядковые числа строятся в Добавлении, и их свойства там доказываются.)

22. Сводка сведений. *Существует несчетное множество Ω', линейно упорядоченное некоторым отношением $<$ так, что:*

(а) *В каждом непустом подмножестве множества Ω' есть наименьший элемент.*

(б) *В Ω' есть наибольший элемент Ω.*

(в) *Если $x\in\Omega'$ и $x\neq\Omega$, то множество тех элементов из Ω', которые предшествуют x, счетно.*

Ω' — это множество всех порядковых чисел, меньших или равных Ω, *первого несчетного порядкового числа.* Каждое линейно упорядоченное множество, в любом непустом подмножестве которого есть наименьший элемент, называется *вполне упорядоченным.* В частности, каждое непустое подмножество вполне упорядоченного

---

*) Не следует переоценивать общность этого утверждения. Если f и g — гомеоморфизмы, то гомеоморфизма h может не существовать. (*Прим. перев.*)

множества имеет наибольшую нижнюю грань. Так как любое множество из Ω' ограничено сверху, а именно, элементом Ω, то из теоремы 0.9 вытекает, что у каждого непустого подмножества множества Ω' есть наименьшая верхняя грань*). Один из любопытных фактов, относящихся к Ω', состоит в следующем.

23. Теорема. *Если A — счетное подмножество множества Ω' и $\Omega \notin A$, то наименьшая верхняя грань множества A меньше Ω.*

Доказательство. Из того, что A счетно и не содержит Ω, следует, что множество $\{x : x \leqslant a\}$ для любого $a \in A$ счетно. Значит, счетно и объединение множеств такого вида: множество $\{x : x \leqslant a$ *для некоторого* a *из* $A\}$. Наименьшая верхняя грань b последнего множества ограничивает сверху множество A. Множество элементов, предшествующих b, счетно, следовательно, $b \neq \Omega$. Отсюда следует, что наименьшая верхняя грань множества A меньше Ω.

Один из элементов множества Ω' заслуживает специального внимания. Это — первый элемент из Ω', для которого множество предшествующих элементов бесконечно; он называется *первым бесконечным порядковым числом* и обозначается через ω. Символ ω уже употреблялся для обозначения множества неотрицательных целых чисел. При построении порядковых чисел выясняется, что первое бесконечное порядковое число и является в действительности множеством неотрицательных целых чисел.

ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Декартово произведение множеств A и B определяется как множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$ и $y \in B$. Полезно распространить определение декартова произведения на любые семейства множеств; напомним, что ранее мы сделали это для операций

*) Конечно, наименьшая верхняя грань подмножества вполне упорядоченного множества может уже этому подмножеству не принадлежать (в отличие от наибольшей нижней грани). (*Прим. перев.*)